मुद्रक
दीवान बंशधारीलाल
हिन्दी-साहित्य प्रेस, प्रयाग।

विषय-सूची

नोट —पृष्ठ २०६ पर 'परिच्छिन्न मूल' की जगह समीकरण के मूलों का आनयन चहिए।

चतुर्घात समीकरण वाले अध्याय पर कोई संख्या नहीं है इसलिए विषय सूची में संख्या नहीं दी गयी।

श्री जानकीवल्लभो विजयते ।

सम्पादककी भूमिका ।

भारतवर्ष में बीजगणित का अङ्कुर कब और पहिले कहां जमा यह अब स्पष्टरूप से जानना अत्यन्त कठिन है । तथापि जहां तक विचार से अनुभव होता है यह जान पड़ता है कि इस देश में लिखने की विद्या प्रकट होने के पूर्व ही से बीजगणित का प्रचार था । पहिले के लोग जो कि अक्षरों के सङ्केत से अपरिचित थे अव्यक्त पदार्थों के मानने के लिये जुदे जुदे रङ्गों की गोलिओं का व्यवहार करते थे जब पीछे से लिखने की विद्या प्रचलित हुई तब बीजगणित की पोथिओं में उन्हीं रंगों के सूचक शब्दों का व्यवहार होने लगा जैसा कि संस्कृत के बीजगणितों में अव्यक्तों के मान मानने के लिये जो यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीतक, लोहितक, श्वेतक, चित्रक, कपिलक, पिङ्गलक, पाटलक, धूम्रक, श्यामलक, मेचक इत्यादि शब्द रक्खे हैं उनसे स्पष्ट है । जिसकी रचना काल का अनुसन्धान अभी तक स्पष्ट रूप से नहीं हो सका है ऐसे आर्षग्रन्थ सूर्यसिद्धान्त के देखने से यही अनुमान होता है कि बीजगणित भारतवर्ष में ही पहिले उत्पन्न हुआ फिर यहाँ से सर्वत्र फैला है । क्योंकि कोणशङ्कु (the Sine of the altitude of the sun when situated in the vertical circle of which the Azimuth distance is 45°) के आनयन के लिये इस ग्रन्थ में यह सूत्र

'त्रिज्यावर्गार्धतोऽग्रज्यावर्गोनाद् द्वादशाहतात् ।

पुनर्द्वादशनिघ्नाच्च लभ्यते यत् फलं बुधैः ॥

शङ्कुवर्गार्धसंयुक्तविषुवद्वर्गभाजितात् ।

तदेव करणी नाम तां पृथक् स्थापयेद्बुधः ।

अर्धान्तो विषुवच्छायाग्रज्यया गुणिता तथा ।
भक्ता फलाख्यं तद्वर्गसंयुक्तकरणीपदम् ॥
फलेन हीनसंयुक्तं दक्षिणोत्तरगोलयोः ।
याम्ययोर्विदिशाः शङ्कुरेवं याम्योत्तरे रवौ ॥
परिभ्रमति शङ्कुस्तु शङ्कुरुत्तरयोस्तु सः ।

लिखा है जिसका अर्थ है कि त्रिज्या के वर्ग के आधे में अग्रा का वर्ग घटा कर शेष को १२ से गुण कर फिर १२ से गुण दो। इस गुणनफल में शङ्कुवर्ग के आधे अर्थात् ७२ युत पलभावर्ग से भाग दो। इससे जो भजनफल पाया जाय उसको करणी कह पण्डित इस करणी को अलग लिख रक्खे। फिर १२ गुन पलभा वा अग्रा से गुणने से जो गुणनफल हो उसमें उसी का अर्थात् ७२ युत पलभावर्ग का भाग दो। इस लब्धि को फल कहो। इस फल के वर्ग से युत करणी के वर्गमूल में से उस फल को यदि सूर्य दक्षिण गोल में हो तो घटाओ और यदि सूर्य उत्तर गोल में हो तो जोडो। यही फल कोणशङ्कु होता है। इस सूत्र की उपपत्ति बीजगणित के बिना हो ही नहीं सकती। इस बात की सत्यता प्रकट करने के लिये यहाँ ऊपर लिखे हुए सूत्र की उपपत्ति पाठकों के अवलोकनार्थ नीचे दी जाती है:—

मान लो कि य = कोणशङ्कु प = पलभा (the equinoctial shadow)

अ = अग्रा (the sine of the amplitude)

क = करणी और फ = फल

तब १२ : प :: य : $\frac{\text{प}}{१२}$ य = शङ्कुतल

यदि दक्षिण गोल में सूर्य हो तो शङ्कुतल में अग्रा जोड़ देने से और यदि उत्तर गोल में हो तो घटा देने से भुज (the sine of the difference between the sun's place and the prime vertical) बनता है।

$\therefore \frac{प}{१२}य \pm अ = भुज$

परन्तु जब कोणवृत्त मे सूर्य रहता है तब उसका जितना अन्तर सममण्डल (the prime vertical circle) से रहता है उतना ही याम्योत्तर वृत्त (meridian)से रहता है। इस लिये तब दृग्ज्या (the sine of the zenith distance)अर्थात् नतांशो की ज्या कर्ण (hypotenuse) होती है। भुज और कोटि ये दोनो

$\frac{प}{१२}य \pm अ$ इस भुज के तुल्य होते हैं।

$$\therefore दृग्ज्या^{२} = २\left(\frac{प}{१२} य \pm अ\right)^{२} = २\left(\frac{प^{२}}{१४४}य^{२} \pm \frac{प.य.अ}{६} + अ^{२}\right)$$

$$= \frac{प^{२}}{७२}य^{२} \pm \frac{प.य.अ}{३} + २ अ^{२}।$$

परन्तु $शंकु^{२} + दृग्ज्या^{२} = त्रिज्या^{२}$

$$\therefore य^{२} + \frac{प^{२}}{७२}य^{२} \pm \frac{प य अ}{३} + २ अ^{२} = त्रि^{२}$$

छेदगम से $७२ य^{२} + प^{२}य^{२} \pm २४ य प अ + १४४अ^{२} = ७२ त्रि^{२}$

वा $(प^{२} + ७२) य^{२} \pm २४ अ प य = ७२ त्रि^{२} - १४४अ^{२}$

$(प^{२} + ७२)$ इसका दोनों पक्षों में भाग दे देने से

$$य^{२} \pm \frac{२४अप}{प^{२} + ७२} य = \frac{७२त्रि^{२} - १४४अ^{२}}{प^{२} + ७२} = \frac{१४४\left(\frac{त्रि^{२}}{२} - अ^{२}\right)}{प^{२} + ७२}$$

$$वा\ य^{२} \pm २य\left(\frac{१२ अ}{प^{२} + ७२}\right) = \frac{१२ \times १२\left(\frac{त्रि^{२}}{२} - अ^{२}\right)}{प^{२} + ७२}$$

यहां श्लोक के अनुसार $\frac{१२ \times १८ (\frac{अ^2}{४} - न^2)}{प^2 + ७२}$ इसकी करणी संज्ञा और $\frac{१२ अ}{प^2 + ७२}$ इसकी फल संज्ञा की गई है।

$\therefore य^2 \pm २ फय = क$

वा $य^2 \pm २ फय + फ^2 = फ^2 + क$

मूल लेने से $य \pm फ = \sqrt{फ^2 + क}$

$\therefore य = \sqrt{फ^2 + क} \mp फ$

यहाँ फलवर्गयुत करणी के वर्गमूल में से जब सूर्य दक्षिण गोल में हो तो फल को घटाओ और जब उत्तर गोल में हो तो जोड़ दो।

यदि $\sqrt{फ^2 + क}$ इस व्यक्त पक्ष का मूल ऋण मानो तो दोनों गोल में शङ्कुमान ऋण होगा अर्थात् तब सूर्य क्षितिज के नीचे कोणवृत्त में आवेगा।

ऊपर की क्रिया से यह स्पष्ट है कि भारतवर्ष में सूर्यसिद्धान्त के रचनाकाल के पूर्व ही से बीजगणित का प्रचार भली भांति था।

बीजगणित के समीकरणों में अव्यक्त पदार्थ के मान मानने के लिये सभी रंगवाची शब्दों ही का प्रयोग किया गया है। केवल प्रथम शब्द यावत्तावत् रंगवाची न होने से चित्त में कुछ शङ्का उत्पन्न होती है। संस्कृत में यावक महावर को कहते हैं जो कि लाह से बना हुआ लाल रंग का होता है। मंगल कार्यों में पुरुष और स्त्रियों के पैर इससे रँगे जाते हैं और पैर के नहों में भी इसी को भर देते हैं। रंगवाची ही सब शब्दों के प्रयोग से निश्चय होता है कि पहिले के लोगों ने यावक ही को ग्रहण किया था पीछे से भास्करादिकों ने इसके स्थान में लेखक दोष से

आ का स्थ आपनी इच्छा से यावत्तावत् को रक्खा। क्योंकि पृथूदक स्वामी की की हुई ब्रह्मगुप्त के सिद्धान्त की टीका में यावत्तावत् के स्थान मे यावक ही मिलता है। भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित के अनेकवर्णसमीकरण में ऊपर के अव्यक्त सूचक शब्दों का जिक्र कर यह भी कहा है कि अथवा आपस में जिसमें उनके मान न मिल जायँ इस लिये अव्यक्त के मानों के लिये चाहो तो क, ख, ग इत्यादि अक्षरो ही को रक्खो।

यूरप मे थोड़े समय से अब समीकरणो में य के स्थान में भिन्न भिन्न अव्यक्तो के उत्थापन देने का विशेष कर के प्रचार हुआ है जिससे न न हो सीधा समीकरण हो जाता है और बड़े लाघव मे उत्तर निकल आता है। परन्तु यह बात ध्यान देने योग्य है कि भारतवर्ष मे हजारों वर्ष पहिले से उत्थापन का यह प्रकार चला आता है जिससे बड़े कठिन प्रश्न भी सहज मे हो जाते हैं। यही कारण है कि यहाँ के आचार्यो ने अव्यक्त पदार्थ के मान मानने के लिये यावत्तावत्, कालक, नीलक इत्यादि इतने शब्दों का प्रयोग किया है। अपने बीजगणित मे भास्कराचार्य लिखते हैं कि

ब्रह्माह्वयश्रीधरपद्मनाभबीजानि यस्मादतिविस्तृतानि।
आदाय तत्सारमकारि नूनं सयुक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्टयै॥

अर्थात् ब्रह्मगुप्त, श्रीधर और पद्मनाभ के बीजगणित बहुत विस्तृत हैं, इसलिये उनमें से उत्तम उत्तम पदार्थों का संग्रह कर विद्यार्थियो के संतोष के लिये मैं ने इस छोटे बीजगणित को बनाया है। ऊपर के श्लोक से स्पष्ट है कि भारतवर्ष में अनेक आचार्यों के बीजगणित की पोथियाँ थीं पर कालवश से वे सब प्रायः नष्ट हो गईं। केवल ब्रह्मगुप्त के बीजगणित का कुछ भाग मिला है जिसका अंगरेजी अनुवाद कोलब्रूक महाशय का किया

हुआ विद्वानो में प्रसिद्ध है। इस बीजगणित को ब्रह्मगुप्त ने शाक ५५० अर्थात् सन् ६२८ ई० मे बनाया है। उसमें वर्गसमीकरण के तोड़ने के लिये उसी युक्ति को लिखा है जो आज कल सर्वत्र प्रचलित है। जो लोग संस्कृत नहीं जानते केवल अंगरेजी भाषा से परिचित हैं उन्हे चाहिए कि कोलब्रूक महाशय का किया हुआ उसका अंगरेजी अनुवाद देखें।

अपने बीजगणित के मध्यमाहरण में भास्कराचार्य लिखते हैं "न निर्वहश्चेद् धनवर्गवर्गेष्वेवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुद्ध्या" अर्थात् घन और चतुर्घात समीकरणों में अपनी बुद्धि से विचारो कि किससे गुणें, क्या जोड़ें जिसमें मूल मिले अथवा अपनी बुद्धि ही से अटकल करो कि समीकरण में अव्यक्त का मान क्या है। इस वाक्य से स्पष्ट है कि पूर्व आचार्यों के बीजगणित में घन और वर्ग-वर्ग अर्थात् चतुर्घात समीकरणों के तोड़ने की युक्ति नहीं लिखी थी। यदि ऐसी युक्तियाँ होतीं तो भास्कर अवश्य अपने बीजगणित मे लिखते।

जिन समीकरणो में अव्यक्त के अनेक मान संभाव्य और अभिन्न धन आते हैं उन समीकरणो ही के ऊपर भारतवर्ष के प्राचीन आचार्यों का विशेष रूप से ध्यान था। इसीलिये अनेक वर्णमध्यमाहरण और भावित ये पृथक् पृथक् दो अध्याय उनके बीजो में लिखे गए। अव्यक्त के जिन मानो का उदाहरण लोक व्यवहार में दिखलाया जाना संभव था उन्हीं मानो पर भास्करादिकों का ध्यान विशेष था और जिन ऋण संख्याओं का लोक मे व्यवहार नहीं हो सकता था अव्यक्तमान आने पर भी ये लोग उन संख्याओं का ग्रहण नहीं करते थे। यही कारण है कि वर्गसमीकरण मे अव्यक्त के सर्वत्र दो मानो मे से ऋण मान को लोक में व्यवहार न होने से अस्वीकार करते हुए भास्कर ने पद्मनाभ के—

व्यक्तपक्षस्य चेन्मूलमन्यपक्षर्णरूपतः ।
अल्पं धनर्णगं कृत्वा द्विविधोत्पद्यते मितिः ॥

इस सूत्र का खण्डन ही कर डाला ।

निदान ऋण संख्या पर विशेष ध्यान न देने से और गणित-लाघव के लिये विशेष साङ्केतिक चिन्ह न बनाने से भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञ वर्गसमीकरण के आगे घनसमीकरण इत्यों में विशेष विचार न कर सके। केवल भास्कराचार्य ने घनसमीकरण का एक उदाहरण $य^3 + १२य = ६ य^2 + ३५$ यह देते हुए इसके उत्तर के लिये लिखा है कि ऐसे उदाहरणों के उत्तर के लिये कोई विधि नहीं। अपनी बुद्धि बल से कुछ जोड़, घटा कर उत्तर निकालो। उन्हों ने नीचे लिखे हुए प्रकार से उत्तर निकाला है:—

$$य^3 + १२ य = ६ य^2 + ३५$$

दोनों पक्षों में $(६^2 + ८)$ इसको घटा देने से

$$य^3 - ६य^2 + १२ य - ८ = २७$$

$$वा \ (य - २)^3 = (३)^3$$

घनमूल लेने से $य - २ = ३ \therefore य = ५$

बस य का यही एक मान निकाल कर रह गए हैं। आगे और दो मानों के विषय में कुछ भी नहीं लिखा है। अव्यक्त के और दो मानों के लिये इसी ग्रन्थ का २०८ पृष्ठ देखिए।

प्राचीन काल से अरब और ग्रीस देश के लोग किसी न किसी व्याज से भारतवर्ष में आया जाया करते थे। अधिक मेल जोल हो जाने से उन लोगों ने बहुत बातें हिन्दुओं से और हिन्दुओं ने बहुत बातें उन लोगों से सीखीं।

ऐसा कहा जाता है कि अलमामून खलीफा (८१३—८३३ ई०) के राज्यकाल में रहने वाले मुहम्मद बिन अल ख्वारेज़मी राजशाही दूतों के संग अफगानिस्तान गए और लौटती समय भारतवर्ष से

होते हुये आए। इसी के थोड़े ही समय के बाद सन् ८३० ई० में इन्होंने बीजगणित की एक पोथी लिखी। इस पोथी के विषय इन्हीं के आविष्कार किए हुये नहीं मालूम पड़ते वरन् भारतवर्ष ही के ब्रह्मगुप्त, भट्ट बलभद्र या और किसी विद्वान् के बीजगणित से अनुवाद किए गए हैं या उसी के आधार पर लिखे गए हैं।

भारतवर्ष में बीजगणित में (१) एक वर्णसमीकरण (२) अनेक वर्णसमीकरण (३) मध्यमाहरण और (४) भावित ये चार प्रकार के समीकरणों ही को लेते हैं। भास्कराचार्य ने भी लिखा है कि 'प्रथममेकवर्णसमीकरणं बीजम्। द्वितीयमनेकवर्णसमीकरणं बीजम्। यत्र वर्णस्य द्वयोर्वा बहूनां वर्गादिगतानां समीकरणं तन्मध्यमाहरणम्। भावितस्य तद्भावितमिति बीजचतुष्टयं वदन्त्याचार्याः'।

दिए हुए दुरग समीकरणों में से अव्यक्त और व्यक्तों को किस प्रकार से एक एक पक्ष में रख कर अव्यक्त के मानों को ले आना इसके लिये ब्रह्मगुप्त लिखते हैं—

अव्यक्तान्तरभक्तं व्यस्तं रूपान्तरं समेऽव्यक्तः।
वर्गाव्यक्ताः शोध्या यस्माद्रूपाणि तदधस्तात्॥

इस पर पूज्यपाद पिताजी की टीका है—'समे एकवर्णसमीकरणे व्यस्तं रूपान्तरमव्यक्तान्तरभक्तमव्यक्तमानं व्यक्तं भवेत् यत्पक्षादव्यक्तमानमन्यपक्षाव्यक्तमानं विशोध्याव्यक्तान्तरं साध्यते तत्पक्षस्थरूपाण्यन्यपक्षरूपेभ्यो विशोध्य यच्छेषं तद्व्यस्तं रूपान्तरमित्यर्थः। यस्मात्पक्षादव्यक्तो वर्गाव्यक्ता अव्यक्तवर्गश्च विशोध्यस्तदधस्तादितरपक्षाद्रूपाणि विशोध्यानि। एवमेकपक्षेऽव्यक्तवर्गोऽव्यक्तश्च। अपरपक्षे च व्यक्तानि रूपाणि। अर्थात् जिस पक्षवाले अव्यक्त में से दूसरे पक्षवाले अव्यक्त को घटा कर अव्यक्त का अन्तर साधन करते हैं उसी पक्ष के व्यक्त को दूसरे पक्षवाले व्यक्त में घटा कर जो शेष बचे उसमें अव्यक्त के अन्तर का भाग देने से

अव्यक्त का मान व्यक्त हो जाता है। जिस पक्ष से अव्यक्त और अव्यक्त वर्ग घटाए जाते हैं उस दूसरे पक्ष से व्यक्त को ले जाकर घटाना चाहिए। इस प्रकार एक पक्ष से अव्यक्त वर्ग और अव्यक्त और दूसरे पक्ष से व्यक्त रूप रह जाते हैं।

भास्कराचार्य भी इसी आशय को लेकर लिखते हैं.—

तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात्त्यक्त्वा क्षिप्त्वा वापि संगुण्य भक्त्वा।
एकाऽव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षाद् रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात्।
शेषाव्यक्तेनोद्धरेद्रूपशेषं व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः।

ऊपर कही हुई बातों को भली भाँति विचारने से यह स्पष्ट है कि अरब के ज्योतिषियों ने इसी लिये अपनी भाषा में बीज का अनुवाद अलजबर व अल मुकाबिला किया। इस नाम के देखने से, अव्यक्त का बीज ही नाम रखने तथा अपना बीजगणित की पोथियों में वर्गसमीकरण के दोनों सूत्रों की चर्चा करने से यह दृढ़ अनुमान होता है कि अरब के ज्योतिषियों ने भारतवर्ष ही से पहिले पहिल बीजगणित का ज्ञान पाया था। क्योंकि ग्रीस देश का रहने वाला डायोफेंटस (Diophantus) के बीजगणित में इन सब की कुछ भी चर्चा नहीं पाई जाती।

अरब के ज्योतिषी क्षेत्र रचना की युक्ति से वर्गसमीकरण को सिद्ध करना जानते थे। इसी युक्ति से इन लोगों ने घनसमीकरण को भी सिद्ध करने के लिये बहुत प्रयत्न किया। "किसी एक धरातल से किसी एक गोल को इस प्रकार से काटना कि उस गोल के दोनों खण्ड एक दी हुई निष्पत्ति में हों" इस प्रश्न को सब से पहिले बगदाद का रहने वाला अलमहानी ने एक घनसमीकरण के स्वरूप में प्रकट किया। यद्यपि इस प्रश्न को अलकुही, अलहसन बिन अल-

हैतम् इत्यादिकों ने भी लिखा है तथापि अरब के ज्योतिषियों में से सब से पहिले इसकी उपपत्ति अबूजफर अल हाजिन ने की।

किसी समसप्तभुज क्षेत्र के भुज का ज्ञान $य^3 - य^2 - २ य + १ = ०$ इस घन समीकरण के आधीन था। बहुतों ने इसको सिद्ध करने के लिये प्रयत्न किया पर सब निष्फल हुआ। अन्तमें अबुलगूद ने इस घन समीकरण के तोड़ने की युक्ति निकाली। अन्तर खण्डित शङ्कुओं (by intersecting conics) की सहायता से सन् १०७९ ई० मे उमर अल खय्यामी ने अनेक प्रकार के समीकरणों को सिद्ध करने को उत्तम विधियों को अपने बीजगणित में लिखा है परन्तु बीजगणित की सहायता से वास्तव में घनसमीकरण के तोड़ने की कोई युक्ति साधारणतः उस ग्रन्थ मे नहीं दी गई है। क्षेत्ररचना ही की युक्ति से अबुल वफाने भी $य^4 = अ$, $य^4 + अ य^3 = ब$ इन समीकरणों को सिद्ध किया है। ईशा की तेरहवीं शताब्दि के आसन्न मे यूरप के इटली नामक प्रान्त में पीज़ा का रहनेवाला लेनार्डो (Lenardo of Pisa) ने अरबी बीज को अपनी भाषा में अनुवाद किया। जिसके कारण इटली के लोग इस विषय में प्रधान गिने जाते हैं और जब तक संसार में विद्या का प्रचार रहेगा तब तक इस बात के लिये उन लोगों का आदर होता रहेगा। सन् १९९४ ई० में लूकसपैसिओलस (Lucus Paciolus) जो बुर्गो का लूकस ((Lucus de Burgo) इस नाम से प्रसिद्ध है उसने बीजगणित की एक पोथी लिखी जिसका नाम L'Arte Maggiore यह है। इस ग्रन्थ में अरबों के घनसमीकरण के प्रकार इस विद्वान् ने लिखा है कि जितनी बीजगणितीय विधियाँ आज तक ज्ञात हैं उनसे इन घनसमीकरणों का तोड़ना उसी प्रकार असंभव है जिस प्रकार एक वृत्तके तुल्य एक चतुर्भुज बनाना क्षेत्र-युक्ति से असंभव है। लूकस को इस सूचना से गणितज्ञों का ध्यान

विशेष रूप से घनसमीकरण की ओर झुका। सीपिओ फेरियो (Scipio Ferreo) ने $य^3 + मय = न$ इस घनसमीकरण के तोड़ने के लिये एक विधि को निकाला परन्तु जनता में नहीं प्रकट किया। सन् १५०५ ई० में अपने एक शिष्य फ्लारिडा (Florido) को उसने उस विधि को बतला दिया।

एक बार कोला (Colla) ने गणितज्ञ टार्टागलिआ (Tartaglia) से एक प्रश्न पूछा जिसका उत्तर $य^3 + प य^2 = ब$ इस घनसमीकरण के अव्यक्त मान के आधीन था। इसलिये विचारते विचारते टार्टागलिआ ने इस घनसमीकरण के तोड़ने की युक्ति सन् १५३० ई० में निकाली। इस बात को सुन कर फ्लारिडो ने भी अपने गुरु की युक्ति को जो $य^3 + मय = न$ इस घनसमीकरण के तोड़ने के लिये सोची थी प्रकाश किया। इसके प्रकाश होने पर सन् १५३५ ई० में टार्टागलिआ ने कहा कि फ्लारिडा की विधि ठीक नहीं है और शास्त्रार्थ करने के लिये फ्लारिडा को ललकारा भी। परन्तु पीछे से स्वयं उस विधि को ठीक समझ कर चुप हो गया। यह विधि वही है जिसे आज कल लोग कार्डन की रीति कहते हैं। अर्थात् फेरिओने $य^3 + म य = न$ इसके तोड़ने के लिये कल्पना की थी कि $य = \sqrt[3]{र} - \sqrt[3]{ल}$ ऐसा है (११२ वाँ प्रक्रम देखो)।

पश्चात् टार्टागलिआ ने औरों के घनसमीकरण तोड़ने के लिये कई एक प्रकार निकाले। कार्डन ने उन प्रकारों को जानने के लिये उससे बहुत विनय की। अन्त में शपथ कर कि उन प्रकारों को कहीं प्रकाश न करना टार्टागलिआ ने कार्डन को अपना विश्वासयोग्य भक्त जन जान कर उन प्रकारों को बता दिया। कार्डन ने उसके शपथ का कुछ भी ख्याल न कर सन् १५४५ ई० में अपने वृहद् ग्रन्थ (Ars Magna) आर्स मैगना में टार्टागलिआ

ने इन प्रकारों को छपवा कर प्रकाश कर दिया । इसके बाद टार्टेग्लिया ने भी अपने सब प्रकारों को एक ग्रन्थके आकार में रखने का इच्छा प्रकट की और सन् १५५६ ई० में छपवाना भी आरम्भ कर दिया। परन्तु सन् १५५६ ई० में उसकी मृत्यु हो जाने से ग्रन्थ अधूरा ही छप कर रह गया। घनसमीकरण तोड़ने के उस प्रकार बिना छपे ही रह गए। कार्डेन ही के अनुग्रह से वे सब प्रकार विद्वानों को विदित होने के कारण कार्डेन के आविष्कार के नाम से वे सब प्रकार प्रसिद्ध किए गए।

इसके अनन्तर यूरप देशीय गणितज्ञों का विचार चतुर्घात समीकरण की ओर झुका। घनसमीकरण तोड़ने के लिये विद्वानों ने कोलाइन ने जिस प्रकार आन्दोलन मचाया था उसी प्रकार $य^4 + ६ य^2 + ३६ = ६० य$ इस चतुर्घात समीकरण को तोड़ने के लिये आन्दोलन मचाया। कार्डेन ने ऐसे चतुर्घात समीकरण के तोड़ने की कोई रीति निकालने लिये बहुत प्रयास किया पर कुछ भी न कर सका। परन्तु उसके शिष्य फेरारी (Ferrari) ने इस बात में सफलता प्राप्त की और ऐसे समीकरण को तोड़ कर अव्यक्त के मान जानने का प्रकार भी निकाला (१२ वें प्रक्रम का ३ प्रकार देखो)। बाम्बेली (Bombelli) का बीजगणित सन् १५७९ ई० में छपा है। उसमें भी चतुर्घात समीकरण को तोड़ने का वही प्रकार लिखा है जो फेरारी ने निकाला था। बहुतों का मत है कि यह प्रकार बाम्बेली का निकाला हुआ है। बहुत लोग कहते हैं कि यह प्रकार सिम्पसन् (Simpson) का निकाला हुआ हो पर सिम्पसन् का बीजगणित बहुत पीछे सन् १७४० ई० के लगभग छप कर प्रकट हुआ।

सन् १६३७ ई० में बीज के ऊपर डेकार्ट (Descartes) ने एक ग्रन्थ लिखा है जिसमें अनेक नये प्रकार पाए जाते

हैं। जिनमें मुख्यतः समीकरण मे अव्यक्त के धनर्णमान और असम्भव मान की मीमांसा और चिन्ह रीति है (७ वाँ प्रक्रम देखो) डेकार्ट ने दो वर्गसमीकरण के गुणनफल से एक चतुर्घात समीकरण को ले आने की युक्ति को भी दिखलाया है। यद्यपि यह युक्ति फेरारी के प्रकार से भी निकल आती है तथापि व्यवहार में उपयोगी है (१२४ वाँ प्रक्रम देखो)।

सन् १७७० ई० मे आयलर (Euler) ने एक बीजगणित रचना कर प्रकाश किया। उसमे चतुर्घात समीकरण तोड़ने के लिये उत्तम प्रकार दिखलाया गया है और साथ ही साथ सिद्ध किया गया है कि चतुर्घात समीकरण का तोड़ना एक घन-समीकरण के आधीन है अर्थात् यदि उस घनसमीकरण के अव्यक्त-मान विदित हो जायँ तो चतुर्घात समीकरण के अव्यक्तमान आ विदित हो सकते है (१२२ वाँ प्रकम देखो)। डेकार्ट और आयलर के प्रकारो को देख कर बहुतों की इच्छा हुई कि चतुर्घात से ऊपर के घातवाले समीकरण के तोड़ने का प्रकार निकाले। इसके लिये अठारहवी शताब्दि तक प्रयत्न किया गया पर सब निष्फल हुआ। पश्चात् वाण्डरमाण्डे (Vandermonde) और लाग्रेञ्ज (Lagrange) ने भी क्रम से सन् १७७० और १७७१ ई० मे इस विषय पर अत्यन्त उपयोगी बातों को अपने अपने लेखो मे प्रकाश किए। अन्त मे आबेल (Abel) और वान्टसेल (Wantzel) ने सिद्ध किए कि चतुर्घात से अधिक घातवाले समीकरणों के तोड़ने का साधारण विधि बीजगणित की युक्ति से असम्भव है। the solution is not possible by radicals alone. Serret's Cours [d'Algebre, Superieure Art 516 देखो)।

तत्पश्चात् यूरप के अनेक विद्वान अनेक नये नये सिद्धान्तों को उत्पन्न किए और आज तक करते ही जाते है जिनके धारा

बीजगणितशास्त्र की उन्नति दिन दूनी और रात चौगुनी होती जाता है। उन्हीं कतिपय सिद्धान्तों के संग्रह से बीजगणित का यह समीकरणमीमांसा नाम का एक बड़ा ग्रन्थ हिन्दी भाषा में बन कर तयार हुआ है।

आसन्नमूल

कल्पान्तर से आसन्नमूल जनाने के लिये भारतवर्ष के आचार्यों ने बहुत प्राचीन काल से अनेक प्रकार निकाले हैं। परन्तु वे प्रकार ज्यौतिषसिद्धान्त के ग्रन्थों में प्रायः जीवा, कोटिज्या, आदि सम्बन्धी समीकरणों ही में पाए जाते हैं (भास्कराचार्य्यकृत सिद्धान्तशिरोमणि के गणिताध्याय का त्रिप्रश्नाधिकार और सूर्य-ग्रहण के समय का लम्बनसाधन; कमलाकररचित सिद्धान्ततत्त्वविवेक ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में चाप के त्रिभागादि का ज्यानयन देखो)।

अरबी भाषा से अनभिज्ञ होने के कारण उनके ग्रन्थों के पढ़ने की योग्यता मुझ में नहीं है तथापि कमलाकर ने अपने ग्रन्थ तत्त्व-विवेक के स्पष्टाधिकार में चाप के त्रिभाग की ज्या के आनयन के लिये मिर्ज़ा उलूक बेग का जो प्रकार लिखा है उससे स्पष्ट है कि अरब के लोग भी इस आसन्न मूल को जानने के लिये अनेक यत्न में तत्पर थे। यूरप में सब से पहिले सन् १६०० ई० में वीटा (Vieta) ने आसन्नमूल जानने के लिये कुछ प्रकारों को लिखा। उसने निश्चय किया कि अवश्य कोई एक प्रकार ऐसा होगा जिससे बार बार क्रिया करने से व्यक्त संख्या के वर्गमूल और घनमूल की तरह किसी समीकरण के एक अव्यक्त मान के व्यक्त संख्या के सब स्थानीय अङ्क क्रम से आते जायँगे। इसके लिये वीटा ने जो प्रकार निकाला उसमें महा प्रयास करने पर अव्यक्त मान का पता लगता था। पीछे से हैरिअट् (Harriot), आउट्रेड (Oughtred), पेल (Pell) और अन्य लोगों ने भी जहाँ तक बना

वीटा के प्रकार को कुछ सीधा किया। सन् १६६६ ई० मे न्यूटन के आसन्नमूल के लिये अपनी रीति प्रकाश की (१४४ वाँ प्रक्रम देखो) तत्पश्चात् सिम्सन्, बर्नेली, लाग्रांज इत्यादिकों ने भी अपनी अपनी रीतियों को प्रकाश किए। परन्तु अन्त मे सन् १८१६ ई० में हार्नर (Horner) ने इसके लिये जो रीति निकाली वही सब से बढ़कर हुई और वही अत्यन्त सुगम और लघु होने से सर्वत्र व्यवहार मे प्रचलित हुई (१५४ वाँ प्रक्रम देखो)।

कनिष्ठफल

इस ग्रन्थ के १५ वे अध्याय मे कनिष्ठफलों (Determinants) के अनेक सिद्धान्त लिखे हैं। इनकी चर्चा यूरप मे बहुत है। गणित के नये ग्रन्थो में गणित लाघव के लिये गणितो के स्थान मे कनिष्ठफल ही के रूप मे सब वस्तु को लिखते हैं। इसी लिये इस कनिष्ठफल के विशेष उपयोगी सिद्धान्तो को पूज्यपाद पिताजी ने इस ग्रन्थ मे समावेश कर दिया है।

यहां यह सूचित कर देना मैं उचित समझता हूँ कि वर्गप्रकृति के साधन मे भास्कर ने जिसका नाम कनिष्ठफल रक्खा है उससे और इस ग्रन्थ के कनिष्ठफल से कोई सम्बन्ध ही नहीं है।

विशेषतः कनिष्ठफल के सिद्धान्तो को निकालने वाले यूरप के लोग हैं। सन् १६९३ ई० मे इसकी चर्चा सब से पहिले लाइबनिट्ज (Leibnitz) ने की। फिर सन् १७५० ई० मे क्रामर (Cramar) ने इसके पदो के धन, ऋण का ज्ञान किया (१६९ वा प्रक्रम देखो) और १८ वीं शताब्दि के उत्तरार्ध में बेजू (Bezout), लाप्लास (Laplace), वाण्डरमाण्डे (Vandermonde) और लाग्रांज (Lagrange) भी इस विषय की उन्नति करते ही गए। १९ वी शताब्दि में गाउस (Gauss) और कोशी (Cauchy) ने

इसको परमावधि तक पहुँचा दिए। इसका डिटर्मिनेन्ट्स Determinants यह नाम भी कोशी ही ने रक्खा है। पीछे से सन् १८४१ ई० में जैकोबी (Jacobi) ने इसके सब सिद्धान्तों को संग्रह कर सब के उपकारार्थ क्रेल के मासिक पत्र Crelle's Journal में छपवा दिया।

उपसंहार

समीकरण-मीमांसा ग्रन्थ के इस स्वरूप में प्रकट होने का सारा सुयश श्रीमान् माननीय सर आर बर्न (Sir R Burn C.S.I., I.C.S.) महोदय को है। क्योंकि आप ही की कृपा तथा सदुद्योग से इस ग्रन्थ की छपाई के निमित्त आंके हुए सम्पूर्ण व्यय (२५००) रुपयों में से आधा व्यय ऐसे मितव्ययता के समय में भी संयुक्त प्रदेश की न्यायशीला गवर्नमेन्ट ने देकर गुणग्राहकता का आदरणीय उदाहरण दिखलाई है। साथ ही साथ शेष आधे व्यय को लगा इस ग्रन्थ को छपा कर काशी की विज्ञानपरिषत्ने हिन्दी साहित्य की सच्ची सेवा का प्रशंसनीय परिचय दिया है।

स्वर्गवासी पूज्यपाद पिताजी की कीर्तिलतिका के सुन्दर विषय सुगन्धयुत इस ग्रन्थ-पुष्प के प्रकाशन में जिन जिन महानुभावों ने जिस जिस प्रकार की सहायता की है उन सभी को मेरा हार्दिक धन्यवाद है।

कहुँ अल्प मेरी बुद्धि वश वा अमित नैनहि दोष सों।
यहि ग्रन्थ सम्पादन त्रुटित कितहुँ रहि हैं नाहि अरं पसों॥
करिलैं ग्रहण गुण सुजन केवल तिन्हें अवगुण छोड़ि के।
पदमाकरहु बुध हंस सों जिमि [illegible] पर लें छोड़ि के॥

खजुरी, बनारस।

पद्माकर द्विवेदी।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते

समीकरण-मीमांसा

जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः
सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः।
तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय
वदति विविधभेदान् बीजजातानखेदान्॥

१—उपयोगी गणित

प्रक्रम १—अव्यक्त राशि। जैसे २, २५, २५६, २५६७ इत्यादि को व्यक्ताङ्क, संख्या वा राशि कहते हैं उसी प्रकार य, $य^2$, $य^2+क^2$, $य^2+य\,र+र^2$ इत्यादि को बीजराशि वा अव्यक्तराशि कहते हैं।

२—फल। किसी अव्यक्तराशि को उन अव्यक्तों का फल कहते हैं जो उस अव्यक्तराशि में रहते हैं।

जैसे $क\,य^2+ख\,य+ग$ इस अव्यक्तराशि में केवल य अव्यक्त है; इसलिये इसे य का फल कहेंगे और इस फल को लाघव से फ (य) से प्रकट करते हैं अर्थात्

$फ(य)=क\,य^2+ख\,य+ग$।

इसी प्रकार $क\,य^2+ख\,य^2\,र+ग\,य\,र^2+घ\,र^2+च$ इस अव्यक्तराशि में दो अव्यक्त हैं; इसलिये यह य और र का फल है।

लाघव से उपर्युक्त राशि के लिये फ (य, र) लिखते हैं।

इसी प्रकार तीन, चार इत्यादि अव्यक्तराशिविशिष्ट अव्यक्तराशि में भी समझना चाहिए।

सर्वत्र अव्यक्तराशि में अव्यक्त को छोड़ और जो क, ख, ग इत्यादि अक्षर रहते हैं उन सब को व्यक्त समझना चाहिए।

अव्यक्तराशि के भिन्न भिन्न फलों को फ, फा, फि, फी इत्यादि अक्षरों से प्रकाश करते हैं, जैसे फा (य) से समझना चाहिए कि यह य का एक फल है जो कि फ (य) इस य के फल से भिन्न है।

३—किसी अव्यक्तराशि को ऐसा लिख सकते हैं जिस में प्रत्येक पद में किसी एक अव्यक्त का घात उत्तरोत्तर एक एक घटता वा बढ़ता रहे, जैसे

$कय^{४} + खय^{२} + ग$ इस राशि को

$कय^{४} + ० \times य^{३} + खय^{२} + ० \times य + ग$

ऐसा लिख सकते हैं यहाँ शून्य गुणकों के पूर्व जो धन चिन्ह लिखे हैं उनके स्थान में ऋण चिन्ह रख देने से भी अव्यक्तराशि में भेद न होगा; परन्तु ऐसे शून्य गुणकों के पूर्व प्रायः धन चिन्ह ही लिखते हैं।

४—पूर्णफल, पूर्णसमीकरण—जिस अव्यक्तराशि में प्रधान अव्यक्त के घात उत्तरोत्तर एक एक घटते वा बढ़ते रहते हैं उसे अव्यक्त का पूर्णफल कहते हैं, जैसे

$कय^{५} + खय^{४} + गय^{३} + घय^{२} + चय + ज$ इस अव्यक्तराशि को य का पूर्णफल कहेंगे।

इस पूर्णफल से बने हुए फ (य) = ० इस समीकरण को पूरा या पूर्णसमीकरण कहते हैं।

५—बीजगणित से जानते हो कि गुण्य अव्यक्तराशि और गुणक अव्यक्तराशि में एक ही अव्यक्त के घात उत्तरोत्तर एक एक घटते वा बढ़ते रहें इस क्रम से सब पदों का न्यास कर तब गुणन किया जाता है. जैसे

गुण्य $= ५य^{४} + ४य^{३} + ३य^{२} + २य + १$

गुणक $= २य^{२} + ३य + ४$

$$१०य^{६} + ८य^{५} + ६य^{४} + ४य^{३} + २य^{२}$$
$$+ १५य^{५} + १२य^{४} + ९य^{३} + ६य^{२} + ३य$$
$$+ २०य^{४} + १६य^{३} + १२य^{२} + ८य + ४$$

गुणनफल $= १०य^{६} + २३य^{५} + ३८य^{४} + २९य^{३} + २०य^{२} + ११य + ४$

देखो यहाँ यह तो स्पष्ट ही है कि गुणनफल में गुण्य, गुणक के सब से बड़े घात के योग तुल्य घात प्रथम पद में है और एक एक उतरते हुए और पदों में हैं। इसलिये गुण्य, गुणक राशि के चिन्ह समेत केवल गुणकाङ्कों को लिखने से लाघव से गुणनफल बहुत थोड़े ही स्थान में उत्पन्न हो सकता है।

जैसे केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्कों के लेने से

गुण्य $= +५ +४ +३ +२ +१$

गुणक $= +२ +३ +४$

+१० + ८ + ६ + ४ + २
+१५ +१२ + ९ + ६ + ३
+२० +१६ +१२ + ८ +४

गुणनफल = +१० +२३ +३८ +२९ +२० +११ +४

इस में य का घात पूर्व युक्ति से लगा देने से

गुणनफल $= १०य^{६} + २३य^{५} + ३८य^{४} + २९य^{३} + २०य^{२} + ११य + ४$

इसी प्रकार $२य^{४} - य^{२} + २$, $य^{३} - ३य + १$ इस गुण्य, गुणक को प्रक्रम ३ से घात क्रम से लिखने से

गुण्य $= २य^{४} + ०य^{३} - य^{२} + ०य + २$

गुणक $= य^{३} + ०य^{२} - ३य + १$

केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्क लेने से

गुण्य = +२ +० −१ +० +२

गुणक = +१ +० −३ +१

+२ +० −१ +० +२
+० +० −० +० +०
−६ −० +३ −० −६
+२ +० −१ +० +२

+२ +० −७ +२ +५ −१ −६ +२

∴ गुणनफल $= २य^{७} + ०य^{६} - ७य^{५} + २य^{४} + ५य^{३} - य^{२} - ६य + २$

$= २य^{७} - ७य^{५} + २य^{४} + ५य^{३} - य^{२} - ६य + २$ ।

इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जानना चाहिए।

६—भाज्य और भाजक को भी पूर्व युक्ति से घातक्रम में रखने से फिर चिन्ह सहित उनके गुणकाङ्कों पर से लाघव से लब्धि निकलती है, जैसे

भाज्य $= ८य^३ - २७$

भाजक $= २य - ३$

यहाँ भाजक में तो अव्यक्त के घातक्रम ही से पद हैं, केवल भाज्य में पदों को घातक्रम से लिखने से

भाज्य $= ८य^३ + ०य^२ + ०य - २७$ । भाजक $= २य - ३$

केवल चिन्ह समेत गुणकाङ्कों को लेने से

```
+२ - ३ | +८ + ० + ० - २७ | +४ + ६ + ९
       | +८ - १२
       ----------------
            +१२ + ० - २७
            +१२ + १८
            ------------
                 +१८ - २७
                 +१८ - २७
                 --------
```

भाज्य और भाजक के सब से बड़े घातों के अन्तर तुल्य अव्यक्त के घात को लेकर ऊपर लब्धि के अङ्कों में यथाक्रम लगा देने से

लब्धि $= ४य^२ + ६य + ९$ ।

इसी प्रकार और उदाहरणों मे भी जान लेना चाहिए ।

यहां यदि शेष बचता तो अन्त के शेष में अव्यक्त का शून्य घात, उपान्तिम में एक घात इत्यादि लगाकर ठीक शेष बना लिया जाता ।

७—अकरणीगत अभिन्नफल—जिस अव्यक्तराशि में अव्यक्त के सब घात अभिन्न और धन हों तो उसे अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल कहते हैं, जैसे यदि

$$प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + प_3 य^{न-3} + \cdots + प_न$$

इस अव्यक्तराशि में न धन और अभिन्न हो तो इसे अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल कहेंगे। यहां

$$फ(य) = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + प_3 य^{न-3} + \cdots + प_न$$

इस में यदि य=अ तो

$$फ(अ) = प_0 अ^न + प_1 अ^{न-1} + प_2 अ^{न-2} + \cdots + प_न$$

नीचे लिखी हुई क्रिया से फ (य) का मान लाघव से जान सकते हो, जैसे मानलो कि

$$फ(अ) = प_0 अ^3 + प_1 अ^2 + प_2 अ + प_3$$

यहाँ पहले $प_0 अ$ इसका मान निकालो

इसमे $प_1$ जोड़ने से $प_0 अ + प_1$ हुआ

इसे अ से गुण देने से $प_0 अ^2 + प_1 अ$ हुआ

इसमें $प_2$ जोड़ देने से $प_0 अ^2 + प_1 अ + प_2$ हुआ

इसे अ से गुण देने से $प_0 अ^3 + प_1 अ^2 + प_2 अ$ हुआ

इसमें $प_3$ जोड़ देने से $प_0 अ^3 + प_1 अ^2 + प_2 अ + प^3$ हुआ जो कि फ (अ) के समान है।

इस प्रकार किसी अव्यक्तराशि में यदि अव्यक्त के स्थान में किसी व्यक्ताङ्क का उत्थापन देना हो तो लाघव से मान आ सकता है।

इस क्रिया को न्यास सहित नीचे लिखे हुए प्रकार से करते हैं।

$$\begin{array}{cccc}
+प_0 & +प_1 & +प_2 & +प_3 \\
 & प_0 अ & प_0 अ^2 + प_1 अ & प_0 अ^3 + प_1 अ^2 + प_2 अ \\
\hline
 & प_0 अ + प_1, & प_0 अ^2 + प_1 अ + प_2, & प_0 अ^3 + प_1 अ^2 + प_2 अ + प_3
\end{array}$$

पहली पंक्ति में चिन्ह समेत घातक्रम से जो पद हैं वे उनके गुणकाङ्क हैं। पहले गुणकाङ्क को अव्यक्त के व्यक्ताङ्क अ से गुण दूसरे गुणकाङ्क में जोड़ दिया है। इस जोड़े हुए फल को अ से गुण तीसरे गुणक में जोड़ दिया है, फिर इस जोड़े हुए फल को अ से गुण चौथे गुणकाङ्क में जोड़ दिया है, इस प्रकार अन्त में फ (अ) का मान बड़े लाघव से निकल आया है।

जैसे २य४—३य३—४य+५ इसमें यदि य=२ तो इसका क्या मान होगा यह जानना हो तो ऊपर के प्रकार से अव्यक्त-राशि के पदों को घातक्रम से रखने से

+२	−३	+०	−४	+५
	+४	+२	×४	+०
	+१	+२	+०	+५

इस लिये अव्यक्तराशि का मान ५ हुआ।

८—अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) यह य के स्थान में अ का उत्थापन देने से शून्य हो जाय अर्थात् यदि फ (अ) =० तो फ (य) यह य−अ इससे अवश्य निःशेष होगा। कल्पना करो कि फ (य) में बीजगणित की साधारण रीति से य−अ का भाग देने से लब्धि ल और यदि संभव हो तो शेष शे है तो

फ (य) = ल (य−अ) + शे यह एक सरूप समीकरण होगा; इसमें स्पष्ट है कि ल भी अव्यक्त का कोई अकरणीगत अभिन्नफल होगा। इसमें य के स्थान में अ का उत्थापन देने से यह अनन्त के तुल्य न होगा; इसलिये ऊपर के सरूप समीकरण में य=अ मानने से

$फ (अ) = ० = ल (अ - अ) + शे = शे$

इसलिये शेष का मान शून्य होने से $फ (य)$, य से निःशेष होता है।

अथवा जब

$$फ (य) = प_० य^{न} + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_न$$

और

$$फ (अ) = ० = प_० अ^{न} + प_१ अ^{न-१} प_२ अ^{न-२} + \cdots + प^{न}$$

इसलिये

$फ (य) - फ (अ) = फ (य) = प_० (य^{न} - अ^{न}) + [प_१ (य^{न-१} - अ^{न-१}) + \cdots\cdots प_{न-१} (य - अ)$ यहाँ बीजगणित से स्पष्ट है कि $य^{न} - अ^{न}$, $य^{न-१} - अ^{न-१}$, इत्यादि सब $य - अ$ इससे निःशेष होते हैं इसलिये $फ (य)$ भी $य - अ$ से निःशेष होगा।

बीजगणित की साधारण रीति से यहाँ

$$लब्धि = प_० (य^{न-१} + अय^{न-२} + अ^{२}य^{न-४} + \cdots + अ^{न-२}य + अ^{न-१}) ३$$

$$+ प_१ (य^{न-२} + अय^{न-२} + अ^{२}य^{न-४} + \cdots + अ^{न-३}य + अ^{न-१})$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ प_{न-२} (य + अ)$$

$$+ प_{न-१}$$

समान घातों के गुणकों को इकट्ठा करने से

$$लब्धि = प_० य^{न-१} + (प_० अ + प_१) य^{न-२}$$

$$+(प_0 अ^2 + प_1 अ + प_2) य^{न-3} + \cdots$$

$$+ प_0 अ^{न-1} + प_1 अ^{न-2} + प_2 अ^{न-3} + प_{न-1}$$

$$= ब_0 य^{न-1} + ब_1 य^{न-2} + ब_2 य^{न-3} + \cdots + ब_{न-2} य + ब_{न-1}$$

यदि $ब_0 = प_0$, $ब_1 = प_0 अ + प_1$, $ब_2 = प_0 अ^2 + प_1 अ + प_2$,

अर्थात् उपर्युक्त श्रेढी के जिस संख्यक पद के गुणक को जानना हो तो उसके पिछले पद के गुणक को अ से गुण कर उसमें फ (य) के उसी संख्यक पद का गुणक जोड़ देने से अभीष्ट गुणक उत्पन्न हो जाता है। ये गुणक ७वें प्रक्रम से भी आ जाते हैं।

९—य के अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) में य − ग का भाग देने से मान लो कि लब्धि=ल और शेष=शे तो

फ (य)=ल (य − ग) + शे। इस सरूप समीकरण में यदि य=ग तो फ (ग)=शे, इस लिये यदि फ (य) में य − ग का भाग दिया जाय तो शेष=फ (ग) और लब्धि भी ८वें प्रक्रम से सहज में आ जायगी।

जैसे यदि $२य^४ - ३य^३ - ४य + ५$ इसमें यदि य − २ का भाग दिया तो लब्धि=$२य^३ + य^२ + २य + ०$ और शेष होगा (७वाँ प्रक्रम देखो)। अथवा यदि $२य - ३य^३ - ४य + ५$ भाज्य राशि में य − ३ का भाग दिया तो ७ वें प्रक्रम की युक्ति से

+२	+०	−३	+०	−४	+५
	+६	+१८	+४५	+१३५	+३९३
	+६	+१५	+४५	+१३१	+३९८

इसलिये लब्धि$=२य^४+६य^३+१५य^२+४५य+१३१$,

शे$=३६८$

१०—उत्पन्न फल—मान लो कि फ (य) एक अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल है।

$$\text{यदि}\qquad स=फ\,(य)$$

$$स'=फ\,(य+च)$$

$$\text{तो}\qquad स'-स=फ\,(य+च)-फ\,(य)$$

$$\text{और}\qquad \frac{स'-स}{च}=\frac{फ(य+च)-फ\,(य)}{च}$$

$$=आ+का\;च+खा\;च^२+\cdots\cdots$$

जहाँ च की अपेक्षा आ स्वतन्त्र है अर्थात् आ में च नहीं है तब आ को फ (य) का प्रथमोत्पन्न फल कहते हैं। इसे यदि फा (य) कहो तो फ (य) के स्थान में फा (य) को रखने से ऊपर की युक्ति से फा (य) का प्रथमोत्पन्न फल एक $आ_१$ उत्पन्न होगा। इसे फ (य) का द्वितीयोत्पन्न फल कहते हैं। इस प्रकार फ (य) का प्रथमोत्पन्न, द्वितीयोत्पन्न, तृतीयोत्पन्न इत्यादि यथेच्छ फल उत्पन्न कर सकते हो। इन्हें क्रम से $फ'(य)$, $फ''(य)$, $फ'''(य)$ $फ^४(य)$, $फ^५(य)$,.. $फ^न(य)$, इत्यादि सङ्केत से प्रकाश करते हैं।

११—कल्पना करो कि

$$फ\,(य)=अ_०+अ_१य+अ_२य^२+अ_३य^३+\cdots अ_नय^न\cdots\cdots(१)$$

जहाँ य का उत्तरोत्तर एक एक बढ़ा हुआ घात प्रत्येक पद में है। इसमें यदि $य=०$ तो $अ_०=फ(०)$ और $फ(य+च)=अ_०+$

$अ_१(य+च)+अ_२(य+च)^२+\cdots\cdots+अ_न(य+च)^न$ इसलिये

$फ(य+च)-फ(य)$

$$=अ_१[(य+च)-य]+अ_२[(य+च)^२-य^२]+$$

यहाँ र संख्यक पद$=अ_र[(य+च)^र-य^र]$

$$=अ_र[रय^{र-१}च+र\frac{(र-१)}{२!}य^{र-२}च^२$$

इसलिये $फ(य+च)-फ(य)$

$$=अ_१+२अ_२य+३अ_३य^२+\cdots\cdots नअ_न य^{न-१}$$

+ऐसे पद जिनमें च आता है

इस लिये १० वें प्रक्रम से

$फ'(य)=अ_१+२अ_२य+३अ_३य^२+\cdots\cdots नअ_नय^{न-१}$ जिसके देखने से $फ(य)$ से $फ'(य)$ का मान निकालने की सहज विधि यह उत्पन्न होती है कि $फ(य)$ के प्रत्येक पद को उसी पद में आए हुए य के घात से गुण दो और य के घात मे से एक घटा दो तो $फ'(य)$ का मान आ जायगा। इसी प्रकार $फ'(य)$ से $फ''(य)$ का मान, $फ''(य)$ से $फ'''(य)$ इत्यादि के मान जान सकते हो।

इसलिये उपर्युक्त विधि से

$$फ''(य)=२अ_२+३\cdot२अ_३य+४\cdot३अ_४य^२+\cdots\cdots$$

$$फ'''(य)=३\cdot२अ_३य+४\cdot३\cdot२अ_४य+\cdots\cdots$$

इनमें यदि य=० तो $फ'(०)=अ_१$, $फ'(०)=२अ_२$

$$फ'''(०)-३\cdot२\cdotअ_३,\cdots\cdots$$

इनका उत्थापन (१) में देने से

$$फ(य)=फ(०)+फ'(०)य+फ''(०)\frac{य^२}{१.२}+फ'''(०)\frac{य^३}{१.२.३}+\cdots$$

$$\cdots\cdots+फ^न(०)\frac{य^न}{१\cdots३\cdots न}+\cdots\cdots$$

इसमें यदि य के स्थानमें य+र का उत्थापन दो तो

$$फ(य+र)=फ(०)+फ'(०)य+फ\ (०)\frac{(य+र)^२}{१.२}$$

$$+फ''\frac{(य+र)^३}{१.२.३.}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=फ(०)+फ'(०)य+फ'(०)\frac{य^२}{१.२}+फ''(०)\frac{य^३}{१.२.३}+\cdots$$

$$+\left\{फ'(०)+फ''(०)य+\cdots\cdots+फ^न(०)\frac{य^{न-१}}{१.२\cdots न}\right\}र$$

$$+\left\{फ''(०)+फ'''(०)य+\cdots\cdots+फ^न(०)\frac{य^{न-१}}{(न-२)!}\right\}\frac{र^२}{१.२}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$फ(य)+फ'(य)र+फ''(य)\frac{र^२}{१.२}+\cdots\cdots\cdots+फ^न(य)\frac{र^न}{न!}$$

१२—अथवा नीचे लिखी हुई विधि के भी फ(य+र) का मान जान सकते हो।

कल्पना करो कि

$$फ(य)=प_०य^न+प_१य^{न-१}+प_२य^{न-२}+\cdots\cdots\cdots+प_न$$

इस में य, र के तुल्य वृद्धि प्राप्त करता है तो य के स्थान में य+र लिखने से

$$फ(य+र)=प_०(य+र)^न+प_१(य+र)^{न-१}+\cdots$$
$$+प_{न-१}(य+र)+प_न$$

इसके प्रत्येक पद को द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर और उपचय क्रम से र के तुल्य घातों के गुणकाङ्कों को इकट्ठा कर लिखने से

$$फ(य+र)=प_०य^न+प_१य^{न-१}+प_२य^{न-२}+\cdots+प_{न-१}य+प_न$$
$$+र[न प_०य^{न-१}+(न-१)प_१य^{न-२}$$
$$+(न-२)प_२य^{न-३}+\cdots प_{न-१}]$$
$$+\frac{र^२}{१\cdot२}[न(न-१)प_०य^{न-२}$$
$$+(न-१)(न-२)प_१य^{न-३}\cdots\cdots+२प_{न-२}]$$
$$+\frac{र^३}{१\cdot२\cdot३}[न(न-१)(न-२)प_०य^{न-३}+(न-१)$$
$$(न-२)(न-३)प_१य^{न-४}\cdots+३\cdot२प_{न-३}]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{र^न}{१\cdot२\cdot३\cdots न}[न(न-१)(न-२)(न-३)\cdots\cdots$$
$$३\cdot२\cdot१]प_०$$

इसमें प्रथम पंक्ति में तो स्पष्ट है कि फ (य) है और द्वितीय, तृतीय इत्यादि पंक्तिओं में क्रम से र, $\frac{र^2}{१·२}$ इत्यादि के गुणक ११वें प्रक्रम से फ′ (य), फ″ (य) इत्यादि सिद्ध हैं;

$$\text{इसलिये } फ(य+र) = फ(य) + र\, फ'(य) + \frac{र^2}{१·२} फ''(य) + \ldots\ldots + \frac{र^न}{न\,!} फ^न(य)$$

जैसे यदि $फ(य) = प_०य^४ + प_१य^३ + प_२य^२ + प_३य + प_४$

तो ११वें प्रक्रम से

$$फ'(य) = ४प_०\,य^३ + ३प_१य^२ + २प_२य + प_३$$

$$फ''(य) = ३·४प_०य^२ + २·३प_१य + २प_२$$

$$फ'''(य) = २·३·४प_०य + २\,३प_१$$

$$फ^४(य) = २·३·४प_०$$

इसलिये

$$फ(य+र) = फ(य) + र\left\{४प_०य^३ + ३प_१य^२ + २प_२य + प_३\right\}$$
$$+ \frac{र^२}{१·२}\left\{३\,४प_०य^२ + २·३प_१य + २प_२\right\}$$
$$+ \frac{र^३}{१·२\,३}\left\{२·३\,४प_०य + २·३\,प_१\right\}$$
$$+ \frac{र^४}{१·२·३·४}\left\{२·३\,४प_०\right\}$$

और यदि $फ(य) = प\,(य+ग)^न$

तो ११व प्रक्रम से

$$फ'(य) = न प (य + ग)^{न-१}$$

$$फ''(य) = न (न-१) प (य + ग)^{न-२}$$

$$फ'''(य) = न (न-१) (न-२) प (य + ग)^{न-३}$$

इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए।

फिर इन पर से फ (य + र) का मान पूर्व विधि से निकाल सकते हो।

$$फ (य + र) = फ (य) + र फ' (य) + \frac{र^2}{१ \cdot २} फ'' (य) + \cdots\cdots$$

इस पर से ११वें प्रक्रम की युक्ति से

$$फ'(य + र) = फ'(य) + र फ''(य) + \frac{र^2}{१ \cdot २} फ'''(य) + \cdots\cdots + \frac{र^{न-१}}{(न-१)!} फ^{न}(य)$$

$$फ''(य + र) = फ''(य) + र फ'''(य) + \frac{र^2}{१ \cdot २} फ^{४}(य) + \cdots\cdots + \frac{र^{न-२}}{(न-२)!} फ^{न}(य)$$

इत्यादि सिद्ध कर सकते हो।

१३—र के अपचय घात क्रम से फ (य + र) का मान

फ (य + र) का मान जो १२वें प्रक्रम में श्रेढी में आया है उसमें यदि र को अपचय घातक्रम से लिखें तो

$$\text{फ}(य+र) = प_० र^न + (प_१ + नप_० य) र^{न-१}$$

$$+ \left\{ प_२ + (न-१) प_१ य + \frac{न(न-१)}{१\cdot२} प_० य^२ \right\} र^{न-२}$$

$$+ \left\{ प_३ + (न-२) प_२ य + \frac{(न-१)(न-२)}{१\cdot२} प_१ य^२ \right.$$

$$\left. + \frac{न(न-१)(न-२)}{१\cdot२\cdot३} प_० य^३ \right\} र^{न-३}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{ प_त + (न-त+१) प_{त-१} य + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + \frac{न(न-१)\cdots\cdots(न-त+१)}{त!} प_० य^त \right\} र^{न-त}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \text{फ}(य)$$

ऐसा सिद्ध होता है।

१४—कल्पना करो कि फ (य) अव्यक्त का एक अकरणीगत अभिन्नफल है जो $प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_न$ इसके तुल्य है। इसमें य का एक ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके कारण श्रेढी का कोई एक पद अपने आगे के सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है अथवा य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई पद अपने पिछले सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है।

मान लो कि कोई त संख्यक पद $प_{त-१}य^{न-त-१}$ है जिसमें $प_{त-१}$ शून्य नहीं है और इसके आगे के जो $प_{त}य^{न-त}$, $प_{त-१}य^{न-त-१}$ इत्यादि पद हैं उनमें सब से बड़ा संख्यात्मक गुणक व है तो स्पष्ट है कि आगे के सब पदों का योग

$$व (य^{न-त} + य^{न-त-१} + \cdots\cdots + य + १) = व \frac{य^{न-त+१} - १}{य - १}$$

इससे छोटा होगा। त संख्यक पद में इससे भाग देने से

$$लब्धि = \frac{प_{त-१}\,(य-१)\,य^{न-त+१}}{व\,(य^{न-त+१}-१)} = \frac{प_{त-१}\,(य-१)}{व - व\,य^{-(न-त-१)}}$$

इसमें स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढता जायगा त्यों त्यों अंश बढ़ता और हर व के तुल्य होता जायगा। इसलिये य का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके कारण लब्धि चाहे जितनी बड़ी हो सकती है। इस पर से पहली बात सिद्ध हुई।

दूसरी के लिये कल्पना करो कि $य = \frac{१}{र}$ तो

$$फ(य) = र^{-न} (प_{०} + प_{१}र + प_{२}र^{२} + \cdots प_{न}र^{न})$$

अब ऊपर की युक्ति से $प_{०} + प_{१}र + प_{२}र^{२} + \cdots$ इसमें र का ऐसा बड़ा वा य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई पद अपने पिछले सब पदों के योग से चाहे जै गुना बड़ा हो सकता है। अर्थात्

$$प_{०} + प_{१}र + प_{२}र^{२} + \cdots प_{त-१}र^{त-१} < प_{त}र^{त}$$

$$वा \quad प_{०}र^{-न} + प_{१}र^{१-न} + प_{२}र^{२-न} + \cdots + प_{त-१}र^{त-१-न} < प_{त}र^{त-न}$$

$$वा\; प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots प_{त-१}य^{न-त+१} < प_{त}य^{न-त}.$$

अर्थात् य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके कारण कोई $प_त य^{न-त}$ पद अपने पिछले सब पदों के योग से बड़ा हो सकता है, यह सिद्ध हुआ। यह सिद्धान्त बहुत ही उपयोगी है। इसे अच्छी तरह से अभ्यास करना चाहिए।

१५—असम्भव संख्या और मध्यगुणक— $अ + \sqrt{क - १}$ इसे असम्भव संख्या कहते हैं जिसमें अ और क सम्भाव्य संख्या है। जहाँ कहीं इस ग्रन्थ में असम्भव संख्या आवे वहाँ सर्वत्र $अ + क\sqrt{-१}$ यही समझना चाहिए।

बीजगणित के जिन नियमों से सम्भव संख्या के जोड़, बाकी, गुणा और भाग किए जाते हैं उन्हीं नियमों से असम्भव संख्याओं के जोड़, बाकी इत्यादि किए जाते हैं। सम्भव और असम्भव संख्याओं मे प्रयोग किए जाने पर ये परिकर्म केवल सम्भव और असम्भव संख्याओं को उत्पन्न करते हैं और यही बात बीजगणित के मूलानयन में भी सत्य ठहरती है।

$अ^२ + क^२$ इसके धनात्मक मूल को $अ + क\sqrt{-१}$ और $अ - क\sqrt{-१}$ इन असम्भवों में से प्रत्येक का मध्यगुणक कहते हैं।

$अ + क\sqrt{-१}$ और $अ' + क'\sqrt{-१}$ का घात बीजगणित की रीति से

$अ \cdot अ' - क \cdot क' + (अ क' + अ' क)\sqrt{-१}$ है इसलिये इस असम्भव का मध्यगुणक पूर्व परिभाषा से $(अ अ' - क क')^२ + (अ क' + अ' क)^२ = (अ^२ + क^२)(अ'^२ + क'^२)$ इसका धनात्मक मूल होगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि दो असम्भवों

के घात तुल्य असम्भव का मध्यगुणक पूर्व दोनों असम्भवों के मध्यगुणकों के घात तुल्य होता है।

$अ + क\sqrt{-१}$ इस में यदि साथ ही अ=० और क=० तो असम्भव को शून्य के तुल्य कहते हैं। ऐसी दशा में असम्भव का मध्यगुणक भी शून्य के तुल्य होता है।

यदि दो असम्भवों का घात शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि घात रूप असम्भव का मध्यगुणक भी शून्य के तुल्य होगा और पूर्व असम्भवों में से एक का मध्यगुणक भी अवश्य शून्य के तुल्य होगा। इसी प्रकार अनेक असम्भवों के घात रूप असम्भव का मध्यगुणक यदि शून्य हो अर्थात् नष्ट हो तो उन असम्भवों में से कम से कम एक का मध्यगुणक अवश्य शून्य के समान होगा।

१६—असम्भव का मूल—बीजगणित से स्पष्ट है कि यदि म धन और अभिन्न संख्या हो तो

$$(\sqrt{-१})^{४म+१} = +\sqrt{-१} \text{ और } (\sqrt{-१})^{४म-१} = -\sqrt{-१}$$

$$\text{और } (अ + क\sqrt{-१})^{२} = \sqrt{-१} \text{ जहां } अ = क = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{इसलिये } अ + क\sqrt{-१} = \pm\sqrt{\sqrt{-१}}$$

$$\text{और } (अ' + क'\sqrt{-१})^{२} = अ + क\sqrt{-१}$$

$$\text{जहाँ } अ'^{२} - क'^{२} = अ,\ २अ'क' = क।$$

$$(अ' + क'\sqrt{-१}) = \sqrt{अ + क\sqrt{-१}}$$

इस प्रकार से कह सकते हो कि किसी असम्भव का मूल भी एक असम्भव ही होता है।

भास्कराचार्य ने भी अपने बीजगणित में लिखा है कि "न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्" अर्थात् ऋण संख्या का मूल सम्भव संख्या नहीं हो सकती क्योंकि ऋण संख्या किसी सम्भव संख्या का वर्ग नहीं है। इसी प्रकार यदि न अभिन्न और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से स्पष्ट है कि $(अ+क\sqrt{-१})^{न}$ इसमें बहुत से पद सम्भव और बहुत से ऐसे होंगे जिनके गुणक $\sqrt{-१}$ होंगे। इसलिये सम्भव और जिनके गुणक $\sqrt{-१}$ हैं उनको अलग अलग इकट्ठाँ करने से $(अ+क\sqrt{-१})^{न} = अ' + क'\sqrt{-१}$ ऐसा होगा। इसमें यदि क के स्थान में $-क$ का उत्थापन दें तो स्पष्ट है कि जिन जिन पदों का गुणक $\sqrt{-१}$ है उनके धन, ऋण का व्यत्यास हो जायगा इसलिये $(अ-क\sqrt{-१})^{न} = अ' - क'\sqrt{-१}$ ऐसा होगा।

१७—च के परिवर्त्तन से फ (ग+च) के मान का परिवर्त्तन। पूर्व सिद्ध है कि

$$फ(य+र) = फ(य) + र\,फ'(य) + \frac{र^{२}}{१.२}\,फ''(य) + \cdots\cdots$$

इसमें यदि य = ग और र = च तो

$$फ(ग+च) = फ(ग) + च\,फ'(ग) + \frac{च^{२}}{१.२}\,फ''(ग)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{च^{न}}{न!}फ^{न}(ग)$$

इसमें च का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश

$$\text{च फ}'(\text{ग}); \frac{\text{च}^2}{1\cdot2}\text{फ}''(\text{ग}), \frac{\text{च}^3}{1\cdot2\cdot3}\text{फ}'''(\text{ग}), \ldots\ldots$$ इस श्रेणी

का वह प्रथम पद जो शून्य के तुल्य न हो और सब पदों के योग से यथेच्छ बड़ा हो सकता है और स्वयं बहुत ही छोटा हो सकता है (१४ वाँ प्रक्रम देखो)।

इस लिये च के परिवर्तन से फ(ग + च) को फ(ग) के चाहे जितना आसन्न बना सकते हैं। इससे स्पष्ट है कि ज्यौं ज्यौं ग बढ़ता है त्यौं त्यौं फ (ग) लगातार बदलता है। ध्यान देने की बात है कि यहाँ यह नहीं सिद्ध किया गया है कि ज्यौं ज्यौं ग बढ़ता है त्यौं त्यौं फ (ग) भी बढ़ता है। फ (ग) चाहे बढ़ वा घट सकता है वा कभी बढ़ और कभी घट सकता है। उपरोक्त बातों से केवल यही सिद्ध होता है कि फ (ग) का मान अवच्छिन्न घट या बढ़ नहीं सकता। इसी प्रकार च का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिसके वश च·फ (ग), $\frac{\text{च}^2}{1\cdot2}$

$$\text{फ}''(\text{ग}), \frac{\text{च}^3}{1\cdot2\cdot3}\text{फ}'''(\text{ग}), \ldots\ldots \frac{\text{च}^{\text{न}}}{\text{न}!}\text{फ}^{\text{न}}(\text{ग})$$ इस श्रेणी का वह

अन्तिम पद जो शून्य के तुल्य न हो, और सब पिछले पदों के योग से बहुत बड़ा और स्वयं भी बहुत बड़ा हो सकता है।

इसलिये च के परिवर्तन से फ (ग + च) का मान फ (ग) से बहुत बड़ा हो सकता है। इस पर से सिद्ध होता है कि च के परिवर्तन से फ (ग + च) का मान चाहे जितना घटा बढ़ा सकते हैं।

१८—समीकरण का मूल—यदि य के स्थान में अ का उत्थापन देने से फ (य) =० हो तो फ (य) =० इस समीकरण का एक मूल अ कहा जाता है।

२ प्रक्रम से फ (य) नाना प्रकार का हो सकता है परन्तु अभी इस ग्रन्थ में जब तक इसके विरुद्ध बात न कही जाय तब तक फ (य) से सर्वदा अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्न फल समझना चाहिए (७वाँ प्रक्रम देखो) और लाघव के लिये प्रायः फ (य) में य के सब से बड़े घातका जो गुणक हो उससे और घातों के गुणकों में भाग देकर लब्धियों को और घातों का गुणक जानना चाहिए।

जैसे यदि $फ (य) = 0 = अय^{न} + कय^{न-१} + खय^{न-२} + \cdots\cdots$

तो अ का भाग देने से

$$य^{न} + \frac{क}{अ} य^{न-१} + \frac{ख}{अ} य^{न-२} + \cdots\cdots = य^{न} + अ_{१} य^{न-१} + अ_{२} य^{न-२} + \cdots\cdots = 0$$

ऐसा सीधा स्वरूप बना लेना चाहिए। यहाँ $\frac{क}{अ} = अ_{१}$, $\frac{ख}{अ} = अ_{२}$ इत्यादि।

१९—फ (य) में य के स्थान में अ और क का उत्थापन देने से यदि फ (अ) और फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हों तो अ और क के बीच य का कम से कम एक ऐसा मान अवश्य होगा जिसके वश फ (य) =० होगा। क्योंकि यदि अ से क को बड़ा मानो तो अ से आगे ज्यों ज्यों य का मान बढ़ाते जायँगे त्यों त्यों लगातार फ (य) बदलता जायगा। इस

लिये फ (अ) और फ (क) के अन्तर्गत सब मानों को फ (य) ग्रहण करता जायगा क्योंकि फ (अ) और फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हैं। इसलिये अ के आगे और क के पीछे य का कम से कम एक मान अवश्य ऐसा होगा जिसके वश फ (य) =० हो।

जब अ से आगे य को बढ़ाते जाओगे तब संभव है कि फ (य) कुछ दूर तक घटता वा बढ़ता जावे फिर आगे शून्य होकर बढ़ता वा घटता जावे आगे फिर भी घटता वा बढ़ता कहीं शून्य होकर फिर आगे और घटता वा बढ़ता जावे। इसलिये यह नहीं कह सकते कि अ और क के बीच कोई य का एक ही मान ऐसा होगा जिसके वश से फ (य)=० हो और यह भी नहीं कह सकते कि यदि फ (अ) और फ (क) एक ही चिन्ह अर्थात् एक ही जाति के हों तो अ और क के बीच य का मान ऐसा नहीं हो सकता जिसके वश से फ (य)=० हो।

जैसे यदि फ (य)=$य^३$ −१६ $य^२$ + १०८ य − १८०

इसमें यदि य=१ तो फ (१)=−६०

और यदि य=११ तो फ (११)=+४०

यहां फ (१) और फ (११) विरुद्ध चिन्ह के अर्थात् विजातीय है और १ और ११ के बीच ३, ६, १० य के ऐसे तीन मान में फ (य) शून्य के तुल्य होता है। इसलिये यह नहीं कह सकते कि य के एक ही मान में फ (य)=० होगा।

इसी प्रकार य = ४ और य = ११ में फ (य) = + १२ और फ (य)=+४० ये दोनों एक ही जाति के हैं परन्तु ४ और ११ के बीच य के ६ और १० ऐसे दो मान हैं जिनके वश फ (य)

शून्य के समान होता है। इसलिये यहाँ पर यही सिद्धान्त कर सकते हैं कि फ (य)=० इस समीकरण में य के स्थान में अ, क का उत्पादन देने से यदि फ (अ), फ (क) विरुद्ध चिन्ह के हों तो फ (य)=० का कम से कम एक मूल अवश्य अ और क के बीच में होगा।

२०—यदि फ (य)=० इस समीकरण में फ (य), य − अ इससे भाग देने में निःशेष हो जाय तो य का एक मान अ होगा।

मान लो कि भाग देने से लब्धि=ल तो फ (य)=ल (य − अ)

इसमें यदि य=अ तो फ (य)=फ (अ)=ल (अ − अ)=०

इसलिये य का एक मान १८वें प्रक्रम से अ हुआ।

यहां स्पष्ट है कि ल, अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल है। इसलिये इसमें अ का उत्थापन देने से फल अनन्त के तुल्य नहीं हो सकता क्योंकि अ एक ऐसी संख्या है जो अनन्त के तुल्य नहीं मानी गई है।

२१—जिस विषमघात समीकरण में जो कि फ (य)=० ऐसा है और जहाँ य के सब से बड़े घात के पद के गुणक से भाग देकर समीकरण को छोटा कर लिया है वहाँ यदि अन्तिम पद जिसमें य का कोई घात नहीं है वह धन हो तो फ (य)=० इसका एक मूल अवश्य ऋण होगा और यदि ऋण हो तो धन होगा।

जैसे फ (य)=$य^{न} + प_{१} य^{न-१} + \dots\dots + प_{न}$ इसमें मानो कि न विषम है। इसलिये फ (य)=$य^{न} + प_{१} य^{न-१} + \dots\dots\dots + प_{न}$

इसमें १४वें प्रक्रम से य का ऐसा बड़ा मान मान सकते हैं जिससे $य^न$ यह और सब पदों के योग से बड़ा हो। इसलिये य के एक ऋण और एक धन मान में फ (य) के जो दो मान होंगे वे विरुद्ध चिन्ह के होंगे और फ (य)=० इसका कम से कम एक मूल $य_१$ सम्भाव्य संख्या के तुल्य उन य के मानों के बीच होगा (१६वाँ प्रक्रम देखो)।

यहाँ स्पष्ट है कि यदि य=० तो फ (य)=$र_न$ इसलिये यदि $प_न$ यह धन हो तो $य_१$ ऋण और ऋण हो ता $य_१$ धन होगा।

२२—फ (य) $= ० = य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१} य + प_न$

इसमें यदि न सम हो और अन्तिम पद $प_न$ यह ऋण हो तो कम से कम य के दो सम्भाव्य मान आवेंगे जो परस्पर विरुद्ध चिन्ह के होंगे। क्योंकि यदि य = ० तो फ (य)=$प_न$ अर्थात् ऋण होगा और १४वें प्रक्रम से य का एक ऐसा मान हो सकता है जिससे $य^न$ और सब पदों के योग से बड़ा हो। इसलिये फ (य) का वही चिन्ह रहेगा जो $य^न$ का है परन्तु चाहे य का वह मान धन वा ऋण हो $य^न$ सर्वदा धन ही रहेगा क्योंकि न सम माना गया है। इसलिये य के शून्य और एक ऋण मान में वा शून्य और एक धन मान में फ (य) के जो दो मान होंगे वे विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये कम से कम य के एक ऋण और एक धन मान में फ (य) अवश्य शून्य के तुल्य होगा (१६वाँ प्रक्रम देखो)।

२३—$फ(य) = ० = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots\cdots प_त य^{न-}$
$+ \cdots\cdots प$

इसमें यदि आदिपद से लेकर $त+१$ पद तक प्रत्येक पद के गुणक $प_०, प_१$ इत्यादि एक चिन्ह के और अवशिष्ट पदों के प्रत्येक गुणक दूसरे चिन्ह के हों तो $फ(य) = ०$ इसका सम्भाव्य धन मूल एक ही होगा।

यहाँ २१ वें और २२ वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि कम से कम य का एक सम्भाव्य धन मान अवश्य होगा। अब इतना और दिखा देना है कि वही एक धन मान होगा दूसरा धन मान नहीं हो सकता।

मान लो कि $प_०, प_१, प_२, \ldots\ldots प_त$ सब धन हैं और

$प_{त+१} = -प'_{त+१}, प_{न+२} = -प'_{त+२}, \ldots\ldots प_न = -प'_न$ तो

$फ(य) = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + \ldots\ldots + प_त य^{न-त} \ldots + प^न$

$$= य^{न-त} \left\{ \left(प_० य^त + प_१ य^{त-१} + \cdots + प_त\right) - \left(\frac{प'_{त+१}}{य} + \frac{प'_{त+२}}{य^२} + \cdots\cdots + \frac{प'_न}{य^{न-त}}\right) \right\}$$

इसमें स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों य बढ़ेगा त्यों त्यों धनात्मक खण्ड बढ़ेगा और ऋणात्मक खण्ड घटेगा; इसलिये जिस य के एक धन मान में दोनों खण्ड तुल्य होकर $फ(य)$ को शून्य के तुल्य बनावेंगे उससे ज्यों ज्यों अधिक य होता जायगा त्य त्यों धनात्मक खण्ड अधिक और उससे अल्प ऋणात्मक खण्ड

होता जायगा। इसलिये अब आगे य के किसी धन मान में ऐसा नहीं हो सकता कि दोनों खण्ड तुल्य होकर फिर फ (य) को शून्य के तुल्य बनावें। इसलिये फ (य) =० इसका एक ही धन मूल होगा। दूसरा धन मूल नहीं हो सकता।

यहाँ पर यह नहीं कहा जा सकता है कि ऐसी दशा में फ (य) =० का कोई ऋण मूल नहीं है क्योंकि ऊपर की युक्ति से इतना ही सिद्ध हुआ है कि ऐसे समीकरण में फ (य) =० का धन मूल एक ही आवेगा।

२४—एकवर्णसमीकरण के मूलों की संख्या अव्यक्त के सब से बड़े घात के तुल्य होती है।

मान लो कि $य - अ_1$, $य - अ_2$, $य - अ_3$,..... $य - अ_न$ ये न युग्म पद हैं, इनमें $अ_1$, $अ_2$ इत्यादि सम्भाव्य वा असम्भव संख्या य से स्वतन्त्र हैं अर्थात् इनमें य का कोई घात नहीं है तो बीजगणित की साधारण रीति से

$$(य - अ_1)(य - अ_2) = य^2 - (अ_1 + अ_2) य + अ_1 अ_2$$

$$(य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3) = य^3 - (अ_1 + अ_2 + अ_3) य^2 + (अ_1 अ_2 + अ_2 अ_3 + अ_1 अ_3) य - अ_1 अ_2 अ_3$$

$$(य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3)(य - अ_4) = य^4 - (अ_1 + अ_2 + अ_3 + अ_4) य^3$$
$$+ (अ_1 अ_2 + अ_1 अ_3 + अ_1 अ_4 + अ_2 अ_3 + अ_2 अ_4 + अ_3 अ_4) य^2$$
$$- (अ_1 अ_2 अ_3 + अ_1 अ_2 अ_4 + अ_1 अ_3 अ_4 + अ_2 अ_3 अ_4) य$$
$$+ अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$$

इस प्रकार से आगे भी गुणनफल को बढ़ाने से स्पष्ट होता है कि $य - अ_1$, $य - अ_2$ इत्यादि जितने खण्ड होते हैं उनके गुणनफल में प्रथम पद में उतना ही घात य का होता है और अन्य पदों में एक एक उतरता हुआ य का घात रहता है। इसलिये यदि

$फ(य) = 0 = य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$ ऐसा हो तो न तुल्य गुण्यगुणकरूप अवयव में इसका रूपान्तर कर सकते हैं अर्थात्

$$फ(य) = 0 = (य - अ_1)(य - अ_2) \cdots\cdots (य - अ_न)$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि $य = अ_1, अ_2, अ_3, \ldots\ldots अ_न$ तो

$फ(य) = 0$। इसलिये $अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_न$ इत्यादि $फ(य) = 0$ इस समीकरण के मूल हुए।

इससे सिद्ध होता है कि $फ(य) = 0$ इसमें य के सब से बड़े घात की जो संख्या हो उतने ही मूल आवेंगे जिसके वश से फ (य) शून्य के तुल्य होगा।

२५—प्रसिद्धार्थ—इस प्रक्रम में समीकरणों के विषय में कुछ प्रसिद्धार्थ लिखते हैं जो पिछले प्रक्रमों की युक्ति से बहुत ही स्पष्ट हैं।

(१) यदि फ (य) में प्रत्येक पद के गुणक धन हों तो $फ(य) = 0$ इसका धन मूल कोई नहीं होगा।

(२) यदि फ (य) में य के समघात के प्रत्येक पद के गुणक एक चिन्ह के और विषम घात के प्रत्येक पद के गुणक दूसरे चिन्ह के हों तो $फ(य) = 0$ इसका कोई मूल ऋण न होगा।

(३) फ (य) में यदि य के सम घात हों और प्रत्येक पद के गुणक अन्तिम पद जो य से स्वतन्त्र है लेकर एक ही चिन्ह के हों तो फ (य)=० इसका कोई सम्भाव्य मूल न होगा।

(४) फ (य) में यदि सब पदों में य का विषम घात हो और अन्तिम पद में य का एक घात रहे और सब पदों के गुणक एक ही चिन्ह के हों तो फ (य)=० इसका एक मूल शून्य होगा और बाकी सब मूल असम्भव संख्या में आवेंगे।

(५) फ (य)=० इसमें जहाँ सबसे बड़े य के घात का गुणक रूप है वहाँ द्वितीय पद का गुणक य के सब मानों के योग तुल्य विरुद्ध चिन्ह का होता है, तृतीय पद का गुणक य के दो दो मानों के घात के योग तुल्य होता है, चतुर्थ पद का गुणक य के तीन तीन मानों के घात के योग तुल्य विरुद्ध चिन्ह का होता है..., इसी प्रकार आगे भी गुणक और य के मानों में परस्पर सम्बन्ध जानना चाहिए।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१—अव्यक्त राशि किसे कहते हैं।

२—फ (य) से क्या समझते हो।

३—गुण्य = $य^४ - य^२ + २$, गुणक = $२य^३ - ५य + ३$। गुणनफल केवल चिन्हों और $य^४$ इत्यादि के गुणकों को लेकर बताओ।

४—ऊपर के प्रश्न की चाल से यदि भाज्य = $२य^४ - ३य^२ + ४$, भाजक = $य^२ + २$ तो लब्धि का मान और शेष का मान बताओ।

५—अव्यक्त का अकरणीगत अभिन्नफल किसे कहते हैं।

६—यदि फ $(य) = २य^{४} + ३य^{३} - ४य + २$ तो फ (४) का क्या मान होगा।

७—सिद्ध करो कि यदि फ $(अ) = ०$ तो फ $(य)$ अवश्य $य - अ$ से भाग लेने में निःशेष होगा।

८—$२य^{४} + ३य^{३} - ४य + २$ इसमें यदि $य - ४$ इससे भाग दिया जाय तो क्या लब्धि और शेष होंगे।

९—यदि फ $(य) = ४य^{५} - ५य^{४} + २$ तो फ$'$ $(य)$ का क्या मान होगा।

१०—यदि फ $(य) = प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + \cdots\cdots + प^{न}$ तो सिद्ध करो कि

$$फ(य+र) = फ(य) + र\,फ'(य) + \frac{र^{२}}{१\cdot२}फ''(य) + \frac{र^{३}}{१\cdot२\cdot३}फ'''(य) + \cdots\cdots\cdots$$

११—सिद्ध करो कि $२य^{५} - य^{४} + ४य^{३} + ८य^{२} - ५य + ५$ इसमें य का एक ऐसा मान मान सकते हैं जिससे $२य^{५}$ यह और पदों के योग से बड़ा हो सकता है या य का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश से

$$८य^{२} > २य^{५} - य^{४} + ४य^{३}$$

१२—असम्भव संख्या किसे कहते हैं।

१३—$अ + क\sqrt{-१}$, $अ' + क'\sqrt{-१}$ इनके घात तुल्य असम्भव में मध्यगुणक क्या होगा।

१४—$य^{७} = -\sqrt{-१},\ य^{६} = +\sqrt{-१}$ इनसे य का एक मान बनाओ।

१५—दिखलाओ कि $७य^{३} + २य^{२} + २य - १२ = ०$ इसका एक ही मूल १ और २ के बीच है।

सिद्ध करो

१६—$२य^{३} + ६य^{२} + ३य + १८ = ०$ इसका कोई धन मूल न होगा।

१७—$य^{६} - ३य^{५} + २य^{४} - ५य^{३} + ४य^{२} - ३य + ५ = ०$ इसका कोई ऋण मूल न होगा।

१८—$य^{६} + २य^{४} + ३य^{२} + ५ = ०$ इसका कोई सम्भाव्य मूल न आवेगा।

१९—$य^{२} + कय + ग = ०$ इसके दोनों मूल $अ_{१}$ और $अ_{२}$ हों तो $अ_{१} + अ_{२} = -क,\ अ_{१}\ अ_{२} = ग$

२—समीकरणों के गुण

२६—समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भव मूल होते हैं—पहले २४ वें प्रक्रम में दिखा आए हैं कि फ $(य) = ०$ इस समीकरण में य के सब से बड़े घात की जो संख्या होगी उतने ही समीकरण के मूल आवेंगे, वे चाहें सम्भाव्य वा असम्भाव्य संख्या हों।

कल्पना करो कि अव्यक्त के अकरणीगत अभिन्नफल फ (य) में प्रत्येक पद का गुणक सम्भाव्य संख्या है और फ (य) =० इसका एक मूल असम्भव $अ + क\sqrt{-१}$ यह है तो य के स्थान में $अ + क\sqrt{-१}$ इसका उत्थापन देने से १६वें प्रक्रम से

$$फ (य) = अ' + क'\sqrt{-१} = ०$$ ऐसा होगा जहाँ

$अ' = ०$ और $क' = ०$ होगा और यदि य के स्थान में

$अ - क\sqrt{-१}$ का उत्थापन दो तो १६वें ही प्रक्रम से

$$फ (य) = अ' - क'\sqrt{-१} = ०$$ होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि ऐसे फ (य) =० में यदि एक असम्भव मूल $अ + क\sqrt{+१}$ होगा तो उसी के साथ ही दूसरा मूल $अ - क\sqrt{-१}$ यह भी होगा अर्थात् समीकरण में जोडे जोडे इस प्रकार के असम्भव मूल होंगे।

मानो कि $अ_१ = अ + क\sqrt{-१}$ और $अ_२ = अ - क\sqrt{१-}$ तो फ (य), $य - अ_१$ और $य - अ_२$ इनसे निःशेष होगा अर्थात् $(य - अ_१)(य - अ_२)$ इससे फ (य) निःशेष होगा परन्तु

$$(य - अ_१)(य - अ_२) = य^२ - (अ_१ + अ_२) य + अ_१ अ_२$$
$$= य^२ - २ अ य + अ^२ + क^२$$

इसलिये फ (य) में $य^२ - २ अ य + अ^२ + क^२$ ऐसे भी गुणक रूप खण्ड होंगे जिनमें अ, क, $क^२ + अ^२$ इत्यादि सब सम्भाव्य संख्या हैं। समीकरण से सर्वदा फ (य)=० इस रूप

का समीकरण समझना चाहिए जो कि सब समीकरणों में एक पक्ष को दूसरे पक्ष में घटा देने से बन सकता है।

२७—समीकरण में जोड़े जोड़े करणीगत मूल होते हैं—इसी प्रकार यदि अव्यक्त के अकरणीगत अभिन्न-फल फ (य) में सब गुणक अकरणीगत हों और फ (य)=० इस समीकरण का एक मूल $अ + \sqrt{क}$ ऐसा हो जहाँ $\sqrt{क}$ एक करणी है तो एक दूसरा मूल $अ - \sqrt{क}$ ऐसा भी होगा और फ (य) मे गुणकरूप खण्ड

$(य - अ - \sqrt{क})\ (य - अ + \sqrt{क}) = (य - अ)^2 - क$ ऐसे भी होंगे।

२८—खण्डों की संख्या—$य - अ_1$, $य - अ_2$ इत्यादि को य के एक घात के खण्ड, $य^2 - (अ_1 + अ_2)\ य + अ_1 अ_2$ इसे द्विघात के खण्ड, इसी प्रकार जिसमें $य^3$, $य^4$ इत्यादि हों उन्हें क्रम से तीन, चार घात आदि के खण्ड कहें तो स्पष्ट है कि फ (य) में यदि य का सब से बड़ा घात न हो तो फ (य) में गुण्यगुणकरूप एक घात के खण्ड न होंगे। दो घात के खण्ड $\frac{न\ (न - 1)}{1 \cdot 2}$, त घात के खण्ड $\frac{न\ (न - 1) \cdots\ (न - त + 1)}{त\,!}$ होंगे (२४वाँ प्रक्रम देखो)।

२९—तुल्य मूल—यदि $फ\ (य) = 0 = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$ इसके जो $अ_1, अ_2, अ_3, \cdots\ \cdot\ \cdots, अ_न$ मूल आवेंगे उनमें बहुत से आपस में तुल्य हों तो फ (य) का लाघव से नया रूप बना सकते हो, जैसे मान लो कि, फ (य)=०

इसके मूल में $अ_1$, त बार, $अ_2$, थ बार, $अ_3$, द बार आए हैं तो $फ(य) = प_0 (य - अ_1)^त (य - अ_2)^थ (य - अ_3)^द \ldots$ अब इस रूप के अतिरिक्त फ (य) का दूसरा ऐसा रूप नहीं बन सकता जिसमें $(य - अ_1)$ यह त बार से अधिक या न्यून हो, $(य - अ_2)$ यह थ बार से अधिक वा न्यून हो, इत्यादि। यदि सम्भव हो तो मानो कि

$$फ(य) = प_0 (य - अ_1)^{त_1} (य - अ_2)^{थ_1} (य - अ_3)^{द_1} \ldots$$

$$इसलिए\ प_0 (य - अ_1)^त (य - अ_2)^थ (य - अ_3)^द \ldots \ldots$$

$$= प_0 (य - अ_1)^{त_1} (य - अ_2)^{थ_1} (य - अ_3)^{द_1} \ldots \ldots$$

मान लो कि $त > त_1$, तो $(य - अ_1)^{त_1}$ का दोनों पक्षों में भाग देने से

$$प_0 (य - अ_1)^{त - त_1} (य - अ_2)^थ (य - अ_3)^द \ldots \ldots$$

$= प_0 (य - अ_2)^{थ_1} (यअ - _3)^{द_1} \ldots$ इसमें यदि $य = अ_1$ तो बायाँ पक्ष शून्य होता है परन्तु दहिना पक्ष शून्य नहीं होता इसलिए ऊपर का समीकरण असम्भव हुआ। इसलिये $त = त_1$। इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि $थ = थ_1$, $द = द_1$, इत्यादि।

३०—समीकरण में यदि य के सब से बड़े घात की संख्या से अधिक मूल हों तो सब गुणक शून्य के तुल्य होंगे।

$$फ (य) = ० = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots + प_न$$

इसमे २४वें प्रक्रम से जब स्पष्ट है कि य के एक घात के गुणय-गुणकरूप खण्ड न होंगे; इसलिये फ (य)=० के न मूल आवेंगे तब स्पष्ट है कि उन न मूलों से भिन्न संख्या का उत्थापन यदि य के स्थान मे दें तो फ (य)=० नहीं हो सकता परन्तु यदि पूछने वाला कहे कि न संख्याओं से भिन्न संख्या म भी फ (य)=० ऐसा होता है तो स्पष्ट है कि

$$फ (य) = ० = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$$

यह तभी सम्भव हो सकता है जब $प_0, प_1, प_2, \ldots\ldots, प_न$ ये सब गुणक शून्य के समान हों। ऐसी दशा मे य के स्थान में चाहे जिस संख्या का उत्थापन देओ सर्वदा फ (य)=० होगा।

३१—समीकरण का एक मूल जान कर उससे एक घात छोटा नया समीकरण बनाया जा सकता है—$फ (य) = ० = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots\cdots + प_न$ इसका यदि एक मूल $अ_1$ हो तो ८वें प्रक्रम के फ (य) यह $य - अ_1$ इससे भाग देने से निःशेष होगा। लब्धि भी अव्यक्त का कोई अकरणीगत अभिन्न फल होगी जिसमें य का सब से बड़ा घात $न - १$ होगा। इस लब्धि को यदि फा (य) कहो तो अब एक नया समीकरण फा (य)=० ऐसा बना सकते हो क्योंकि $फ (य) = ० = फा (य) \{ य - अ_1 \}$ इसलिये दोनों पक्षों में $य - अ_1$ का भाग देने से फा (य)=० हुआ। पहिले समीकरण की अपेक्षा यह एक घात कम का समीकरण हुआ। इसका यदि एक मूल $अ_2$ व्यक्त हो तो फा (य)=० इसमें $य - अ_2$ इसका

भाग देकर फिर एक नया समीकरण $\text{फि}(\text{य})=०$ ऐसा बना सकते हो जिसमें य का और एक कम घात रहेगा। इस प्रकार समीकरण के एक मूल को जानने से उससे एक घात छोटा नया समीकरण बनता चला जायगा।

३२—गुणकों और मूलों में परस्पर का सम्बन्ध— २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ में जो बात कह आए हैं उसे अनुमान के अतिरिक्त नीचे लिखे हुए प्रकार से भी सिद्ध कर सकते हो।

मान लो कि २४वें प्रक्रम से यदि न−१ गुण्यगुणकरूप खण्ड $\text{फ}(\text{य})$ में हों तो वे बातें जो ५वें प्रसिद्धार्थ में हैं ठीक हैं तो

$$(\text{य}-\text{य}_{१})(\text{य}-\text{अ}_{१})\cdots(\text{य}-\text{अ}_{\text{न}-१})=\text{फ}(\text{य})$$

$$=\text{य}^{\text{न}-१}+\text{प}_{१}\text{य}^{\text{न}-२}+\cdots\cdots\cdots+\text{प}_{\text{न}-१}$$

जहां $\text{प}_{१}=-(\text{अ}_{१}+\text{अ}_{२}+\cdots+\text{अ}_{\text{न}-१})=-\text{अ}_{१},-\text{अ}_{२},\cdots\cdots$ $-\text{अ}_{\text{न}-१}$ इनका योग।

$\text{प}_{२}=-\text{अ}_{१},-\text{अ}_{२}\cdots\cdots$ इत्यादि में दो दो के घात का योग

$\text{प}_{३}=-\text{अ}_{१},-\text{अ}_{२},-\text{अ}_{३}$ इत्यादि में तीन तीन के घात का योग।

....

$\text{प}_{\text{न}-१}=-\text{अ}_{१},-\text{अ}_{२},\cdots\cdots,\text{अ}_{\text{न}-१}$ इन सब का घात।

ऊपर के समीकरण के दोनों पक्षों को एक नये खण्ड $य - अ_न$ से गुणने से

$$(य - अ_१)(य - अ_२)\cdots\cdots(य - अ_न) = य^न + (प_१ - अ_न)य^{न-१} + (प_२ - प_१ अ_न)य^{न-२}$$

$$+ (प_३ - प_२ अ_न)य^{न-३} + \cdots\cdots + प_{न-१} अ_न$$

परन्तु $प_१ - अ_न = - अ_१ - अ_२ - अ_३ - \cdots\cdots - अ_न$

$= - अ_१, - अ_२, \cdots\cdots, - अ_न$ इनका योग।

$प_२ - प_१ अ_न = प_२ + अ_न (अ_१ + अ_२ + \cdots\cdots + अ_{न-१})$

$= - अ_१, - अ_२, \cdots\cdots, - अ_न$ इन में दो दो के घात का योग।

$प_३ - प_२ अ_न = प_३ - अ_न (अ_१ अ_२ + अ_२ अ_३ + \cdots)$

$= - अ_१, - अ_२, \cdots, \cdots - अ_न$ इनमें तीन तीन के घात का योग।

$- प_{न-१} अ_न = - अ_१, - अ_२, - अ_३, \cdots, - अ_न$ इनका घात।

इसलिये वे बातें यदि न − १ गुण्यगुणकरूप खण्डों में सत्य हैं तो न खण्डों में भी सत्य होंगी परन्तु २४वें प्रक्रम से ४ गुण्यगुणक खण्डों में सत्य हैं, इसलिये ५ खण्डों में भी सत्य होंगी।

न − १ के स्थान में ५ का उत्थापन देने से ६ में भी सत्य होंगी। इस प्रकार आगे बढ़ाने से स्पष्ट है कि चाहे जितने गुण्यगुणकरूप खण्ड हों सब में २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ की बातें सत्य हैं।

इसलिये उसी प्रसिद्धार्थ से कह सकते हो कि फ (य)=० इसमें $य^{न-त}$ का गुणक यदि $प_त$ है तो $(-१)^त प_त$ समीकरण के मूलों में से त, त के घातों के योग के तुल्य होता है। ऐसा साधारण एक समीकरण उत्पन्न होगा जिसमें त के स्थान में १,२,३....इत्यादि का उत्थापन देने से सब पदों के गुणकों और फ (य) =० इसके मूलों में जो परस्पर सम्बन्ध है उसका ज्ञान हो जायगा।

जैसे $य^३+प_१य^२+प_२य+प_३=०$ इस समीकरण के मूल यदि $अ_१, अ_२, अ_३$ मान लो तो

$$-अ_१-अ_२-अ_३=प_१ \quad \ldots\ldots (१)$$

$$अ_१अ_२+अ_१अ_३+अ_२अ_३=प_२ \quad \ldots\ldots (२)$$

$$-अ_१अ_२अ_३=प_३ \quad \ldots\ldots (३)$$

फिर

$$-अ^३_१-अ^२_१अ_२-अ^२_१अ_३=प_१अ^२_१ \quad \ldots\ldots (४)$$

$$अ_१अ_२अ_३+अ^२_१अ_२+अ^२_१अ_३=प_२अ_१ \quad \ldots\ldots (५)$$

(३), (४) और (५) को जोड़ देने से

$$-अ^३_१=प_१अ^२_१+प_२अ_१+प_३$$

इसलिये $अ^३_१+प_१अ^२_१+प_२अ_१+प_३=०$

अर्थात् अ के जानने के लिये वैसा ही समीकरण उत्पन्न हुआ जैसा पहिले का समीकरण था। भेद इतना ही है कि वहाँ य है यहाँ य के स्थान में $अ_१$ है। यहाँ फ (य) =० इसके तीनों मूलों में से किसी के लिये $अ_१$ मान सकते हो क्योंकि दूसरा

समीकरण $अ_1$ के जानने के लिये जो उत्पन्न हुआ है उससे $अ_1$ के तीन मान आवेंगे।

३३—मूलों के वर्गों का योग—२५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ में गुणकों और मूलों में जो सम्बन्ध दिखा आए हैं और उससे ऊपर के प्रक्रम में $(-१)^न प_न$ इसका जो मान दिखला आए हैं उनसे यद्यपि वर्गसमीकरण छोड और घन-समीकरणादि के मूल निकालने में काम नहीं चलता तथापि उनसे समीकरणों के विषय में बहुत उपयुक्त बातों का पता लग जाता है।

जैसे $अ_1, अ_2, ..., अ_न$ यदि $य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots + प_न = ०$ इस समीकरण के मूल हों तो

$$-प_1 = अ_1 + अ_2 + \cdots + अ_न$$

$$प_2 = अ_1 अ_2 + अ_1 अ_3 + \cdots + अ_2 अ_3 + \cdots\cdots$$

इसलिये $प^2_1 - २ प_2 = अ^2_1 + अ^2_2 + अ^2_3 + \cdots + अ^2_न$

इस पर से सिद्ध हुआ कि सब मूलों के वर्गयोग के तुल्य $प^2_1 - २प_2$ होता है इसलिये यदि $प^2_1 - २प_2$ यह ऋण हो तो सब मूल सम्भाव्य संख्या नहीं होंगे।

३४—गुणकों और मूलों में और भी सम्बन्ध—इसी प्रकार से और भी सम्बन्ध जान सकते हो। जैसे

$(-१)^{न-1} प_{न-1}$ = मूलों के न − १, न − १ घातों का योग

$(-१)^न प_न$ = सब मूलों का घात

भाग देने से

$$-\frac{\text{प}_{\text{न}-\text{१}}}{\text{प}_{\text{न}}}=\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{१}}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{२}}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{३}}}+\cdots\cdots+\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{न}}}\cdots\cdots(\text{१})$$

और $(-\text{१})^{\text{न}-\text{२}}\text{प}_{\text{न}-\text{२}}$ = मूलों के न − २, न − २ घातों का योग

$(-\text{१})^{\text{न}}\text{प}_{\text{न}}$ = सब मूलों का घात

इसलिये भाग देने से

$$\frac{\text{प}_{\text{न}-\text{२}}}{\text{प}_{\text{न}}}=\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{२}}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{१}}\text{अ}_{\text{३}}}+\cdots\cdots+\frac{\text{१}}{\text{अ}_{\text{२}}\text{अ}_{\text{३}}}+\cdots\cdots(\text{२})$$

(१) के वर्ग में (२) का दूना घटा देने से

$$\frac{\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}-\text{१}}}{\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}}}-\text{२}\frac{\text{प}_{\text{न}-\text{२}}}{\text{प}_{\text{न}}}=\frac{\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}-\text{१}}-\text{२}\,\text{प}_{\text{न}-\text{२}}\,\text{प}_{\text{न}}}{\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}}}=\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}}+\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}}+\cdots\cdots\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{न}}}$$

इसे $\text{प}^{\text{२}}_{\text{१}}-\text{२प}_{\text{२}}=\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}+\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}+\cdots+\text{अ}^{\text{२}}_{\text{न}}$ इससे गुण देने से

$$\frac{(\text{प}^{\text{२}}_{\text{१}}-\text{२}\,\text{प}_{\text{२}})(\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}-\text{१}}-\text{२}\,\text{प}_{\text{न}-\text{२}}\,\text{प}_{\text{न}})}{\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}}}=\text{न}+\frac{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}}+\frac{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{३}}}+\cdots\cdots+\frac{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}+\cdots\cdots$$

इसलिये

$$\frac{(\text{प}_{\text{१}}^{\text{२}}-\text{२}\,\text{प}_{\text{२}})(\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}-\text{१}}-\text{२}\,\text{प}_{\text{न}-\text{२}}\,\text{प}_{\text{न}})}{\text{प}^{\text{२}}_{\text{न}}}-\text{न}=\frac{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}}+\frac{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{३}}}+\cdots\cdots+\frac{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{२}}}{\text{अ}^{\text{२}}_{\text{१}}}+\cdots\cdots$$

इस प्रकार अनेक उपयुक्त बातें जान सकते हो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१—एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूलों के मान $१, -१, २, -२$ हों।

२—ऐसा एक समीकरण बनाओ जिसके मूलों के मान $१ \pm \sqrt{-२}$ और $१ \pm २\sqrt{-१}$ हों।

३—एक सप्त घात समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूलों में से एक का मान $१ + \sqrt{३} + \sqrt{-१}$ हो।

४—नीचे लिखे हुए समीकरणों के और मूल बताओ जब कि एक मूल दिया हुआ हैः—

(१) $य^३ - य^२ + ३य + ४ = ० ;\ य = १ + २\sqrt{-१}$

(२) $२य^४ + ८य^३ + १७य^२ + ८य + १० = ०;\ य = \sqrt{-१}$

(३) $३य^४ + ३य^३ - ७५य^२ + १२३य + १९८ = ०;\ य = ३ - \sqrt{-२}$

(४) $य^४ + २य^३ - ४य^२ + ६ = ३ + ४य;\ य = \sqrt{२}$

(५) $य^४ + २ = ७य^३ + ५य^२ + ६य;\ य = २ - \sqrt{३}$

(६) $य^६ + ७य^३ + २१य^२ = य^५ + ८य^४ + ९य + ५४ ;$

$$य = \sqrt{२} - \sqrt{-१}$$

५—$य^५ + ८य^२ = य^४ + ९य + १५$ इसमें एक मूल $\sqrt{३}$ और दूसरा $१ + २\sqrt{-१}$ हों तो और मूल क्या होंगे।

६—$य^३ + य^२ - १७य + ग = ०$ इसमें एक मूल ३ है तो और मूलों को और ग के मान को बताओ।

७—$य^{५} - ३य^{४} + २य^{३} + ४य^{२} - य + २ = ०$ इसमें सब मूलों के वर्गयोग और पृथक् पृथक् रूप में भाग दिये हुए मूलों के वर्गयोग बताओ।

८—$य^{न} + प_{१} य^{न-१} + प_{२} य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न} = ०$ इस समीकरण के सब मूलों के घनयोग का मान बताओ।

उत्तर—$प^{३}_{१} + ३प_{१}प_{२} - ३प_{३}$

९—$य^{३} + य^{२} - १७य + १५ = ०$ इसमें यदि जानते हैं कि मूल $अ_{१}$, $अ_{२}$, $अ_{३}$ हों और $अ_{२} - अ_{१} = अ_{३} - अ_{२} + १०$ हो तो $अ_{१}$, $अ_{२}$, $अ_{३}$ के मान क्या होंगे।

१०—बीजगणित से यह जानते हैं कि यदि अ, क, ग, इत्यादि न संख्या धनात्मक हों तो $\frac{अ + क + ग + \cdots}{न} > (अ \cdot क \cdot ग \cdots)^{१}$ इस पर से सिद्ध करो कि यदि $प^{२}_{१} - २प_{२}$ यह $नप^{\frac{२}{न}}_{न}$ इससे अल्प हो तो समीकरण में कोई असम्भाव्य मूल न आवेगा।

११—$य^{न} + प_{१} य^{न-१} + \cdots\cdots + प_{न} = ०$ इस समीकरण के दो दो मूलों के घात का वर्गयोग बताओ।

उ-$प^{२}_{२} - २प_{१}प_{३} + २प_{४}$

१२—यदि $अ_{१}$, $अ_{२}$, $अ_{३}$ इत्यादि मूल हों तो सिद्ध करो कि

$$(१ - प_{२} + प_{४} - \cdots)^{२} + (प_{१} - प_{३} + प_{५} - \cdots)^{२}$$

$$= (१ + अ^{२}_{१})(१ + अ^{२}_{२})(१ + अ^{२}_{३}) \cdots\cdots$$

३—समीकरणों की रचना

३५—इस अध्याय में दिए हुए समीकरण पर से एक ऐसे समीकरण के बनाने की रीति लिखी जायगी जिसके मूल से दिए हुए समीकरण के मूल में एक निर्दिष्ट सम्बन्ध रहे।

जैसे फ (य)=० यह एक दिया हुआ समीकरण है इस पर से एक ऐसा समोकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हों तो यहाँ स्पष्ट है कि र=—य इस समीकरण मे जो य के मान होंगे उनके तुल्य विरुद्ध चिन्ह के र के मान होंगे इसलिये य=—र अब दिए हुए समीकरण में य के स्थान में —र का उत्थापन देने से नया समीकरण फ (य) = फ (—र)=० ऐसा होगा।

यदि $फ(य) = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_{न-१} य + प^न$ तो बदला हुआ नया समीकरण

$$फ(-र) = प_न (-र)^न + प_१ (-र)^{न-१} + प_२ (-र)^{न-२} + \cdots\cdots + प^{न-१}(-र) + प_न = ०$$

$$= प_न र^न - प_१ र^{न-१} + प_२ र^{न-२} \mp \cdots + प_{न-१} र \pm प_न$$

अर्थात् दूसरे पद से एक एक पद छोड आदि समीकरण में गुणकों के चिन्ह बदल देने से यह नया समीकरण होता है। यदि दिए हुए समीकरण में य का एकापचित घातक्रम न हो तो ३ प्रक्रम से घातक्रम को बना कर तब ऊपर की लिखी हुई युक्ति से चिन्हों को बदल कर नया समीकरण बनाना चाहिए।

जैसे यदि फ $(य) = य^{७} + ४य^{६} - ५य^{४} - ६य^{२} + ८ = ०$

तो य के स्थान में $-र$ का उत्थापन देने से नया समीकरण

$-र^{७} + ४र^{६} - ५र^{४} - ६र^{२} + ८ = ० = र^{७} - ४र^{६} + ५र^{४} + ६र^{२} - ८$ बना, अथवा दिए हुए समीकरण का ३प्र. से घातक्रम में रूप

$य^{७} + ४य^{६} + ०य^{५} - ५य^{४} + ०य^{३} - ६य^{२} + ०य + ८$ यह हुआ।

इसमें य के स्थान में र को रख देने से और दूसरे पद से एक एक पद छोड सब गुणकों के चिन्ह बदल देने से नया समीकरण

$र^{७} - ४र^{६} + ५र^{४} + ६र^{२} - ८ = ०$ बना। यही पहले भी आया था।

३६—दिए हुए समीकरण से एक ऐसा समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से ज गुणित हों।

मान लो कि $र = जय$, तो इस समीकरण में स्पष्ट है कि जो जो य के मान होंगे उनसे ज गुणित य के मान होंगे। इस लिये $य = \frac{र}{ज}$ इसका उत्थापन दिए हुए फ $(य) = ०$ इस समीकरण में देने से नये बने हुए समीकरण का रूप फ $\left(\frac{र}{ज}\right) = ०$ ऐसा होगा।

जैसे फ $(य) = प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + \cdots + प_{न} = ०$ इस दिए हुए समीकरण पर से नया समीकरण

$$फ\left(\frac{र}{ज}\right)=प_०\left(\frac{र}{ज}\right)^न+प_१\left(\frac{र}{ज}\right)^{न-१}+प_२\left(\frac{र}{ज}\right)^{न-२}+\cdots\cdots+प_न$$

$$=\frac{प_० र^न}{ज^न}+\frac{प_१ र^{न-१}}{ज^{न-१}}+\frac{प_२ र^{न-२}}{ज^{न-२}}+\cdots\cdots+प_न=०$$

ज को न घात से गुण देने से

$$प_० र^न+प_१ जर^{न-१}+प_२ज^२र^{न-२}+\cdots\cdots+प_तज^तर^{न-त}+\cdots\cdots+प_नज^न=०$$

ऐसा नया समीकरण हुआ। इसमें यदि $प_०$ से भाग देकर समीकरण को छोटा करने से $\frac{प_१}{प_०}$...इत्यादि भिन्न हो तो प्रायः उनके हर के लघुतमापवर्त्य तुल्य ज को मानने से नये समीकरण में सब अभिन्न पद हो सकते हैं। जैसे यदि $य^३-\frac{४}{३}य^२+\frac{६}{५}य-\frac{३}{१०}=०$ इस पर से नया समीकरण बनाओ जहाँ $य=\frac{र}{ज}$ तो समीकरण का रूप ऊपर की युक्ति से

$$र^३-\frac{४}{३}र^२ज+\frac{६}{५}रज^२-\frac{३}{१०}ज^३=०$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि ज=३०=३, ५, १० का लघुतमापवर्त्य, तो समीकरण

$$र^३-४०र^२+१०८०र-८१००=०$$ ऐसा हुआ।

यदि दिया हुआ समीकरण —

$$य^३-\frac{४}{३}य^२+\frac{६}{९}य-\frac{३}{२७}=०$$ ऐसा होता तो नये

$$र^३-\frac{४}{३}जर^२+\frac{६}{९}ज^२र-\frac{३}{२७}ज^३=०$$ इस समीकरण में ज के स्थान में तीन ही का उत्थापन देने से

$$र^३-४र^२+६र-३=०$$

यह अभिन्न नया समीकरण बन जाता।

३७—दिए हुए समीकरण पर से एक ऐसा नया समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से ज स्थिराङ्क तुल्य न्यून हों।

मान लो कि $र = य - ज$ तो इसमें स्पष्ट है कि जो जो य के मान होंगे उनसे ज तुल्य न्यून र के मान होंगे। इसलिये दिए हुए $फ(य) = ०$ इस समीकरण में य के स्थान में $र + ज$ का उत्थापन देने से नया समीकरण $फ(ज + र) = ०$ ऐसा हुआ। दिया हुआ समीकरण

$फ(य) = ० = प_० य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots + प_न$ यदि ऐसा हो तो

११वें प्रक्रम से य के स्थान में ज को रख देने से

$$फ(ज+र) = फ(ज) + फ'(ज) र + फ''(ज)\frac{र^२}{१ २} + \frac{फ'''(ज) र^३}{३!} + \cdots + \frac{फ^न(ज) र^न}{न!} = ०$$

और १२वें प्रक्रम से र के एकापचित घातक्रम से

$$फ(ज+र) = प_० र^न + (प_१ + नप_० ज) र^{०-१} +$$

$$\left\{ प_२ + (न-१)प_१ ज + \frac{न(न-१)}{२!} प_० ज^२ \right\} र^{त-२} + \cdots\cdots$$

$$+ \left\{ प_त + (न-त+१)\ प_{त-१} ज^त + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + \frac{न(न-१)\cdots(न-त+१)}{त!} प_० ज^त \right\} र^{न-त} + \cdots + \cdots + फ(ज) = ०$$

विशेष—फ (य) पर से फ (अ), फ' (अ), फ'' (अ) इत्यादि के मान लाघव से जानने के लिये हार्नर (Horner) साहब ने एक प्रकार बनाया है।

जैसे मानो कि $फ (य) = प_0 य^4 + प_1 य^3 + प_2 य^2 + प_3 य + प_4$

तो $फ (अ) = प_0 अ^4 + प_1 अ^3 + प_2 अ^2 + प_3 अ + प_4$

और १०वें प्रक्रम से

$$फ' (अ) = 4प_0 अ^3 + 3प_1 अ^2 + 2प_2 अ + प_3$$

$$\frac{1}{2!} फ'' (अ) = 6प_0 अ^2 + 3प_1 अ + प_2$$

$$\frac{1}{3!} फ''' (अ) = 4प_0 अ + प_1$$

$$\frac{1}{4!} फ'''' (अ) = प_0$$

अब फ (अ) का मान ७वें प्रक्रम से

$$प_0 = प_0$$

$$प_0 अ + प_1 = पा_1$$

$$पा_1 अ + प_2 = प_0 अ^2 + प_1 अ + प_2 = पा_2$$

$$पा_2 अ + प_3 = प_0 अ^3 + प_1 अ^2 + प_2 अ + प_3 = पा_3$$

$$पा_3 अ + प_4 = प_0 अ^4 + प_1 अ^3 + प_2 अ^2 + प_3 अ + प_4 = फ(अ)$$

यहाँ प्रत्येक ऊपर की पंक्ति को अ से गुण देने से और आगे के गुणक को जोड देने से नीचे की पंक्ति उत्पन्न होती है।

अब जिस प्रकार से $प_०, प_१, प_२, प_३, प_४$ को लेकर फ(अ) बनाया गया है ठीक उसी प्रकार से $प_०, प_१, प_२, प_३$ को लेकर फ′ (अ) बन सकता है ।

जैसे

$$प_० \qquad\qquad = प_०$$

$$प_०अ + पा_१ = २प_०अ + प_१ \qquad = पा_४$$

$$पा_४अ + पा_२ = प_०अ^२ + पा_१अ + पा_२ = २प_०अ^२ + प_१अ + प_०अ^२$$
$$+ प_१अ + प_२ = ३प_०अ^२ + २प_१अ + प_२ = पा_५$$

$$पा_५अ + पा_३ = ४प_०अ^३ + ३प_१अ^२ + २प_२अ + प_३ = फ'(अ)$$

इसी प्रकार $प_०, पा_४, पा_५$ को लेकर $\frac{१}{२}$ फ″ (अ) को भी बना सकते हैं।

जैसे

$$प_० \qquad\qquad = प_०$$

$$प_०अ + पा_४ = ३प_०अ + प_१ \qquad = पा_६$$

$$पा_६अ + पा_५ = ६प_०अ^२ + ३प_१अ + प_२ \qquad = \frac{१}{२} फ''(अ)$$

जिस प्रकार से फ (अ), फ′ (अ), $\frac{१}{२}$ फ″ (अ) बनाया है उसी प्रकार $प_०, पा_६$ लेकर $\frac{१}{३!}$फ‴ (अ) बन सकता है। जैसे

$$प_० \qquad\qquad = प_०$$

$$प_०अ + पा_६ = ४प_०अ + प_१ \qquad = \frac{१}{३!}फ'''(अ)$$

$$\text{इस प्रकार अन्त में} \quad प_० \qquad = \frac{१}{४!}फ''''(अ)$$

ऊपर की क्रिया को सुभीते के लिये इस प्रकार लिखते हैं

$प_1$	$प_2$	$प_3$	$प_4$
$प_0 अ$	$पा_1 अ$	$पा_2 अ$	$पा_3 अ$
$पा_1$	$पा_2$	$पा_3$	फ(अ)
$प_0 अ$	$पा_4 अ$	$पा_5 अ$	
$पा_4$	$पा_5$	फ′(अ)	
$प_0 अ$	$पा_6 अ$		
$पा_6$	$\frac{1}{2}$ फ′ (अ)		
$प_0 अ$			
$\frac{1}{3!}$ फ‴(अ)			

ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं में ऊपर दो दो के योग के समान नीचे की संख्या है।

जैसे संख्याओं में जब य = २ = अ, तब

फ (य) = ३य⁴ − य³ + ४य² + ८ इसमें फ (अ), फ′ (अ), $\frac{1}{2}$ फ″ (अ), $\frac{1}{3!}$ फ‴ (अ) का मान जानना हो तो ऊपर की रीति से फ (य) को पूरा फल बनाने से

३	−१	+४	०	+८
	+६	१०	२८	५६
	५	१४	२८	६४
	६	२२	७२	
	११	३६	१००	
	६	३४		
	१७	७०		
	६			
	२३			

इस प्रकार से फ (अ) = ६४, फ′ (अ) = १००, $\frac{१}{२}$ फ″ (अ) = ७० और $\frac{१}{३!}$ फ‴ (अ) = २३ । यह विशेष बड़े काम का है इस पर से मूल का आसन्न व्यक्त मान लाघव से निकलता है जिसकी रीति आसन्न मान के प्रकरण में दिखाई जायगी।

३८—३७ प्रक्रम में ज के स्थान में −ज का उत्थापन देने से ऐसा एक नया समीकरण बन सकता है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल से +ज तुल्य बड़े होंगे।

३९—समीकरण के किसी एक पद का उडाना या हटाना—३८ प्रक्रम के नये समीकरण में ज के भिन्न भिन्न मान से प्रथम पद को छोड़ कर चाहे जौनसा पद उड़ा सकते हैं।

जैसे यदि फ (ज + र) = ० इसमें इच्छा हो कि दूसरा पद उडे तो दूसरे पद के गुणक $प_१ + नप_० ज$ इसको शून्य के समान करने से

$$प_१ + नप_० ज = ० \qquad ज = -\frac{प_१}{नप_०}$$

अब ज के स्थान में $-\frac{प_१}{नप_०}$ इसे रख देने से फ (ज + र)

$= फ \left(-\frac{प_१}{नप_०} + र\right)$ इसमें $र^{न-१}$ यह पद न रहेगा।

इसी प्रकार यदि त + १ संख्यक पद को उडाना हो तो उसके गुणक पर से

$$प_0 ज^{न} + \frac{त}{न} प_1 ज^{न-1} + \frac{त(त-1)}{न(न-1)} प_2 ज^{न-2} + \cdots\cdots + \frac{(त)!(न-त)!}{त!} प_न = 0$$

ऐसा समीकरण बना, इस पर से ज का मान ले आने चाहिए जिनके वश से फ (ज+र) = ० इसमें त+१ संख्यक पद उड़ जायगा।

जैसे तीसरा पद उड़ाना हुआ तो त = २ इसका उत्थापन ऊपर के समीकरण में देने से

$$प_0 ज^2 + \frac{2}{न} प_1 ज + \frac{2!(न-2)!}{न!} प_2 = 0$$

अब इस वर्गसमीकरण से ज के दो मान आ जायंगे जिनके वश से तीसरा पद उड़ जायगा। इसमें यदि न = ३ तो

$$प_0 ज^2 + \frac{2}{3} प_1 ज + \frac{2!(3-2)!}{3!} प_2 = प_0 ज^2 + \frac{2}{3} प_1 ज + \frac{प_2}{3} = 0$$

इस पर से $ज^2 + \frac{2प_1}{3प_0} ज = -\frac{प_2}{3प_0}$

वा $ज^2 + \frac{2प_1}{3प_0} ज + \frac{प_1^2}{9प_0^2} = \frac{प_1^2}{9प_0^2} - \frac{3प_0 प_2}{9प_0^2}$

$$\therefore ज = \frac{-प_1 \pm \sqrt{प_1^2 - 3प_0 प_2}}{3प_0}$$

जैसे $2य^3 - 12य^2 + 8य + 10 = 0$ इस पर से एक नया समीकरण ऐसा बनाना हो जिसमें दूसरा पद उड़ जाय तो यहाँ ऊपर की युक्ति से

$$ज = -\frac{प_१}{नप_०} = -\frac{-१२}{३ \times २} = +२$$

इस पर से नया समीकरण

$$२(र+२)^३ - १२(र+२)^२ + ८(र+२) + १०=०$$

वा $२र^३ + १२र^२ + २४र + १६ - १२र^२ - ४८र + ८र + १६ + १० - ४८ =$

$$२र^३ - १६र - ६=०$$

$\therefore$ $र^३ - ८ र - ३=०$ ऐसा हुआ।

और यदि $य^३ - २ य^२ + य + ३=०$ इसमें यदि तीसरा पद उड़ाना हो तो

$$ज = \frac{-प_१ \pm \sqrt{प^२_१ - ३प_०प_१}}{३प_०} = \frac{२ \pm \sqrt{४ - ३}}{३} = \frac{२ \pm १}{३}$$

$\therefore$ $ज = १$ वा $\frac{१}{३}$

जब $ज=१$ तो नया समीकरण

$$(र+१)^३ - २(र+१)^२ + (र+१) + ३ = र^३ + ३र^२ + ३र + १ - २र^२ - ४र - २ + र + १ + ३ =०$$

$\therefore$ $र^३ + र^२ + ३ =०$ ऐसा हुआ।

जब $ज = \frac{१}{३}$ तो नया समीकरण

$$(र+\tfrac{१}{३})^३ - २(र+\tfrac{१}{३})^२ + (र+\tfrac{१}{३}) + ३ =०$$

वा $र^३ + र^२ + \frac{र}{३} + \frac{१}{२७} - २र^२ - \frac{४}{३} र - \frac{२}{९} + र + \frac{१}{३} + ३$

$$= र^३ - र^२ + \frac{१}{२७} - \frac{६}{२७} + \frac{८१}{२७} + \frac{९}{२७} =०$$

$\therefore$ $र^3 - र^2 + \frac{८५}{२७} = ०$ ऐसा हुआ ।

इस प्रकार से समीकरणों में पहले पद को छोड़ और किसी एक पद को उड़ा सकते हो ।

४०—दिए हुए समीकरण से ऐसा एक समीकरण बनाना है जिसके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के ज घात के तुल्य हों ।

कल्पना करो कि $र = य^{ज}$ इसमें जो य के मान होंगे उनके ज घात के तुल्य र के मान होंगे। इस लिये $य = र^{\frac{१}{ज}}$ के हुआ । इसके उत्थापन से नया समीकरण $फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = ०$ ऐसा हुआ ।

यदि $फ(य) = प_० य^{न} + प_१ य^{न-१} + प_२ र^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१} य$ $+ प_न = ०$ ऐसा हो तो नया समीकरण

$$फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = प_० र^{\frac{न}{ज}} + प_१ र^{\frac{न-१}{ज}} + प_२ र^{\frac{न-२}{ज}} + \cdots\cdots + प_{न-१} र^{\frac{१}{ज}} + प_न = ०$$

इसमें यदि $ज = -१$ तो $र = र^{-१} = \frac{१}{य}$

$$और\ फ\left(र^{\frac{१}{ज}}\right) = फ\left(\frac{१}{र}\right) = प_० र^{-न} + प_१ र^{१-न} + \cdots\cdots = ०$$

वा $प_न र^{न} + प_{न-१} र^{न-१} + \cdots\cdots + प_१ र + प_० = ०$ ऐसा हुआ ।

और यदि $ज = २$ तो $र = य^२$ और $य = र^{\frac{१}{२}}$ इसलिये

$$फ_1\left(र^{\frac{1}{ज}}\right) = फ\left(र^{\frac{1}{2}}\right) = प_0 र^{\frac{न}{2}} + प_1 र^{\frac{न-1}{2}} + \cdots\cdots + प_{न-1} र^{\frac{1}{2}} + प_न = 0 \text{ ।}$$

एकान्तर पदों को शून्य की ओर ले जाकर वर्ग कर देने से करणीगत अव्यक्त के घात में

$$\left(प_0 र^{\frac{न}{2}} + प_2 र^{\frac{न-2}{2}} + प_4 र^{\frac{न-4}{2}} + \cdots\cdots\right)^2$$

$$= \left(प_1 र^{\frac{न-1}{2}} + प_3 र^{\frac{न-3}{2}} + \cdots\cdots\right)^2$$

यह समीकरण होगा। इस तरह ज के भिन्न भिन्न मान से यहाँ अनेक प्रकार के नये नये समीकरण बन सकते हैं।

४१—इस प्रक्रम में समीकरणों की रचना के विषय में कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखला कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं।

(१) $य^3 + प_1 य^2 + प_2 य + प_3 = 0$ इसके मूल $अ_1, अ_2$ और $अ_3$ हैं। एक ऐसा नया समीकरण बनाना है जिसके मूल $अ_1 अ_2 + अ_1 अ_3$, $अ_2 अ_3 + अ_1 अ_2$ और $अ_1 अ_3 + अ_2 अ_3$ हों।

यहाँ $अ_1 अ_2 + अ_1 अ_3 = अ_1 (अ_2 + अ_3 + अ_1 - अ_1)$

$= अ_1 (-प_1 - अ_1) = -अ_1 (प_1 + अ_1)$

इसी प्रकार और दोनों मूलों के रूप क्रम से

$-अ_2 (प_1 + अ_2)$, $-अ_3 (प_1 + अ_3)$ ये होंगे। इसलिये यदि

$र = -य (प_1 + य)$ ऐसा मानें तो य के स्थान में क्रम से मूलों के तीनों मान $अ_1, अ_2, अ_3$ रख देने से नये समीकरण के मूल हो जाते हैं इसलिये

$र = -य(प_१ + य) \quad \therefore -र = य^२ + प_१ य$

$$\therefore \quad य = \frac{-प_१ \pm \sqrt{प_१^२ - ४र}}{२}$$

दिए हुए समीकरण में इसका उत्थापन देने से

$$\left\{ \frac{-प_१ \pm (प^२_१ - ४र)^{\frac{१}{२}}}{२} \right\}^३ + प_१ \left\{ \frac{-प_१ \pm (प^२_१ - ४र)^{\frac{१}{२}}}{२} \right\}^२$$

$$+ प_२ \left\{ \frac{-प_१ \pm (प^२_१ - ४र)^{\frac{१}{२}}}{२} \right\} + प_३ = ०$$

ऐसा समीकरण होगा। द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर और पक्षान्तर नयनादि से र के अकरणीगत घात में इसी समीकरण का रूप बना सकते हो।

(२) $य^३ + प_२ य + प_३ = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल दिए हुए समीकरण के दोनों मूलों के अन्तर वर्ग के तुल्य हों। यदि दिए समीकरण के मूल $अ_१, अ_२, अ_३$ मानों तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$-प_१ = अ_१ + अ_२ + अ_३ = ०, अ_१अ_२ + अ_१अ_३ + अ_२अ_३ = प_२,$$
$$अ_१अ_२अ_३ = -प_३$$

इसलिये मूलों के वर्ग योग

$$= प^२_१ - २प_२ = -२प_२ \text{ (३३वें प्रक्रम से)}$$

नये समीकरण के मूल $(अ_१ - अ_२)^२$, $(अ_२ - अ_३)^२$ और $(अ_१ - अ_३)^२$ ये हैं परन्तु $(अ_१ - अ_२)^२ = अ^२_१ - २अ_१अ_२ + अ^२_२ = अ^२_१ + अ^२_२ + अ^२_३ - २अ_१अ_२ - अ^२_३$

$$= \text{अ}^{2}_{1} + \text{अ}^{2}_{2} + \text{अ}^{2}_{2} - \frac{2\text{अ}_{1}\text{अ}_{2}\text{अ}_{3}}{\text{अ}_{3}} - \text{अ}^{2}_{3}$$

$$= -2\text{प}_{2} + \frac{2\text{प}_{3}}{\text{अ}_{3}} - \text{अ}^{2}_{3}$$

इसलिये (१) उदाहरण की युक्ति से

$$\text{र} = -2\text{प}_{2} + \frac{2\text{प}_{3}}{\text{य}} - \text{य}^{2}$$

$$\therefore \quad \text{यर} = -2\text{प}_{2}\text{य} + 2\text{प}_{3} - \text{य}^{3}$$

वा $\text{य}^{3} + (2\text{प}_{2} + \text{र})\text{य} - 2\text{प}_{3} = 0 \cdots\cdots (1)$

और $\text{य}^{3} + \text{प}_{2}\text{य} + \text{प}_{3} = 0 \cdots\cdots (2)$

(१) और (२) के अन्तर से

$$(\text{प}_{2} + \text{र})\text{य} - 3\text{प}_{3} = 0$$

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{3\text{प}_{3}}{\text{प}_{2} + \text{र}}$$

आदि समीकरण में इसका उत्थापन देने से और लघुतम रूप करने से

$$\text{र}^{3} + 6\text{प}_{2}\text{र}^{2} + 9\text{प}^{2}_{2}\text{र} + 27\text{प}^{2}_{3} + 4\text{प}^{3}_{2} = 0$$

यदि $27\text{प}^{2}_{3} + 4\text{प}^{3}_{2}$ यह धन हो तो २१वें प्रक्रम से र का एक मान सम्भाव्य ऋण संख्या होगा, इसलिये दिए हुए समीकरण में एक जोड़ा असम्भव मान अवश्य रहेगा। क्योंकि इसका यह एक ऋणात्मक मान दिए हुए समीकरण के मूलों के अन्तर के वर्ग तुल्य होगा। अन्तर का वर्ग ऋण तभी होगा

जब अन्तर में असम्भव संख्या होगी। और यदि $२७प^{२}_{३} + ४प^{३}_{२}$ यह शून्य हो तो स्पष्ट है कि दिए हुए समीकरण के दो मूल आपस में समान होंगे।

(३) $य^{३} + प_{१}य^{२} + प_{२}य + प_{३} = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल दिए हुए समीकरण के दो दो मूलों के अन्तर के वर्ग के समान हो। इसमें दूसरा पद उडाने के लिये $य = य' - \frac{प_{१}}{३}$ ऐसी कल्पना करो तो दिए हुए समीकरण का रूप

$$\left(य' - \frac{प_{२}}{३}\right)^{३} + प_{१}\left(य' - \frac{प_{१}}{३}\right)^{२} + प_{२}\left(य' - \frac{प_{१}}{३}\right) + प_{३}$$

$$= य'^{३} + प_{२}'\,य' + प_{३}' = ०$$

$$\text{जहाँ } प'_{२} = प_{२} - \frac{प^{२}_{१}}{३};\; प'_{३} = \frac{२प^{३}_{१}}{२७} - \frac{प_{१}प_{२}}{३} + प_{३}$$

नये समीकरण का प्रत्येक मूल दिए हुए समीकरण के प्रत्येक मूल से $\frac{प_{१}}{३}$ इतना बड़ा होगा, इसलिये नये समीकरण के जो दो दो मूलों का अन्तर होगा वही दिए हुए समीकरण के दो दो मूलों का क्रम से अन्तर होगा। इसलिये (२) उदाहरण की युक्ति से अभीष्ट समीकरण

$र^{३} + ६प'_{२}र^{२} + ९प'^{२}_{२}र + २७प'^{२}_{३} + ४प'^{३}_{२} = ०$ ऐसा होगा। इसमें $प'_{२}$, $प'_{३}$ के पूर्व आए हुए मानों का उत्थापन देने से

$$र^{३} + २(३प_{२} - प^{२}_{१})र^{२} + (३प_{२} - प^{२}_{१})^{२}र$$

$$+ \frac{(२प^{३}_{१} - ९प_{१}प_{२} + २७प_{३})^{२} + ४(३प_{२} - प^{२}_{१})^{३}}{२७} = ०$$

दिए हुए समीकरण के मूल यदि $अ_1, अ_2, अ_3$ ये हों तो ५५ वें प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से

$$(अ_1 - अ_2)^2 + (अ_2 - अ_3)^2 + (अ_3 - अ_1)^2 = -2(3प_2 - प^2_1)$$

$$(अ_1 - अ_2)^2(अ_2 - अ_3)^2 + (अ_1 - अ_3)^2(अ_3 - अ_1)^2 + (अ_2 - अ_3)^2(अ_3 - अ_1)^2 = 3प_2 - प^2_1$$

$$(अ_1 - अ_2)^2 (अ_2 - _3)^2 (अ_3 - अ_1)_2$$

$$= -\frac{1}{27}\left\{ (2प^3_1 - 9प_1प_2 + 27प_3)^2 + 4(3प_2 - प^2_1) \right\}$$

ऐसा होगा। इस प्रकार अनेक उदाहरण के उत्तर बड़े चमत्कार से होते हैं।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

(१) नीचे लिखे हुए समीकरणों से ऐसे नये समीकरण बनाओ जिनके मूल दिए हुए समीकरण के मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हों।

(१) $य^3 + 2य^2 - 5 = 0$ ।

(२) $य^5 - य^3 + य - 7 = 0$ ।

(३) $य^6 - य^5 + य + 8 = 0$ ।

(४) $य^8 - य^7 + य - 11 = 0$ ।

(२) नीचे दिए हुए तीन समीकरणों से नये ऐसे तीन समीकरण बनाओ जिनके मूल क्रम से दिए हुए समीकरण के मूल से १, २, और ३ न्यून हों।

(१) $य^3 - 2य^2 + 5य - 7 = 0$ ।

(२) $य^7 - य^5 + य - 11 = 0$ ।

(३) $य^6 - य^2 + य - 21 = 0$ ।

(३) नीचे लिखे हुए समीकरण से नये ऐसे समीकरण बनाओ जिनमेँ द्वितीय पद उड़ जायः—

(१) $य^{५} - य^{४} + य^{३} + ५य - ७ = ०$ ।

(२) $य^{६} + ५य^{५} - य + ७ = ०$ ।

(३) $य^{४} - १६य^{३} + ५०य^{२} + य - २ = ०$ ।

(४) नीचे लिखे हुए समीकरणोँ से ऐसे नये समीकरण बनाओ जिनमेँ तीसरा पद उड़ जायः—

(१) $य^{३} + ५य^{२} + ८य - ३ = ०$ ।

(२) $य^{३} - ६य^{२} + ९य - ११ = ०$ ।

(३) $य^{४} - ८य^{३} + १८य^{२} - १६य + १४ = ०$ ।

(४) $य^{४} - १८य^{३} - ६०य^{२} + ३य - २ = ०$ ।

(५) $य^{३} + ३य^{२} + \frac{१}{९}य + \frac{१}{१६} = ०$ इस से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिनमेँ सब पदोँ के गुणक अभिन्न होँ।

(६) नीचे लिखे हुए समीकरणोँ से ऐसे समीकरण बनाओ जिनके मूल पहले समीकरण के दो दो मूलोँ के अन्तर के वर्ग के समान होँ। और यह भी बताओ कि दिए समीकरण के मूल कैसे होँगे।

(१) $य^{३} - ८य - २ = ०$ ।

(२) $य^{३} - ७य - ७ = ०$ ।

(७) $य^{४} + य^{२} - ८य - ९ = ०$ इस समीकरण में दिखलाओ कि य के मान, एक धन और एक ऋण सम्भाव्य संख्या होंगे जो कि −१ और २ के बीच में हैं। इनके अतिरिक्त और कोई मान सम्भाव्य संख्या नहीँ है।

(८) $य^3 + प_1 य^2 + प_2 य + प_3 = 0$ इस में य के मान $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ हैं। ऐसे समीकरण बनाओ जिनके नीचे लिखे हुए मूल आवें:—

(१) $\frac{अ_1}{अ_2 + अ_3}, \frac{अ_2}{अ_1 + अ_3}, \frac{अ_3}{अ_1 + अ_2}$ ।

(२) $अ^2_1, अ^2_2, अ^2_3$ ।

(३) $अ_1 + अ_2, अ_1 + अ_3, अ_2 + अ_3$ ।

(४) $\frac{1}{अ_1 + अ_2}, \frac{1}{अ_1 + अ_3}, \frac{1}{अ_2 + अ_3}$ ।

(५) $\frac{अ_1}{अ_2 अ_3}, \frac{अ_2}{अ_1 अ_3}, \frac{अ_3}{अ_1 अ_2}$ ।

(६) $\sqrt{ज अ_1}, \sqrt{ज अ_2}, \sqrt{ज अ_3}$ ।

(७) $\frac{1}{3}(अ_1 + अ_2 - अ_3), \frac{1}{3}(अ_1 + अ_3 - अ_2),$
$\frac{1}{3}(अ_2 + अ_3 - अ_1($

(८) $अ_2 + अ_3 + ज अ_1, अ_3 + अ_1 + ज अ_2,$
$अ_1 + अ_2 + ज अ_3$ ।

(९) $\frac{अ_1}{अ_2 + अ_3 - अ_1}, \frac{अ_2}{अ_1 + अ_3 - अ_2}, \frac{अ_3}{अ_1 + अ_2 - अ_3},$

(१०) $अ_2 अ_3 + \frac{1}{अ_1}, अ_1 अ_3 + \frac{1}{अ_2}, अ_1 अ_2 + \frac{1}{अ_3},$

(११) $अ^2_1 + अ^2_2, अ^2_1 + अ^2_3, {}^2_2 + अ^2_3$

(१२) $\frac{अ_२}{अ_३}+\frac{अ_३}{अ_२}, \frac{अ_३}{अ_१}+\frac{अ_१}{अ_३}, \frac{अ_१}{अ_२}+\frac{अ_२}{अ_१}$

(१३) $\frac{अ^२_२+अ^२_३}{अ_२ अ_३}, \frac{अ^२_३+अ^२_१}{अ_१ अ_३}, \frac{अ^२_१+अ^२_२}{अ_१ अ_२}$

(१४) $अ_२-अ_३, अ_३-अ_२, अ_१-अ_१$

(१५) $अ^२_२ अ^२_३, अ^२_१ अ^२_३, अ^२_१ अ^२_२$

(१६) $\left(\frac{अ_१}{अ_२-अ_३}\right)^२, \left(\frac{अ_२}{अ_१-अ_३}\right)^२, \left(\frac{अ_३}{अ_१-अ_२}\right)^२$

(९) $य^३-५य^२+११य-६=०$ इसमें यदि य के मान $अ_१, अ_२, अ_३$ हों तो एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें य के मान $\frac{१}{अ^२_१+अ^२_२}, \frac{१}{अ^२_१+अ^२_३}, \frac{१}{अ^२_२+अ^२_३}$ ये हों।

(१०) $य^३+प_१ य^२+प_२ य+प_३=०$ इसके मूल यदि $अ_१, अ_२, अ_३$ हों तो वह समीकरण कैसा होगा जिसके मूल $\frac{अ^३_२+अ^३_३}{अ^३_१}, \frac{अ^३_१+अ^३_३}{अ^३_२}, \frac{अ^३_१+अ^३_२}{अ^३_३}$ ये हों।

(११) $य^३+प_१ य^२+प_२=०$ इसमेँ यदि $प^२_१$ यह $३.प_२$ इससे अल्प हो तो सिद्ध करो कि यहाँ ऐसा समीकरण नहीं बन सकता जिसमेँ तीसरा पद न रहे।

(१२) सिद्ध करो कि $य^३+प_१ य^२+प_२ य+प_३=०$ इसमेँ यदि $प^२_१=३ प_२$ तो एक ही बार की क्रिया में ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमेँ दूसरा और तीसरा दोनों पद उड़ जायँगे।

(१३) नीचे लिखे हुए समीकरण में य का मान बताओ:—

(१) $य^३ - ६ य^२ + १२ य - ३ = ०$ ।

(२) $य^३ + ९ य^२ + २७ य - २१ = ०$ ।

(१४) सिद्ध करो कि $य^४ + प_१ य^३ + प_२ य^२ + प_३ य + प_४ = ०$ इसमें यदि

$८प_३ = प_१ (४प_२ - प^२_१)$ तो एक ही बार में एक ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और चौथा ये दोनों पद उड़ जायँगे।

(१५) नीचे लिखे हुए समीकरणों में य के मान बताओ:—

(१) $य^४ + २य^३ + ८य^२ + ७य - १० = ०$ ।

(२) $य^४ - २य^३ + ४य^२ + ३य - ६ = ०$ ।

(१६) सिद्ध करो कि $य^३ + ४य^२ + \frac{१६}{३} य + १ = ०$ इससे एक ही बार ऐसा एक नया समीकरण बना सकते हैं जिसमें दूसरा और तीसरा ये दोनों पद उड़ जायँ परन्तु इसी समीकरण को य से गुण कर जो एक चतुर्घात समीकरण बनेगा उससे एक ही बार ऐसा एक समीकरण नहीं बन सकता जिसमें दूसरा और तीसरा ये दो पद न रहें।

(१७) सिद्ध करो कि $य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \dots\dots + प_{न-१} य + प_न = ०$ इसमें यदि $\frac{प^२_१ (न-१)}{२न} = प_२$ तो एक ही बार में ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें दूसरा और तीसरा ये दोनों पद उड़ जायँगे।

४—धनर्णमूल

४२—२१-२३ और २५वें प्रक्रमों में धनात्मक तथा ऋणात्मक मूल के विषय में कुछ विशेष लिख आए हैं। अब यहाँ पर साधारण एक सिद्धान्त, कुछ परिभाषा लिखने के अनन्तर ऐसा दिखलाते हैं जिससे स्पष्ट विदित होगा कि फ(य) = ० इसके कितने मूल धन और कितने ऋण होंगे।

४३—क्रमिक पदयूथ—अनेक पदों के यूथ में एक धन, दूसरा ऋण, तीसरा धन, चौथा ऋण इस प्रकार से एकान्तर सब पद एक चिन्ह के हों तो ऐसे पदयूथ को क्रमिक कहते हैं।

सर पद—एक चिन्ह वाले पद के अनन्तर उसी चिन्ह का यदि दूसरा पद आवे तो इस दूसरे पद को सर कहते हैं।

व्यत्यास पद—एक चिन्ह वाले पद के अनन्तर यदि भिन्न चिन्ह का दूसरा पद हो तो इस दूसरे पद को व्यत्यास कहते हैं।

जैसे $य^७ - २य^६ + ३य^५ - ४य^४ + २य^३ - ५य^२ + ३य - २$ इस में एक धन, दूसरा ऋण इस क्रम से सब पद हैं इस लिये इस पदयूथ को क्रमिक कहेंगे। और $य^९ - २य^८ - ३य^७ - ५य^६ + ४य^५ + २य^४ + ३य^३ - य^२ - य + २$ इसमें एक सर $-३य^७$ पर, दूसरा $५य^६$ पर, तीसरा $+२य^४$ पर, चौथा $+३य^३$ पर और पांचवाँ $-य$ पर है इस लिये यहाँ पांच सर हैं। और एक व्यत्यास $-२य^८$ पर, दूसरा $+४य^५$ पर, तीसरा $-य^२$ पर और चौथा $+२$ पर है इसलिये यहाँ चार व्यत्यास हैं।

इस प्रकार और उदाहरणों में भी समझ लेना चाहिए।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि जिन पद यूथों में आदि पद सर्वदा धन रहता है उसका यदि अन्त पद धन हो तो उसमें व्यत्यास शून्य वा सम होगा और यदि अन्त पद ऋण हो तो व्यत्यास विषम होगा।

यह स्पष्ट है कि किसी पूर्ण समीकरण में (४प्रक्रम देखो) सब सर और व्यत्यासों का योग उस संख्या के तुल्य होगा जो संख्या कि य के सबसे बड़े घात में है।

जैसे ऊपर के उदाहरण में नव सब से अधिक य का घात है तो सब सर पाँच और सब व्यत्यास चार ये दोनों मिल कर भी नव ही हुए।

फ (य) =० इस पूरे समीकरण में य के स्थान में —य का उत्थापन दें तो फ (—य) में स्थिति उलट जायगी अर्थात् फ (य) में जितने सर होंगे उतने ही फ (—य) में व्यत्यास होंगे और फ (य) में जितने व्यत्यास होंगे उतने फ (—य) में सर होंगे। फ (य) =० यह यदि पूरा समीकरण न हो तो फ (य) और फ (—य) के व्यत्यासों का योग स्पष्ट है कि समीकरण के घात संख्या से अधिक नहीं हो सकता क्योंकि पूरे समीकरण के पद कम हों तो फ (य) और फ (—य) में व्यत्यासों की संख्या भी कम होगी।

४४—डेस्कार्टिस की चिन्ह रीति। धन और ऋण मूल—किसी पूरे वा अधूरे समीकरण में व्यत्यासों की संख्या से अधिक धनात्मक मूल नहीं आ सकते और किसी

इसकी व्यत्यास संख्या से अधिक फ (−र) =० इसके मूल धनात्मक न आवेंगे। इसलिये फ (य) इसकी सर संख्या से अधिक फ (य) =० इसके मूल ऋणात्मक न आवेंगे।

४५—चाहे पूरा या अधूरा फ (य) =० यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रम की युक्ति से फ (य) इसमें जितने व्यत्यास होंगे उससे अधिक फ (य) =० इसके धनात्मक मूल न आवेंगे और फ (−य) इसमें भी जितने व्यत्यास होंगे उससे अधिक फ (−य) =० इसके मूल धनात्मक न आवेंगे परन्तु फ (य)=० इसके मूल फ (−य)=० इसके मूल के तुल्य विरुद्ध चिन्ह के हैं अर्थात् फ (य)=० इसके धनात्मक मूल फ (−य)=० इसके ऋणात्मक मूल हैं। इसलिये फ (य) और फ (−य) इन दोनों के व्यत्यास संख्याओं के योग से फ (य) =० इसके धनात्मक और ऋणात्मक मूलों का योग अधिक न होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि चाहे फ (य)=० यह समीकरण पूरा वा अधूरा हो इसके जितने सम्भाव्य मूल होंगे वे फ (य) और फ (−य) इनके व्यत्यास सख्याओं के योग से अधिक न होंगे।

जैसे यदि फ (य)=य४ + ५य२ + ७य − ६=०

तो फ (−य)=य४ + ५य२ − ७य − ६=०

फ (य) में एक व्यत्यास है इसलिये फ (य)=० इसका एक से अधिक धनात्मक मूल न आवेगा और फ (−य) इसमें भी एक ही व्यत्यास है इसलिये फ (−य)=० इसका भी एक से अधिक धनात्मक मूल न आवेगा वा फ (य)=० इसका एक से अधिक ऋणात्मक मूल न आवेगा।

अर्थात् दोनों व्यत्यासों के योग दो से अधिक फ (य)=० इसके सम्भाव्य मूल न आवेंगे। परन्तु २२वें प्रक्रम से यहाँ य के सम्भाव्य मान दो से कम न आवेंगे इसलिये स्पष्ट है कि इस समीकरण के दो ही सम्भाव्य मूल आवेंगे जिनमें एक धनात्मक और एक ऋणात्मक होगा।

यदि फ (य)=य^3 + प$_2$य + प$_3$=०......(१) इसमें प$_2$ और प$_3$ दोनों धन संख्या हों तो यहाँ व्यत्यास का अभाव हुआ इसलिये इस समीकरण का कोई धनात्मक मूल न आवेगा। यही बात २१वें प्रक्रम से भी सिद्ध होगी।

ऊपर के समीकरण में यदि य के स्थान में −य का उत्थापन दें तो फ (−य)=−य^3 − प$_2$य + प$_3$=०=य^3 + प$_2$य − प$_3$ इसमें एक व्यत्यास हुआ इसलिये (१) समीकरण का एक ही मूल ऋणात्मक आवेगा। परन्तु २१वें प्रक्रम से सिद्ध है कि फ (य)=० इसके मूलों में से एक अवश्य ऋणात्मक आवेगा। इसलिये दोनों नियमों के बल से स्पष्ट हुआ कि यहाँ अवश्य एक मूल ऋणात्मक होगा और वही एक कोई सम्भाव्य संख्या है। ऊपर दिया हुआ एक त्रिघात समीकरण है इसलिये इसके तीन मूल आवेंगे। तिनमें सिद्ध हो चुका है कि एक मूल ऋणात्मक सम्भाव्य संख्या होगा। इसलिये बाकी दो मूल अवश्य असंभाव्य संख्या होंगे।

फिर यदि फ (य)=य^3 − प$_2$य + प$_3$=० जहाँ प$_2$ और प$_3$ धन संख्या हैं तो यहाँ व्यत्यास की संख्या दो है इसलिये इस समीकरण के दो से अधिक धनात्मक मूल न आवेंगे और फ (−य)=य^3 + प$_2$य − प$_3$=० इसमें एक व्यत्यास है इसलिये फ (य)=० इसका एक से अधिक ऋणात्मक मूल न आवेगा।

परन्तु २१वें प्रक्रम से सिद्ध है कि इसका कम से कम एक मूल ऋणात्मक अवश्य आवेगा, इसलिये दोनों नियमों के मिलाने से अवश्य एक ही कोई ऋणात्मक मूल होगा। यह तो सिद्ध हुआ परन्तु बाकी दो मूलों के विषय में कुछ भी कहा नहीं जा सकता कि वे धनात्मक सम्भाव्य वा असम्भव संख्या होंगे। इसलिये यहाँ डेस्कार्टिस की युक्ति से काम नहीं चला क्योंकि उनकी युक्ति ने केवल इतना ही पता दिया कि फ (य)=० इसके दो से अधिक धनात्मक मूल नहीं आवेंगे। इसलिये सम्भव है कि कोई मूल धनात्मक न हो। परन्तु यहाँ ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से एक नया समीकरण

$$र^{३} - ६प_{२}र^{२} + ९प^{२}_{२}र + २७प^{२}_{३} - ४प^{३}_{२} = ०$$

ऐसा बनैगा जिसके मूल पहले समीकरण के मूलों के अन्तरवर्ग के समान होंगे। इसलिये यहाँ डेस्कार्टिस की युक्ति वा २५वें प्रक्रम के २ प्रसिद्धार्थ से यदि $२७प^{२}_{३} - ४प^{३}_{२}$ यह ऋण हो तो समीकरण का कोई मूल ऋणात्मक न आवेगा इसलिये फ (य)=० इसका कोई मूल असम्भव संख्या न होगा। परन्तु यदि $२७प^{२}_{३} - ४प^{३}_{२}$ यह धन होगा तब तो २१वें प्रक्रम से समीकरण का कम से कम एक मूल अवश्य ऋणात्मक होगा। इसलिये फ (य)=० इसके दो मूल अवश्य असम्भव होंगे।

४६—यदि ध्यान देकर विचारो तो २५वें प्रक्रम से सब प्रसिद्धार्थ डेस्कार्टिस की युक्ति से निकल सकते हैं और २३वें प्रक्रम में जो सिद्धान्त है वह भी डेस्कार्टिस की युक्ति और २१-२२वें प्रक्रम के सिद्धान्त से सिद्ध हो सकता है।

४७—यदि यह विदित हो कि फ (य)=० इस न घात के अधूरे समीकरण के सब मूल सम्भाव्य संख्या हैं और फ (य) में अन्त पद य से स्वतन्त्र है तो फ (य) के व्यत्यास व्य$_१$ के तुल्य इस समीकरण के धनात्मक मूल और फ (−य) के व्यत्यास व्य$_२$ के तुल्य ऋणात्मक मूल होंगे क्योंकि सब सम्भाव्य मूल व्य$_१$+व्य$_२$ इससे अधिक नहीं हो सकते (४५वाँ प्रक्रम देखो) और व्य$_१$+व्य$_२$ यह समीकरण के सबसे बड़े घात न संख्या से अधिक भी नहीं हो सकता (४३वाँ प्रक्रम देखो) परन्तु यह जानते हैं कि सब मूल सम्भाव्य हैं इसलिये वे इस न घात समीकरण में न संख्या के तुल्य होंगे। दोनों नियमों के मिलान से स्पष्ट है कि व्य$_१$+व्य$_२$=न ऐसा होगा। यदि ऐसा न हो तो एक नियम के मानने से दूसरे का व्यभिचार हो जायगा।

जब व्य$_१$+व्य$_२$=न तो धनात्मक मूल अवश्य व्य$_१$ के समान होंगे। यदि कहो कि व्य$_१$ के समान न होंगे तो ४५वें प्रक्रम से वे व्य$_१$ से न्यून होंगे। इसलिये व्य$_१$ से न्यून को व्य$_१$+व्य$_२$=न इसमें घटा देने से व्य$_२$ से अधिक जो शेष बचैगा उसके समान ऋणात्मक मूल होंगे परन्तु ऊपर सिद्ध हो चुका है कि ऋणात्मक मूलों की संख्या व्य$_२$ से अधिक नहीं हो सकती इसलिये धनात्मक मूलों की संख्या व्य$_१$ से न्यून मानना असम्भव हुआ। इससे निश्चय हुआ कि व्य$_१$ के ही समान धनात्मक मूलों की संख्या और व्य$_२$ के समान ऋणात्मक मूलों की संख्या होती हैं।

जैसे यह जानते हैं कि फ (य)=य^३ − १६य + ३०=० इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य हैं तो फ (य) में व्यत्यास की

संख्या दो हैं इसलिये समीकरण के दो मूल धनात्मक और फ $(-य)$ इसमें एक व्यत्यास होने से एक ही मूल ऋणात्मक होगा।

फ $(य)=0$ इस न घात समीकरण को $य^त$ इससे गुण देने से नया समीकरण $न+त$ घात का होगा जिसके त मूल शून्य और ऊपर की युक्ति से सब सम्भाव्य मूलों की संख्या न के तुल्य वा फ $(य)$ और फ $(-य)$ इनके व्यत्यास $व्य_1$ और $व्य_2$ के योग के समान होंगी इसलिये यहाँ यदि $त+न=म$ तो $न=म-त=व्य_1+व्य_2$। इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि फ $(य)=0$ इसमें यदि अन्तिम पद य से स्वतन्त्र न हो और यह विदित हो कि इसके सब मूल सम्भाव्य हैं तो य के सब से छोटी घात संख्या त के समान शून्य मूल और फ $(य)$ और फ $(-य)$ के व्यत्यासों के समान क्रम से धनात्मक और ऋणात्मक मूल होंगे।

४८—जब ४५वें प्रक्रम से सिद्ध है कि फ $(य)=0$ इस समीकरण के सम्भाव्य मूल फ $(य)$ के व्यत्यास $व्य_1$ और फ $(-य)$ के व्यत्यास $व्य_2$ के योग $व्य_1+व्य_2$ से अधिक नहीं हो सकते तब सब मूलों के योग न संख्या में घटा देने से शेष $न-(व्य_1+व्य_2)$ इससे अल्प असम्भाव्य मूल न होंगे। अल्प तम असम्भाव्य मूल इस $न-(व्य_1+व्य_2)$ संख्या के समान होंगे।

४९—किसी पूरे म घात समीकरण के $आ \cdot य^म$ और $का \cdot य^व$ इन दो पदों के वश से फ $(य)$ और फ$(-य)^व$ में जो व्यत्यास होंगे—

कल्पना करो कि किसी पूरे म घात समीकरण के आ·य^{म} और का·य^{व} पदों के बीच बहुत से पद जिनका योग २त$_{१}$ सम संख्या है, उड़ गए हैं तो यदि म सम होगा तो इसमें २त$_{१}$+१ विषम संख्या घटा देने से शेष व यह विषम होगा और यदि म विषम हो तो २त$_{१}$+१ विषम को घटा देने से शेष व सम होगा। इसलिये य^{म} और य^{व} दोनों सम, विषम वा विषम, सम य के घात होंगे।

यदि आ और का एक ही चिन्ह के होंगे तो +य के मान में एक व्यत्यास और −य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा। इसलिये दोनों स्थितिओं में आ·य^{म} और का·य^{व} इन दो पदों के वश से फ (य) और फ (−य) में जो व्यत्यास होंगे उनका योग एक होगा।

इस प्रकार से का·य^{व} और खा·य^{प} इन पदों के बीच भी यदि सम पद २त$_{२}$ उड़ गए हों तो का·य^{व} और खा·य^{प} के वश से भी फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग एक ही होगा। यों दो दो पदों के बीच व्यत्यासों का योग एक एक होगा। मानो कि दो दो पदों के बीच २त$_{१}$, २त$_{२}$, २त$_{३}$,.......,२त$_{ग}$ पद उड़ गए हैं तो पूरे समीकरण के पद

$$म+१=१+(२त_{१}+१)+(२त_{२}+१)+(२त_{३}+१)+\cdots\cdots+(२त_{ग}+१)$$

$$=१+ग+(२त_{१}+२त_{२}+\cdots\cdots+२त_{ग})$$

$$\therefore म = ग+(२त_{१}+२त_{२}+\cdots\cdots+२त_{ग})$$

इसमें फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों के योग ग को घटा देने से कम से कम असम्भव मूल=२त$_{१}$+२त$_{२}$+······ +२त$_{ग}$=उड़े हुए पदों की संख्या।

कल्पना करो कि आ·य^{म} और का·य^{न} के बीच विषम पद २त$_{१}$+१ उड़ गए हैं तो म यदि सम होगा तो उसमें सम २त$_{१}$+२ घटा देने से न भी सम होगा और म यदि विषम होगा तो उसमें २त$_{१}$+२ सम घटा देने से न भी विषम ही होगा। इसलिये यदि आ और का एक ही चिन्ह के होंगे तो +य वा −य के वश से आ·य^{म} और का·य^{न} में एक भी व्यत्यास न होगा इसलिये व्यत्यासों का योग भी शून्य होगा और यदि आ और का विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो +य से एक और −य से भी एक व्यत्यास होगा इसलिये व्यत्यासों का योग दो होगा।

इसी प्रकार का·य^{न} और खा·य^{प} में भी का, खा के एक चिन्ह के होने से व्यत्यासों का योग शून्य और विरुद्ध चिन्ह के होने से व्यत्यासों का योग दो होगा।

यहाँ भी यदि दो दो पदों के बीच २त$_{१}$+१, २त$_{२}$+१,... २त$_{ग}$+१ पद उड़े हुए मानो और इन पर से पूरे सभी करण के पद बनाओ तो

$$म+१=१+\left\{(२त_{१}+१)+१\right\}+\left\{(२त_{२}+१)+१\right\}+\cdots\cdots+\left\{(२त_{ग}+१)+१\right\}$$

$$\therefore म=\left\{(२त_{१}+१)+१\right\}+\left\{(२त_{२}+१)+१\right\}+\cdots\cdots+\left\{(२त_{ग}+१)+१\right\}$$

इसमेँ यदि आ, का, खा इन्यादि मेँ दो दो के एक और विरुद्ध चिन्ह के वश से व्यत्यासोँ का योग जो शून्य वा दो होते हैँ घटाओ तो प्रत्येक खण्ड मेँ शेष $२त_१ + २$, $२त_२ + २$,......इत्यादि वा $२त_१$, $२त_२$......इत्यादि होँगे। इसलिये हर एक उड़े हुए झुण्ड के वश से आ, का,....इत्यादि दो दो के एक चिन्ह के होने से $२त_१ + २$,......इत्यादि, और विरुद्ध चिन्ह के होने से $२त_१$,...इत्यादि कम से कम असम्भव मूल होँगे।

(१) जैसे $य^८ - य^३ - २ = ०$ इसमेँ पहले दो पदोँ के बीच चार पद और दूसरे दो पदोँ के बीच दो पद उड़ गए हैँ और ये सम हैँ इसलिये इनके योग ४ + २ छ से कम इस समीकरण के मूल असम्भव न होंगे।

(२) $य^७ - २य^३ - ४य - २ = ०$ इसमेँ पहिले दो पदोँ के बीच विषम ३ पद उड़ गए हैँ और दोनोँ पदोँ के गुणक विरुद्ध चिन्ह के हैँ इसलिये उनके वश से कम से कम ३ + १ − २ = २ समीकरण के असंम्भव मूल हुए। दूसरे दो पदोँ $- २य^३$, $- ४य$ इनके बीच एक पद विषम उड़ गया है और इन दोनोँ के गुणक एक चिन्ह के हैँ इसलिये इनके वश से कम से कम १ + १ − ० = २ समीकरण के असम्भव मूल हुए। इसलिये दिए हुए समीकरण के मूल इन दोनोँ के योग चार से कभी कम असम्भव न होँगे।

(३) और $य^९ - ३य^४ - २ = ०$ इसमेँ पहिले दो पदोँ के बीच चार पद उड़ गए हैँ और ये सम हैँ इसलिये इनके वश से समीकरण के ४ असम्भव मूल हुए और $- ३य^४$, $- २$, इन

दोनों के बीच ३ पद उड़े हैं और ये विषम और दोनों पदों के गुणक एक जाति के हैं इसलिये इनके वश से $(२त_१ + १) + १ = ३ + १ = ४$ असम्भव मूल हुए। इसलिये दोनों के योग ८ से कम समीकरण के असम्भव मूल न होंगे।

इसी प्रकार और उदाहरणों में जान लेना चाहिए।

५०—४९वें प्रक्रम से स्पष्ट होता कि फ (य) और फ (—य) के व्यत्यासों के योग $व्य_१ + व्य_२$ इसको यदि समीकरण की घात संख्या म में घटाओ तो शेष $म - व्य_१ - व्य_२$ यह सर्वदा सम ही रहता है इसलिये २७वें प्रक्रम की युक्ति से कह सकते हो कि किसी फ (य)=० इस म घात समीकरण में फ (य) के व्यत्यास $व्य_१$ और फ (—य) के व्यत्यास $व्य_२$ के योग $व्य_१ + व्य_२$ को म में घटाने से शेष $म - व्य_१ - व्य_२$ से २, ४, ६ इत्यादि सम संख्या अधिक समीकरण के असम्भव मूल होंगे वा कम से कम $म - व्य_१ - व्य_२$ इसके तुल्य असम्भव मूल होंगे। इसलिये इसमें जिस इष्ट गुणित २ को जोड़ देने से संख्या म से न्यून और सैक इष्ट गुणित २ को जोड़ देने से संख्या म से अधिक हो तो उस इष्ट गुणित २ के जोड़ देने से जो म से न्यून संख्या हुई है उससे अधिक असम्भव मूल नहीं हो सकते।

जैसे ऊपर के प्रक्रम के (३) उदाहरण में कम से कम असम्भव मूल की संख्या$= म - व्य_१ - व्य_२ = ८$ आई है इसमें एक गुणित २ के जोड़ने से १० संख्या म=९ से अधिक होती है इसलिये ८ से अधिक असम्भव मूल नहीं हो सकते। दोनों नियमों के मिलान से सिद्ध होता है कि यहाँ अवश्य ही

असम्भव मूल = आवेंगे इसलिये इसे म में घटा देने से निश्चय हुआ कि यहाँ एक मूल अवश्य सम्भाव्य आवेगा।

इसी प्रकार (२) उदाहरण में सिद्ध होता है कि ६ से अधिक असम्भाव्य मूल न होंगे इसलिये इसे म=७ में घटा देने से निश्चय हुआ कि इस समीकरण का कम से कम एक मूल अवश्य सम्भाव्य आवेगा। यही बात २१वें प्रक्रम से भी सिद्ध होती है।

विद्यार्थिओं को चाहिए कि इस प्रकार से जिस समीकरण में जैसा सम्भव हो विचार कर धनर्ण मूलों का पता लगावें।

सर और व्यत्यास के स्मरणार्थ श्लोक।

आवृत्तिर्यत्र चिह्नस्य पदे स सरसञ्ज्ञकः।
निवृत्तिर्यत्र चिह्नस्य पदे व्यत्यास सञ्ज्ञकः ॥ १ ॥

दोहा

पिछले पद के चिन्ह हो जेहि पद में सर सोय।
भिन्न चिन्ह जेहि में बसै बुध व्यत्यास सो होय ॥ १ ॥

धनर्णमूल के स्मरणार्थ श्लोक।

व्यत्यासमानादधिकानि न स्युर्नूनं स्वमूलानि समीकृतौ हि।
सराख्यमानादधिका ऋणाख्यमितिस्तथा पूर्ण समीकृतौ न ॥ २ ॥

दोहा

समीकरण के मूल धन व्यत्यासाधिक नाहिं।
ऋणमिति सर से अधिक नहिं पूर्ण समीकृति माहिं ॥ २ ॥

अभ्यास के लिये प्रश्न

(१) क्रमिक पद किसे कहते हैं।

(२) सर और व्यत्यास किसे कहते हैं।

(३) यदि फ (य)=० यह पूर्ण समीकरण हो तो फ (य) में जितने सर होंगे उतने ही फ (−य) में व्यत्यास होंगे, इसे सिद्ध करो।

(४) सिद्ध करो कि किसी अधूरे फ (य)=० इस न घात समीकरण में फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग न से अधिक नहीं हो सकता।

(५) दिखलाओ कि $य^5 - २य^2 + ४ = ०$ इसके कम से कम दो असम्भव मूल होंगे।

(६) साबित करो कि $य^7 - ३य^4 + य^2 - २ = ०$ इसके अधिक से अधिक ६ असम्भव मूल होंगे।

(७) डेस्कार्टिस की युक्ति की उपपत्ति क्या है।

(८) फ (य)=० इस अधूरे न घात समीकरण के सब मूल यदि सम्भाव्य हों तो सिद्ध करो कि फ (य) और फ (−य) के व्यत्यासों का योग न के समान होगा।

(९) न घात का फ (य)=० यह पूरा और फा (य)=० यह अधूरा ये दो समीकरण हैं जिनके सब मूल सम्भाव्य हैं और फ (य) और फा (य) के व्यत्यास भी तुल्य हैं तो दिखाओ कि फा (−य) के व्यत्यास फ (य) के सर के तुल्य होंगे।

५—तुल्यमूल

५१—कभी कभी ऐसा भी हो सकता है कि समीकरण के बहुत से मूल तुल्य ही आवें। जैसे फ $(य)=(य-३)^३=०$ वा $य^३-९य^२+२७य-२७=(य-३)(य-३)(य-३)=०$। स्पष्ट है कि इसके तीनों मूल समान ही हैं। इसलिये समीकरणों में इस बात की परीक्षा करना कि इनके कितने मूल तुल्य हैं यह आवश्यक हुआ। मान लो कि मूल $अ_१$ त—वार, $अ_२$ थ—वार, $अ_३$ द—वार इत्यादि आए हैं तो ऐसी स्थिति में फ $(य)=प_० (य-अ_१)^त (य-अ_२)^थ (य-अ_३)^द \ldots\ldots=०$ इस प्रकार का समीकरण होगा।

५२—अकरणीगत अभिन्न अव्यक्त य का फल फ (य) यदि फा(य) × फि(य) × फी(य) × ………… इसके बराबर है तो फ′(य) प्रथमोत्पन्न फल फा′(य) × फि(य) × फी(य) + फि′(य) × फा(य) × फी(य)… + फी′(य) × फा(य) × फि(य) … …+… ….. इत्यादि के समान होगा।

कल्पना करो कि फ (य)=स=फा (य) × फि (य)

तो १०वें प्रक्रम से स′=फा (य+च) × फि(य+च)

और स′ − स=फा (य+च) × फि(य+च) − फा(य) × फि(य)

$$=\text{फा}(य+च)\times\text{फि}(य+च)$$
$$-\text{फा}(य+च)\times\text{फि}(य)+\text{फा}(य+च)\times\text{फि}(य)$$
$$-\text{फा}(य)\times\text{फि}(य)$$
$$=\text{फा}(य+च)\left\{\text{फि}(य+च)-\text{फि}(य)\right\}$$
$$+\text{फि}(य)\left\{\text{फा}(य+च)-\text{फा}(य)\right\}$$

दोनों पक्षों में च का भाग देने से

$$\frac{स'-स}{च}=\text{फा}(य+च)\left\{\frac{\text{फि}(य+च)-\text{फि}(य)}{च}\right\}$$
$$+\text{फि}(य)\left\{\frac{\text{फा}(य+च)-\text{फा}(य)}{च}\right\}$$

च को शून्य मानने से

$$\frac{स'-स}{च}=\text{फ}'(य)=\text{फि}'(य)\times\text{फा}(य)+\text{फा}'(य)\times\text{फि}(य),\ldots(१)$$

यदि फा $(य)$ वा फि $(य)$, $(य-अ)^{न}$ इस प्रकार का हो तो मान लो कि

$स=(य-अ)^{न}$ । इसलिये १०वें प्रक्रम से

$$\therefore\ स'=(य-अ+च)^{न}=\left\{(य-अ)+च\right\}^{न}$$
$$=(य-अ)^{न}+न\cdot च(य-अ)^{न-१}+आ_{०}च^{२}+आ_{१}च^{३}+\cdots$$
$$\therefore\ \frac{स'-स}{च}=न(य-अ)^{न-१}+आ_{०}च+आ_{१}च^{२}+\cdots\cdots\cdots$$

ञ को शून्य मानने से

$$फा'(य)=न(य-अ)^{न-१}=\frac{न(य-अ)^न}{(य-अ)}=\frac{न\ फा(य)}{य-अ}, \ldots\ldots(२)$$

यदि फ (य)=फा (य) × फि (य) × फी (य)............तो

(१) समीकरण से सिद्ध कर सकते हो कि

$$फ'(य)=फा'(य)\times फि(य)\times फी(य)$$
$$+ फि'(य)\times फा(य)\times फी(य)+\ldots\ldots (३)$$

५३—यदि फ (य) और फ' (य) में अव्यक्तात्मक कोई महत्तमापवर्त्तन आवे तो फ (य)=० के तुल्य-मूल आवेंगे और यदि महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक न आवे तो तुल्य मूल न आवेंगे।

५१वें प्रक्रम के समीकरण को जिसके अनेक मूल तुल्य आते हैं लेने से

$$फ(य)=प_० (य-अ_१)^त (य-अ_२)^थ (य-अ_३)^द\ldots\ldots$$

५२वें प्रक्रम के (२) और (३) समीकरण से

$$फ'(य)=प_० \Big\{ त(य-अ_१)^{त-१} (य-अ_२)^थ (य-अ_३)^द\ldots\ldots$$
$$+थ(य-अ_२)^{थ-१} (य-अ_१)^त (य-अ_३)^द\ldots\ldots$$
$$+द(य-अ_३)^{द-१} (य-अ_१)^त (य-अ_२)^थ\ldots+\ldots\Big\}$$

$$=\frac{त\,फ(य)}{य-अ_1}+\frac{थ\,फ(य)}{य-अ_2}+\frac{द\,फ(य)}{य-अ_3}+\ldots\ldots$$

$$=फ(य)\left\{\frac{त}{य-अ_1}+\frac{थ}{य-अ_2}+\frac{द}{य-अ_3}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=प_0\,(य-अ_1)^{त}\,(य-अ_2)^{थ}\,(य-अ_3)^{द}\ldots\ldots$$

$$\left\{\frac{त}{य-अ_1}+\frac{थ}{य-अ_2}+\frac{द}{य-अ_3}+\ldots\ldots\right\};$$

इस से स्पष्ट है कि $फ'(य)$ के प्रत्येक पद में गुरय गुणक रूप अव्यक्त खण्ड $(य-अ_1)^{त-1}\,(य-अ_2)^{थ-1}\,(य-अ_3)^{द-1}\ldots\ldots$ यह रहेगा। इसलिये ऐसी स्थिति में $फ(य)$ और $फ'(य)$ में अवश्य अव्यक्तात्मक कोई महत्तमापवर्त्तन निकलेगा जिससे सिद्ध होता है कि यदि $फ(य)$ और $फ'(य)$ में कोई महत्तमापवर्त्तन आवे तो अवश्य $फ(य)=0$ के तुल्य मूल आवेंगे और यदि महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक न आवे तो तुल्य मूल न आवेंगे क्योंकि जब त=थ=द=१ तब तुल्य मूल न आवेंगे और तब $फ'(य)$ में भी $(य-अ_1)^{त-1}\,(य-अ_2)^{थ-1}\,(य-अ_3)^{द-1}=1$. यह होने से

$$फ'(य)=प_0\left\{(य-अ_2)(य-अ_3)\ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+(य-अ_1)(य-अ_3)\ldots+(य-अ_1)(य-अ_2)\ldots+\ldots\right\},$$

जिसमें $फ(य)$ का कोई गुरय गुणकरूप अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन आवे।

जैसे यदि $फ(य)=य^4-९य^3+२९य^2-३९य+१८=0$

यहाँ $फ'(य)=४य^3-२७य^2+५८य-३९$

क्रिया करने से फ (य) और फ' (य) का महत्तमापवर्त्तन य − ३ आता है इससे जान पड़ा कि फ (य) में $(य-३)^{२}$ यह एक गुणकरूप खण्ड है।

$$\text{इस पर से } फ(य) = (य-३)^{२}\,(य^{२}-३य+२)$$
$$= (य-३)^{२}\,(य-१)\,(य-२) = ०$$

इसलिये य के मान, ३, ३, १, २ ये हुए।

इसी प्रकार $फ(य) = २य^{४} - ८य^{३} + १४य^{२} - २४य + २४ = ०$

इसमें फ (य) और फ' (य) का महत्तमापवर्त्तन य − २ आता है इसलिये $फ(य) = (य-२)^{२}\,(२य^{२}+६) = ०$। इसमें य के मान २, २, $+\sqrt{-३}$, $-\sqrt{-३}$ ये हुए।

५४—२९वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$फ(य) = प_{०}\,(य-अ_{१})\,(य-अ_{२})\,(य-अ_{३})\cdots\cdots$$
$$फा(य) = प'_{०}\,(य-अ'_{१})\,(य-अ'_{२})\,(य-अ'_{३})\cdots\cdots$$

इनका रूप जो ऊपर गुण्य गुणक रूप खण्ड में दिखलाया है वह एक ही यही है दूसरा इसके अतिरिक्त नहीं है जिसमें $(य-अ_{१})$……इत्यादि खण्डों के एकाधिक घात हों वा $(य-अ_{१})$……इत्यादि खण्डों में से कई एक न हों।

(अब य का एक फल फि (य) ऐसा हो जिसमें य का सब से बड़ा घात हो और वह फ (य), फा (य) को निःशेष करता हो तो फि (य) उन अव्यक्त के एक घात खण्डों के घात के तुल्य होगा जो फ (य) और फा (य) में उभयनिष्ठ हैं।

इसी फि (य) को फ (य) और फा (य) का महत्तमापवर्त्तन कहते हैं।

५५—५३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि यदि फ (य) में $(य-अ_1)^त$ एक खण्ड रहेगा तो फ′ (य) में $(य-अ_1)^{त-1}$ खण्ड रहेगा। इसलिये फ (य)=० इसके यदि त मूल जो अ के समान होंगे तो फ′ (य)=० इसके त−१ मूल अ के समान होंगे। इसलिये यदि त−१ यह रूप से अधिक हो तो फ′ (य) और फ″ (य) में भी कोई अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन होगा और पूर्व युक्ति से फ″ (य)=० इसके त−२ मूल $अ_1$ के समान होंगे। इस प्रकार से आगे भी क्रिया करते जाओ तो सिद्ध होगा कि फ (य)=० जिसके $(य-अ_1)^त$ खण्ड हों जिनके कारण समीकरण के त तुल्य मूल $अ_1$ के समान आते हैं तो फ′ (य), फ″ (य),..... $फ^{त-1}$ (य) सब शून्य के समान होंगे यदि य=अ।

जैसे यदि
$$फ (य)=य^5-2य^4+2य^3+8य^2-7य+2$$
$$फ' (य)=5य^4-8य^3+6य^2+16य-7$$
$$फ'' (य)=20य^3-24य^2+12य+16$$
$$फ''' (य)=60य^2-48य+12$$
..........=............

इनमें यदि य=१, तो फ(य), फ′(य), फ″(य), फ‴(य)...... इस श्रेढी में आदि के तीन शून्य होते हैं परन्तु फ‴ (य)...... इत्यादि शून्य के तुल्य नहीं होते इसलिये स्पष्ट हुआ कि फ(य) में $(य-1)^3$ यह एक खण्ड है इस पर से

$$फ (य)=(य-1)^3 (य^2+य-2)।$$

यदि यह जानते हैं कि फ (य)$=य^3+त_2य^2+त_3य+त_4=0$ इसके तीन मूल तुल्य हैं तो $त_2$, $त_3$ और $त_4$ में आपस में क्या सम्बन्ध है।

यहाँ $फ(य)=य^४+त_२य^२+त_३य+त_४$

$फ'(य)=४य^३+२त_२य+त_३$

$फ''(य)=१२य^२+२त_२$

इसलिये $फ''(य)$ को शून्य के तुल्य मानने से

$$य^२=-\frac{२त_२}{१२}=-\frac{त_२}{६} \ldots\ldots (१)$$

इसका उत्थापन $फ(य)=०$ और $फ'(य)=०$ में देने से

$$-\frac{५त_२^२}{३६}+त_३य+त_४=० \ldots\ldots (२)$$

$$य\left(-\frac{२त_२}{३}+२त_२\right)+त_३=० \ldots\ldots (३)$$

(३) से $$य=-\frac{३त_३}{४त_२} \ldots\ldots (४)$$

इसका उत्थापन (२) में देने से

$$त_४-\frac{३त^२_२}{४त_२}-\frac{५त^२_२}{३६}=० \ldots\ldots (५)$$

(१) और (४) से

$$त_३=-\frac{८त^३_२}{२७} \ldots\ldots (६)$$

इसका उत्थापन (५) में देने से

$$त_४=-\frac{त^२_२}{१२} \ldots\ldots (७)$$

इस प्रकार (६)ठे और (७)वें से परस्पर संबन्ध जान पड़ा। इसलिये ऐसे जिस समीकरण में गुणकों में ऐसे संबन्ध पाए जायँ तो कहेंगे कि समीकरण के तीन मूल अवश्य तुल्य आवेंगे।

५६—फ (य)=० में जितने एक घात के खण्ड एक बार, दो बार·········त बार आए हों उनके मूल जानना।

कल्पना करो कि फ (य)=० में जितने एक घात के खण्ड एक एक बार हैं उनका मान $या_1$, जितने दो दो बार हैं उनका मान $या_2$, ··· जितने त त बार हैं उनका मान $या_त$ और जितने म म बार आए हैं उनका मान $या_म$ तो

$$फ (य)=या_1\ या_2^2\ या_3^3 \cdots\cdots या_त^त\ या_म^म$$

इस में मानों कि फ (य) और फ' (य) का महत्तमापवर्त्तन $फ_1$ (य) है तो

$$फ_1 (य)=या_2\ या_3^2 \cdots\cdots\cdots या_म^{म-1}$$

फिर मान लो कि $फ_1$ (य) और $फ'_1$ (य) का महत्तमापवर्त्तन $फ_2$ (य) है

तो $$फ_2 (य)=य_3\ या_4^2 \cdots\cdots\cdots या_म^{म-2}$$

इसी प्रकार $फ_2$ (य) और $फ'_2$ (य) इत्यादि के महत्तमापवर्त्तन मानते जाओ

तो $$फ_3 (य) = या_4\ या_5^2 \cdots\cdots\cdots या_म^{म-3}$$

$$फ_4 (य) = या_5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots या_म^{म-4}$$

········· ·······················

$$फ_{म-१}(य) = या_म$$
$$फ_म\ (य) = १$$

फ (य), $फ_१$ (य), $फ_२$ (य),.... $फ_म$ (य) में पूर्व पूर्व में पर पर का भाग देने से

$$\frac{फ\ (य)}{फ_१(य)} = या_१\ या_२ \cdots\cdots या_म = फा_१\ (य)$$
$$\frac{फ_१(य)}{फ_२(य)} = या_२\ या_३ \cdots\cdots या_म = फा_२\ (य)$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$\frac{फ_{म-१}(य)}{फ_म\ (य)} = या_म \qquad\qquad = फा_म\ (य)$$

अब इन पर से

$$\frac{फा_१\ (य)}{फा_२\ (य)} = या_१, \frac{फा_२\ (य)}{फा_३\ (य)} = या_२, \cdots\cdots, \frac{फा_{म-१}(य)}{फा_म\ (य)} = या_{म-१}$$

और $फा_म$ (य)=$या_म$ ।

अब $या_१=०$, $या_२=०$, ..., $या_म=०$ इन समीकरणों से फ (य)=० इसके सब मूलों का पता लग जायगा जो कि एक बार, दो बार इत्यादि आए हैं।

साधारण रीति से स्पष्ट है कि $या_त=०$ इसका कोई एक मूल फ (य)=० इसके उस मूल के तुल्य है जो फ (य)=० इसमें त बार आए हैं।

इसकी व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं:—

मान लो कि

$$फ\ (य) = य^९ - ४य^८ + २य^७ + ४य^६ + ६य^५ - ६य^४ - १३य^३ - २य^२ + ४य + ८$$

तो बीजगणित की रीति से फ (य) और फ′(य) का महत्तमापवर्त्तन

$$फ_१ (य) = य^४ - ३य^३ + य^२ + ४$$

फ₁ (य) और फ′₁ (य) का महत्तमापवर्त्तन

$$फ_२ (य) = य - २$$

और फ₂ (य) और फ′₂ (य) का महत्तमापवर्त्तन

$$फ_३ (य) = १$$

इन पर से

$$\frac{फ (य)}{फ_१ (य)} = य^५ - य^४ - २य^३ - य^२ + य + २ = फा_१ (य)$$

$$\frac{फ_१ (य)}{फ_२ (य)} = य^३ - य^२ - य - २ \qquad = फा_२ (य)$$

और $$\frac{फ_२ (य)}{फ_३ (य)} = य - २ \qquad = फा_३ (य)$$

इन पर से

$$\frac{फा_१ (य)}{फा_२ (य)} = या_१ = य^२ - १$$

$$\frac{फा_२ (य)}{फा_३ (य)} = या_२ = य^२ + य + १$$

$$फा_३ (य) = या_३ = य - २$$

इसलिये $फ (य) = (य^२ - १) (य^२ + य + १)^२ (य - २)^३$

और फ (य)=० इसके मूल १, −१, $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१-\sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१-\sqrt{-३}}{२}$, २, २, २ हुए।

इस प्रकार के स्मरणार्थ श्लोक

फलतज्जादि फलोत्थं महत्तमावर्त्तनं तदन्यफलम्।
एवं ततस्तदन्यं साध्य यावद्भवेद्रूथम्॥ १॥
फलानि पङ्क्त्यां विनिवेश्य पूर्व तत्तत्पराप्तं कलिका भवन्ति।
पूर्वा पराप्ता कलिका भवन्ति पुष्पाणि भूद्व्यादिसमाह्वयानि॥ २॥
येषां स्वसंख्यासमघातकाना हतिर्भवेत्त्र स्त्रीयफलस्य मानम्।
प्रकल्प्य तच्छून्यसमं विपश्चित्तुल्यानि मूलानि विचारयेद्धि॥ ३॥

दोहा

फल अरु फल को प्रथम फल ता बिच होय महान।
जो अपवर्त्तन अन्य फल सोई होत सुजान॥ १
यों लावहु बहु ऊपर फल जब तक होय न एक।
एक तुल्य एक पंक्ति मे राखहु सब सुविवेक॥ २॥
पर से भागहु पूर्व को कलिका ताको नाम।
पर कलिका हत पूर्व सो पुष्प होत शुभ काम॥ ३॥
पहिलो दूजो तीसरो येहि क्रम मे तेहि जान।
अपनी संख्या के सदृश तिन को घात सुजान॥ ४॥
ताके बध सम जानिए अपनो फल हे मीत।
ताहि शून्य सम मानि सम मूल जानिए चीत॥ ५॥

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

(१) जब फ (य) और फ′ (य) का कोई महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक हो तो दिखलाओ कि फ (य)=० इसके एकाध तुल्य मूल अवश्य होंगे ।

(२) यदि फ (य)=० इसके मूल $अ_१, अ_२, \cdots\cdots अ_न$ हों तो सिद्ध करो

$$फ'(य) = फ(य)\left(\frac{१}{य - अ_१} + \frac{१}{य - अ_२} + \cdots\cdots + \frac{१}{य - अ_न}\right)$$

(३) $य^न - क\, य^२ + ख = ०$ इसमें दिखलाओ कि क और ख में क्या सम्बन्ध होगा यदि मूल तुल्य हों ।

(४) $य^३ - प_२य + प_३ = ०$ इसके तीन तुल्य मूल नहीं आ सकते यह सिद्ध करो ।

(५) $य^४ + प_२य^२ + प_४ = ०$ इसके तीन तुल्य मूल नहीं आ सकते यह सिद्ध करो ।

(६) $य^न + प_१य^{न-१} + प_२य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१}य + प_न = ०$ इसके दो मूल $अ_१$ के तुल्य हों तो सिद्ध करो कि

$$प_१य^{न-१} + २प_२य^{न-२} + ३प_३य^{न-३} + \cdots\cdots\cdots + न\, प_न = ०$$

इसका भी एक मूल $अ_१$ के तुल्य होगा ।

(७) $य^५ + प_२य^३ + प_३य^२ + प_५ = ०$ इसके दो मूल यदि समान हैं तो सिद्ध करो कि वह मूल अवश्य

$$य^२ - \frac{२प_२^२}{५प_३} + \frac{५प_५}{३प_३} - \frac{४प_२}{१५} = ०$$ इसके एक मूल के तुल्य होगा ।

(८) यदि नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल तुल्य हों तो उनको निकालो।

(१) $य^३ - य - \frac{२}{३\sqrt{३}} = ०$ ।

(२) $य^३ - य + \frac{२}{३\sqrt{३}} = ०$ ।

(३) $य^३ - य^२ - ८य + १२ = ०$ ।

(४) $य^३ + ८य^२ + २०य + १६ = ०$ ।

(५) $य^३ - ५य^२ - ८य + ४८ = ०$ ।

(६) $य^३ - ३य^२ - ९य + २७ = ०$ ।

(७) $य^४ - ११य^२ + १८य - ८ = ०$ ।

(८) $य^४ - ७य^३ + १३य^२ + ३य - १८ = ०$ ।

(९) $य^४ - \frac{१}{२}य + \frac{३}{१६} = ०$ ।

(१०) $य^५ - १३य^४ + ६७य^३ - १७१य^२ + २१६य - १०८ = ०$

(११) $२य^४ - १२य^३ + १९य^२ - ६य + ९ = ०$ ।

(१२) $य^५ - य^४ - २य^३ + २य^२ + य - १ = ०$ ।

(१३) $य^६ - ३य^५ + ६य^३ - ३य^२ - ३य + २ = ०$ ।

(१४) $य^७ - २य^६ - ६य^५ + ८य^४ + १७य^३ - ६य^२ - २०य - ८ = ०$ ।

(१५) $य^८ - ३य^७ - ४य^६ + १४य^५ + ९य^४ - २३य^३ - १४य^२ + १२य + ८ = ०$ ।

६—समीकरण के मूलों की सीमा

५७—चतुर्घात के ऊपरवाले समीकरणों के मूलों का जानने के लिये बीजगणित से कोई साधारण रीति नहीं पाई जाती। ऐसी स्थिति में समीकरण के मूल अटकल से निकाले जाते हैं। अर्थात् पहिले अव्यक्त का कोई एक मान कल्पना करते हैं, फिर उसका उत्थापन देने से यदि फ (य) शून्य के तुल्य हुआ तो कहेंगे कि अटकल से माना गया अव्यक्त का मान फ (य) = ० इसमें ठीक है। यदि उस कल्पित मान का उत्थापन देने से फ (य) शून्य के तुल्य नहीं हुआ तो कहेंगे कि यह अव्यक्त का मान नहीं है। फिर अव्यक्त का दूसरा मान मान कर फ (य) में उत्थापन देना होगा यों बार बार कर्म करने से अव्यक्त के जिस कल्पित मान का उत्थापन देने से जब फ (य) शून्य के तुल्य होगा तब कहेंगे कि फ (य)=० इसमें वह अव्यक्त का मान है।

ऊपर की क्रिया करने में यदि यह मालूम हो जाय कि अव्यक्त का मान कोई ज्ञात संख्या अ से बड़ा वा ब से अल्प नहीं है तो अव्यक्त के मान जानने के लिये जो असकृत्कर्म कहा है उसमें अटकल से अव्यक्त का मान जो अ से अल्प वा ब से अधिक मान कर कर्म करेंगे तो उसमें कम परिश्रम पड़ेगा क्योंकि पहिले अव्यक्त के मान अ से अधिक वा ब से अल्प मानने में जो व्यर्थ परिश्रम पड़ता था और समय भी नष्ट होता था उनका अब बचाव होगा। इसलिये इस अध्याय में समीकरण के मूल किन दो संख्याओं के भीतर होंगे इसका विचार किया जायगा। इस अध्याय में मूल शब्द से सर्वत्र संभाव्य मूल समझना चाहिए।

सीमा—सीमा से ऐसा समझना चाहिए जैसे कल्पना करो कि अ – स्थान से कोई मनुष्य ब – स्थान के लिये रवाना हुआ। वहाँ पहुँचने पर देखा कि अँगुलियों में अंगूठिआँ नहीं हैं, कहीं राह में गिर पड़ीं। अंगूठिआँ जहाँ जहाँ गिरी होंगी वे स्थान अवश्य अ और ब के अन्तर्गत हैं। इसलिये अ और ब को उन स्थानों की सीमा कहेंगे। इसी प्रकार जिन दो संख्याओं के भीतर समीकरण के सभी मूल आ जायँ उन संख्याओं को उन मूलों की सीमा कहते हैं। यदि कहा जाय कि अमुक संख्या समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा है तो इससे यह समझना चाहिए कि समीकरण का कोई भी धनात्मक मूल उस संख्या से अधिक नहीं हो सकता।

५८—सब से बड़े संख्यात्मक ऋण गुणक में एक जोड़ देने से साधारण स्वरूपवाले समीकरण के धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा होती है।

यहाँ साधारण स्वरूप वा रूपवाले समीकरणों से उन समीकरणों को समझना चाहिए जिनमें $य^{न}$ इसका गुणक एक एक हो।

मानलो कि फ (य) = ० यह न घात का एक साधारण रूपवाला समीकरण है जिसमें सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक प है तो समीकरण के आदि पद को छोड़ सब में ऋणात्मक गुणक प कर देने से

$$फ(य) > य^{न} - प(य^{न-१} + य^{न-२} + \cdots\cdots + य + १)$$

वा $फ(य) > य^न - प\frac{य^न - १}{य - १}$

इसलिये यदि $य > १$ तो

$$य^न - १ - प\frac{य^न - १}{य - १}$$ इससे फ (य) बहुत बड़ा होगा।

यदि $य^न - १ - प\frac{य^न - १}{य - १}$ यह वा $(य^न - १)\left(१ - \frac{प}{य - १}\right)$ यह धन होगा तो फ (य) भी धन होगा। परन्तु जब $य > १$ तब एक खण्ड $य^न - १$ यह सर्वदा धन ही रहेगा।

इसलिये यदि $१ - \frac{प}{य - १}$ यह धन होगा तो फ (य) सर्वदा धन होगा परन्तु $य - १ > प$ वा $य > प + १$ होता है तो $१ - \frac{प}{य - १}$ यह सर्वदा धन होता है।

इसलिये जब $य \geqq प + १$ तो फ (य) सर्वदा धन रहेगा। यहाँ कहेंगे कि धनात्मक मूल $प + १$ इस से छोटे हैं। इसलिये समीकरण के धन मूलों की प्रधान सीमा $प + १$ सिद्ध होती है।

जैसे $फ(य) = य^५ - २य^४ + ३य^३ - ४य^२ - ५य - ६ = ०$ ऐसा कल्पना किया जाय तो इसमें सबसे बड़ा ऋण गुणक ६ है। इसलिये धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा $६ + १ = ७$ हुई।

५६—यदि $फ(य) = ०$ इसमें $य = -र$ तो स्पष्ट है कि पूर्व युक्ति से र के धन मानों की जो प्रधान सीमा होगी वही य के ऋण मानों की प्रधान सीमा होगी। परन्तु $फ(य) = ०$

यह यदि कोई विषम न घात का समीकरण हो तो $(-र)^न = -र^न$ । इसलिये फ $(-र) = ०$ इसके सब पदों को शून्य के पक्ष में ले जाकर तब ऊपर की युक्ति से सीमा का विचार करना चाहिए ।

जैसे गत प्रक्रम के समीकरण में यदि य = −र माना जाय तो उसका स्वरूप

$$-र^५ + २र^४ - ३र^३ - ४र^२ + ५र - ६ = ० \text{ ऐसा हुआ ।}$$

दूसरे पक्ष में ले जाने से

$$र^५ + २र^४ + ३र^३ + ४र^२ - ५र + ६ = ० \text{ ऐसा हुआ ।}$$

इसमें सबसे बड़ा ऋणात्मक गुणक ५ इसलिये र के धन मानों की वा य के ऋण मानों की प्रधान सीमा −(५+१)=−६ हुई । इसलिये फ (य)=० इस समीकरण के सभी मूल −६ और ७ इन्हीं दो संख्याओं के भीतर हैं ।

यदि फ (य)=० इस समीकरण में सब से बड़ा गुणक म हो तो स्पष्ट है कि चिन्ह विचार के बिना पूर्व युक्ति से कह सकते हो कि फ (य)=० इसके सब मूल −(म+१) और म+१ इनके भीतर हैं ।

६०—न घात के साधारण स्वरूप वाले समीकरण में यदि सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक प हो और ऋणात्मक गुणक वाले पद में अव्यक्त का सबसे बड़ा घात न−त हो तो धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा $१ + \sqrt[त]{प}$ होती है ।

फ (य)=० इस न घात के समीकरण का यदि ऐसा रूप हो कि आदि पद से लेकर त − १ पद तक के गुणक धन हों और अवशिष्ट पदों में सब से बड़ा ऋणात्मक गुणक प हो तो स्पष्ट है कि फ (य) यह $य^{न} - प (य^{न-१} + य^{न-२} + \cdots + य + १)$ इससे बड़ा होगा अर्थात् $य^{न} - प \frac{य^{न-त+१} - १}{य - १}$ इससे बड़ा होगा और

$$\frac{(य-१)^{न}(य-१) - प(य^{न-त+१} - १)}{य-१}$$ इससे बहुत बड़ा होगा।

यदि य > १ तो फ (य) यह $\frac{(य-१)^{न}(य-१) - प.य^{न-त+१}}{य-१}$ इससे और भी बहुत बड़ा होगा। इसलिये यदि

$\frac{(य-१)^{त+१} - प.य^{न-त+१}}{य-१}$ यह वा $\frac{य^{न-त+१}}{य-१}\left\{(य-१)^{त} - प\right\}$ यह

अथवा $(य-१)^{त} - प$ यह धन होगा तो फ (य) भी धन होगा। परन्तु यदि $(य-१)^{त} = प$ अथवा $य = १ + प^{\frac{१}{त}}$ तो $(य-१)^{त} - प$ यह धन होता है। इसलिये य, $१ + \sqrt[त]{प}$ इसके तुल्य वा अधिक होगा तो फ (य) भी धन होगा। इसलिये फ (य) = ० इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा $१ + \sqrt[त]{प}$ यह हुई।

जैसे यदि फ (य) = $य^{५} + २य^{४} + य^{३} - ४य^{२} - १४य + ८$ तो यहाँ तीन पद तक धन गुणक हैं और आगे के पदों में सब

से बड़ा ऋण गुणक १५ है इसलिये त = ४, प = १५ इनका $१ + प^{\frac{१}{त}}$ इसमें उत्थापन देने से प्रधान सीमा $१ + (१५)^{\frac{१}{४}} = ३$ (स्वल्पान्तर से)।

सीमा जानने के लिये यदि निरवयव त घात मूल न मिले तो प में कोई सब से छोटी संख्या मिला कर तब त घात मूल लो जिसमें प्रधान सीमा इस आए हुए सीमा के मान के अन्तर्गत हो।

इस पर से यह प्रकार उत्पन्न होता है:—अवशिष्ट पदों में सब से बड़ा जो ऋणात्मक गुणक हो उसके संख्यात्मक मान का आदि से ले जितने पद तक धन गुणक हैं उसके संख्या तुल्य घात मूल लेकर उसमें एक जोड़ दो तो धन मूलों की सीमा होगी।

६१—यदि किसी समीकरण में प्रत्येक ऋणात्मक गुणक को धनात्मक मान कर उसमें उसके पूर्व आए हुए धनात्मक गुणकों के योग से भाग दिया जाय तो इस प्रकार उपलब्ध सब से बड़ी लब्धि में एक जोड़ देने से धन मूलों की प्रधान सीमा होती है।

बीजगणित से सिद्ध है कि $य^म$

$$= (य - १)(य^{म-१} + य^{म-२} + \cdots\cdots + य + १) + १$$

इसलिये यदि समीकरण का ऐसा रूप हो जिसके बहुत पदों के गुणक धन और बहुतों के ऋण हों अर्थात्

$फ(य) = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} - प_3 य^{न-3} + प_4 य^{न-4} + \cdots - प_त य^{न-त} + \cdots + य_न = 0$ ऐसा हो तो इसमें य के जिन जिन घातों का गुणक धन है उनका रूप ऊपर के समीकरण में पक्ष बदलने से और जिनके गुणक ऋण हैं उनको ज्यों का त्यों रखने से

$$\begin{aligned} फ(य) = {} & प_0 (य-1) य^{न-1} + प_0 (य-1) य^{न-2} \\ & + प_0 (य-1) य^{न-3} + \cdots + प_0 (य-1) + प_0 \\ & + प_1 (य-1) य^{न-2} + प_1 (य-1) य^{न-3} + \cdots \\ & + प_1 (य-1) + प_1 \\ & + प_2 (य-1) य^{न-3} + \cdots + प_2 (य-1) + प_2 \\ & - प_3 (य-1) य^{न-3} \cdots \\ & + \cdots \end{aligned}$$

इस रूपान्तर में यदि य एक से अधिक हो तो प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्ति य के धन मान में धन ही रहेगी, जहाँ कोई ऋण संख्या है वहाँ वह भी पंक्ति धन ही रहेगी यदि
$(प_0 + प_1 + प_2) > प_3$

इसी प्रकार $(प_0 + प_1 + प_2 + \cdots प_{त-1})(य-1) > प_त$

इसलिये $य > \frac{प_3}{प_0 + प_1 + प_2} + 1$

साधारण से $य > \frac{प_त}{प_0 + प_1 + प_2 + \cdots प_{त-1}} + 1$

इससे सिद्ध होता है कि ऋणात्मक पद की संख्या में उसके पहले पदों में जितने धनात्मक गुणक हैं उनकी संख्या

के योग का भाग दो यदि लब्धि पूरी न आवे तो शेष को छोड़ एकाधिक लब्धि लो और उसमेँ एक जोड़कर उसे खण्ड मानों। इस प्रकार से जितने ऋणात्मक गुणक होँ सब पर से खण्डोँ का साधन करो। सब खण्डोँ मेँ जो सबसे बड़ा हो उसे समीकरण के धनात्मक मूलोँ की प्रधान सीमा समझो।

जैसे यदि $फ(य) = य^५ + ६ य^४ - १५ य^३ - ५२य^२ + ५५य - १७ = ०$

ऊपर की युक्ति से खण्ड

$$= \frac{१५}{६+१} + १, \frac{५२}{६+१} + १, \frac{१७}{६+१+५५} + १$$

$$= ३ \quad , \quad ७ \quad , \quad १$$

इनमेँ सब से बड़ा खण्ड ७ है इसलिये धनात्यक मूलोँ की सीमा ७ हुई। इसी उदाहरण मेँ ५६वेँ प्रक्रम से ५२ और ५८वेँ प्रक्रम से $१ + \sqrt{५२} = ६$ प्रधान सीमा आती हैँ। इन दोनोँ से ७ यह कम है इसलिये उन दोनोँ प्रकारोँ से यह प्रकार यहाँ पर कर्म लाघव उत्पन्न करता है।

प्रथम ऋणात्मक गुणक के पहले जहाँ कई एक धनात्मक गुणक होँ और धनाामक्र गुणकोँ की संख्या जहाँ भारी भारी हो वहाँ पर इस प्रकार से प्रधान सीमा की संख्या छोटी आवेगी जिस पर से गणित करने मेँ कर्म लाघव होगा।

६२—कभी कभी कुछ हेर फेर से समीकरणोँ का रूपान्तर करने से बहुत छोटी सीमा का पता लग जाता है।

जैसे पिछले प्रक्रम के उदाहरण मेँ

$$फ(य) = य^५ + ९य^४ - १५य^३ - ५२य^२ + ५५य - १७ = ०$$

$$वा\ य^२(य^३ - ५२) + ९य^३\left(य - \frac{१५}{९}\right) + ५५\left(य - \frac{१७}{५५}\right) = ०$$

इसमें स्पष्ट है कि यदि $य = ४$ तो फ (य) धन होता है। इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई जो पिछली सब प्रधान सीमाओं से छोटी है।

दूसरा उदाहरणः—

मानो कि $फ(य) = य^५ - ५य^४ - १३य^३ + २य^२ + य - ७० = ०$

इसमें ५६वें और ५८वें प्रक्रम से धन मूलों की प्रधान सीमा $७० + १ = ७१$, ५९वें प्रक्रम से $\frac{७०}{४} + १$ अर्थात् १९ सीमा आती है। परन्तु इसी का यदि $य^३(य^२ - ५य - १३) + २य^२ + य - ७०$ ऐसा रूपान्तर कर डालो और पहले ५६वें प्रक्रम से $य^२ - ५य - १३$ इसमें सीमा का विचार करो तो $१३ + १ = १४$ यह हुआ। इस मान में $य^३(य^२ - ५य - १३)$ यह तो धन होता ही है किन्तु $२य^२ + य - ७०$ यह भी उसी १४ के मान का उत्थापन देने से धन होता है। इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा १४ हुई जो १९ से भी छोटी है।

६३—कल्पना करो कि $फ(य) = प_०य^न + प_१य^{न-१} + प_२य^{न-२} + \cdots + प_{न-१}य + प_न = ०$ तो स्पष्ट है कि इसमें $न + १$ पद होंगे।

$न + १$ में ३ का भाग देने से शेष १ वा २ बचेगा। इसलिये फ (य) में तीन तीन पदों को लेने से यदि शेष न बचे तो

$$\begin{aligned} फ(य) &= य^{न-२}(प_०य^२ + प_१य + प_२) \\ &+ य^{न-५}(प_३य^२ + प_४य + प_५) + \cdots\cdots \\ &+ (प_{न-२}य^२ + प_{न-१}य + प_न) \cdots\cdots\cdots\cdots (१) \end{aligned}$$

शेष एक बचे तो

$$फ(य) = य^{न-२}(प_०य^२ + प_१य + प_२) + य^{न-४}(प_३य^२ + प_४य + प_५) + \cdots + य(प_{न-३}य^२ + प_{न-२}य + प_{न-१}) + प_न \cdots \cdots (२)$$

और यदि शेष दो बचे तो

$$फ(य) = य^{न-२}(प_०य^२ + प_१य + प_२) + य^{न-४}(प_३य^२ + प_४य + प^५) + \cdots + य^२(प_{न-४}य^२ + प_{न-३}य + प_{न-२}) + (प_{न-१}य + प_न) \cdots \cdots \cdots (३)$$

तीनों स्थितिओं में कोष्ठकान्तर्गत जितने वर्गात्मक अव्यक्त के फल हैं उन सब को पृथक् पृथक् शून्य के समान कर य के मान ले आवो। इन मानों में जो सब से बड़ा होगा स्पष्ट है कि वही (१) में धनमूल की सीमा होगी।

यदि $प_न$ धनात्मक हो तो (२) में भी वही सीमा होगी, यदि $प_न$ ऋणात्मक और य के उस बड़े मान से अल्प हो तो भी वही सीमा होगी और यदि ऋणात्मक $प_न$ उस बड़े मान से बड़ा हो तो $प_न$ का संख्यात्मक मान जो होगा वही सीमा होगी।

(३) स्थिति में उस बड़े मान का उत्थापन $(प_{न-१}य + प_न)$ इसमें देने से इसका मान यदि धन आवे तो उसी बड़े मान के समान सीमा होगी, यदि ऋण आवे तो उससे बड़े जिस मान के उत्थापन देने से $(प_{न-१}य + प_न)$ यह धन हो वही सीमा होगी।

प्रत्येक वर्गसमीकरण मेँ य के मान निकालने में यदि निरवयव मूल न मिले तो जिसका मूल लेना हो उसे कुछ अधिक कर निरवयव मूल लेकर य का मान निकालो। यदि य का मान भिन्न आवे तो उसमेँ भी कुछ अधिक कर निरवयव कर लो। य के द्विविध मान में जो ऋणात्मक मान हो उसे छोड़ दो।

जैसे ६०वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण मेँ

$$य^५ - ५य^४ - १३य^३ + २य^२ + य - ७०$$

$$= य^३(य^२ - ५य - १३) + (२य^२ + य - ७०)$$

इसमेँ पहले $य^२ - ५य - १३ = ०$ इस पर से य का धन मान

$$= \frac{५ + \sqrt{७७}}{२} = ७ \text{ (कुछ अधिक)}$$

फिर $२य^२ + य - ७० = ०$ इस पर से य का धन मान

$$= \frac{१}{४} + \sqrt{\frac{१}{१६} + ३५} = ७ \text{ (कुछ अधिक)}$$

यहाँ दोनोँ समान ही स्वल्पान्तर से य के धन मान हुए। इसलिये धन मूल की सीमा ७ हुई जो सब से छोटी है।

जिस वर्गसमीकरण से असम्भव मान आवे उसे छोड़ दो क्योँकि उसमेँ य के किसी धन मान मेँ फल धन ही होगा।

$प_०, प_१, प_२$, इत्यादि मेँ कोई त्रिक ऋणात्मक होँगे तब ऊपर की युक्ति से काम नहीँ चलेगा परन्तु वहाँ भी एक पद के ऐसे खण्ड करो जिसमेँ कोष्ठ के भीतर के आदि पद मेँ धन गुणक होँ फिर तारतम्य से ऊपर की युक्ति से ऐसा दूसरा

समीकरण का रूपान्तर बना सकते हो जिससे यह पता लग जायगा कि य के किस छोटे धन मान में फ (य) का मान धन होगा।

६४—ऊपर के प्रक्रमों में प्रधान सीमा के जानने के लिये कई एक युक्तियाँ दिखलाई जा चुकी हैं अब इस प्रक्रम में कनिष्ठ सीमा जानने की विधि लिखते हैं।

कनिष्ठ सीमा—जिस संख्या से समीकरण का कोई भी धनात्मक मूल छोटा न हो उस संख्या को समीकरण के धनात्मक मूलों की कनिष्ठ सीमा कहते हैं।

मान लो कि समीकरण का छोटा रूप बना लिया है। छोटे रूप से सर्वत्र ऐसा समझना कि सब से बड़े घात वाले अव्यक्त के गुणक से दोनों पक्षों में अपवर्त्तन देकर उसका गुणक एक के तुल्य कर लिया है और उसका रूप

$$फ(य) = य^{न} + प_{१} य^{न-१} + प_{२} य^{न-२} + \cdots \cdots + प_{न-१} य$$

$+ प_{न} = ०$ ऐसा है। इसमें $य = \frac{१}{र}$ ऐसा कल्पना कर एक नया समीकरण का रूप जिसमें सब पदों को $र^{न}$ इससे गुण और $प_{न}$ इसका भाग दे देने से

$$र^{न} + \frac{प_{न-१}}{प_{न}} र^{न-१} + \cdots\cdots + \frac{प_{२}}{प_{न}} र^{२} + \frac{प_{१}}{प_{न}} र + \frac{१}{प_{न}} = ०$$

ऐसा हुआ। इसमें मान लो कि पिछले प्रक्रमों की युक्तियों से र के धन मानों की प्रधान सीमा 'सी' हुई तो स्पष्ट है कि 'सि' से र बड़ा नहीं हो सकता इसलिये य, $\frac{१}{सी}$ से छोटा भी नहीं

हो सकता। इसलिये य के धन मानों की कनिष्ठ सीमा $\frac{१}{सी}$ यह हुई।

मान लो कि ५६वें प्रक्रम की युक्ति से इस समीकरण में प्रधान सीमा जानना है तो ऋण गुणकों में सब से बड़े गुणक को $\frac{प_त}{प_न}$ कहे तो इसकी प्रधान सीमा

$$= १ - \frac{प_त}{प_न} = \frac{प_न - प_त}{प_न}।$$

इसलिये फ (य) = ० इसमें कनिष्ठ सीमा $= \frac{प_न}{प_न - प_त}$ यह हुई।

$\frac{प_त}{प_न}$ यह तभी ऋण हो सकता है जब $प_त$ से विरुद्ध चिन्ह का $प_न$ हो। इसलिये कनिष्ठ सीमा का संख्यात्मक हर सर्वदा $प_न$ अर्थात् अंश से बड़ा होगा इसलिये इस पर से यह सिद्ध होता है कि कनिष्ठ सीमा सर्वदा एक से कम होगी।

५६वें और ५८—५९वें प्रक्रमों में प्रधान सीमा जानने के लिये जो जो युक्तियाँ दिखलाई गई हैं सब में य को एक से बड़ा मान लिया गया है इसलिये इन पर से भी स्पष्ट ही है कि कनिष्ठ सीमा एक से सर्वदा छोटी रहेगी।

जैसे इस अध्याय में प्रधान सीमाओं को जानने के लिये सावयव संख्याओं में कुछ कुछ बढ़ा कर निरवयव कर लिया है उसी तरह इस कनिष्ठ सीमा में भी कुछ बढ़ा कर इसका मान सर्वदा एक के तुल्य कहना चाहिए तब इस कनिष्ठ सीमा

जानने के लिये नया प्रक्रम व्यर्थ है क्योँकि ५६, ५८—५९वेँ प्रक्रमोँ से पहले ही स्पष्ट है कि य का धन मान एक से अल्प नहीँ होगा।

टाडहण्टर (Todhunter) साहब ने अपने ग्रन्थ के ६३वेँ प्रक्रम मेँ जो $\frac{१८}{७४}$ यह कनिष्ठ सीमा का मान लिखा है वह जहाँ जहाँ य का मान रूप से अधिक होगा व्यर्थ है क्योँकि वहाँ स्पष्ट है कि एक से अल्प य का धन मान होना असम्भव है। जैसे यदि

$फ (य) = य^{३} - ९य^{२} + २६य - २४ = ०$

इसमेँ ५६वेँ प्रक्रम से प्रधान सीमा २५ आई। फिर य के स्थान मेँ $\frac{१}{र}$ इसका उत्थापन देने से और $र^{३}$ से गुण देने से और -२४ का भाग देने से

$$र^{३} + \frac{२६}{-२४} र^{२} - \frac{९}{-२४} र + \frac{१}{-२४} = ०$$

इसमेँ $प_{न} - = -२४$, और $प_{त} = २६$। इसलिये कनिष्ठ सीमा $= \frac{प_{न}}{प_{न} - प_{त}} = \frac{-२४}{-२४ - २६} = \frac{१२}{२५}$ जो व्यर्थ है क्योँकि य का धनमान समीकरण से स्पष्ट है कि एक से अधिक होगा।

इसलिये $फ (य) = य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots \cdots + प_{न} = ०$ इसमेँ य के स्थान मेँ १ उत्थापन देकर समझ लो कि $१ + प_{१} + प_{२} + \cdots + प_{न}$ यह धन वा ऋण आता है यदि ऋण आवे तो व्यवहार के लिये कनिष्ठ सीमा को १ मान लो।

६५—न्यूटन की रीति—न्यूटन ने प्रधान सीमा जानने के लिये जो विधि लिखी है उसे नीचे लिखते हैं:—

मान लो कि $\text{फ}(\text{य}) = ०$ इसमें सीमा का ज्ञान करना है। य के स्थान में $\text{च}+\text{र}$ का उत्थापन देकर इसका स्वरूप ११वें प्रक्रम से

$$\text{फ}(\text{च}+\text{र}) = \text{फ}(\text{च}) + \text{र}\,\text{फ}'(\text{च}) + \frac{\text{र}^२}{२!}\text{फ}''(\text{च}) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\text{र}^\text{न}}{\text{न}!}\text{फ}^\text{न}(\text{च}) = ०$$ ऐसा हुआ। इसमें यदि $\text{फ}(\text{च})$, $\text{फ}'(\text{च})$, $\text{फ}''(\text{च})$, $\cdots \text{फ}^\text{न}(\text{च})$ ये सब किसी धन च के मान में धन हों तो र के किसी धन मान में $\text{फ}(\text{च}+\text{र})$ यह धन ही होगा। इसलिये $\text{फ}(\text{च}+\text{र}) = ०$ ऐसा होना असम्भव होगा। इसलिये ऊपर का समीकरण ठीक तभी होगा जब र का मान ऋण होगा। परन्तु $\text{य} = \text{र}+\text{च}$ $\therefore \text{र} = \text{य} - \text{च}$ परन्तु र ऋण है इसलिये य, च से बड़ा नहीं हो सकता क्योंकि ऐसा होने से र का मान धन होगा जो यहाँ पर न होना चाहिए। इसलिये ऐसी स्थिति में च को य के धन मानों की प्रधान सीमा कहेंगे।

जैसे ६०वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण में

$$\text{य}^५ - ५\text{य}^४ - १३\text{य}^३ + २\text{य}^२ + \text{य} - ७०$$

यहाँ $\text{फ}(\text{च}) = \text{च}^५ - ५\text{च}^४ - १३\text{च}^३ + २\text{च}^२ + \text{च} - ७०$

$$\text{फ}'(\text{च}) = ५\text{च}^४ - २०\text{च}^३ - ३९\text{च}^२ + ४\text{च} + १$$

$$\tfrac{१}{२}\,\text{फ}''(\text{च}) = १०\text{च}^३ - ३०\text{च}^२ - ३९\text{च} + २$$

$$\tfrac{१}{३!}\,\text{फ}'''(\text{च}) = १०\text{च}^२ - २०\text{च} - १३$$

$$\tfrac{१}{४!}\,\text{फ}''''(\text{च}) = ५\text{च} - ५$$

यहाँ सुभीते के लिये नीचे से विचार करना आरम्भ करो तो जब च = १ तो फ'''' (च) धन होता है। जब च = ३ तब फ''' (च) धन होता है। जब च = ४ तब फ'' (च) धन होता है। जब च = ६ तब फ' (च) धन होता है। और जब च = ७ तब फ (च) भी धन होता है। इसलिये च के धन ७ मान में फ (च), फ' (च) ·····फ'''' (च) सब धन हुए इसलिये य के धनमानों की प्रधान सीमा ७ हुई। यही ६२वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुई है।

यहाँ जिस च के धन में फ (च) यह धन आ गया उस च के मान में फ' (च), फ'' (च) इत्यादि धन आते हैं कि नहीं इसकी परीक्षा करनी आवश्यकता नहीं, अब वे सब आप ही आप धन होंगे क्योंकि मानो कि च = अ तो नीचे से फ'' (च) तक धन होते हैं तो च को कुछ बढ़ा कर अ + क के तुल्य करने से

$$फ''(अ+क) = फ''(अ) + क\, फ'''(अ) + \frac{क^2}{२!} फ''''(अ) + \cdots$$

इसमें स्पष्ट है कि दहिने पक्ष में सब पद धन हैं; इसलिये फ'' (अ + क) यह भी धन हुआ। इसलिये जब नीचे से विचार करना आरम्भ किया गया है तब स्पष्ट है कि च के मान के बढ़ने से नीचे वाले आप ही धन होंगे। इसलिये यहाँ पर फिर परीक्षा करनी व्यर्थ है।

सर्वत्र जहाँ जहाँ अव्यक्त के ऋणमान की प्रधान सीमा जाननी हो तो ५७वें प्रक्रम से वहाँ वहाँ पर सहज में जान सकते हो।

जैसे $य^५ - ७य^४ - १५य^३ + ३य^२ + ४य + ४८ = ०$ इसमेँ ५७वेँ प्रक्रम की युक्ति से $य = -र$ करने से

$र^५ + ७र^४ - १५र^३ - ३र^२ + ४र + ४८ = ०$ इसमेँ धन मानोँ की प्रधान सीमा ५६वेँ प्रक्रम से $\frac{४८}{१+७+४} + १ = ५$।

अथवा $र^५ - १५र^३ + ४र + ७र^४ - ३र^२ - ४८$

$$= र^३ (र^२ - १५) + ४र + ७(र^४ - \frac{३}{७}र^२ - \frac{४}{७})$$

$$= र^३ (र^२ - १५) + ४र + ७ \left\{ र^२ (र^२ - \frac{३}{७}) - \frac{४८}{७} \right\}$$

इससे स्पष्ट है कि जब $र = ४$ तो फ $(र)$ धन होता है; इसलिये समीकरण के धन मूलोँ की प्रधान सीमा पहिले से छोटी ४ ही हुई।

और फ $(र)$ मेँ जब $र = ०$ तब फ $(र) = १ + ७ - १५ - ३ + ४ - ४८ = १२ - ६६ = - ५४$ इसलिये धन मूलोँ की कनिष्ठ सीमा $+ १$ होगी। इसलिये फ $(य) = ०$ इसके ऋण मूलोँ की सीमा $- ४$ और $- १$ हुई।

६६—प्रधान सीमा जानने मेँ बड़ी सावधानी चाहिए। समीकरण का साधारण रूप देख कर प्रधान सीमा जानने मेँ कभी कभी धोखा हो जाने की सम्भावना होती है।

जैसे यदि फ $(य) = (य - ५)^२ (य - २) = ०$ ऐसा हो तो इस रूप से तो स्पष्ट है कि य का धन मान ५ से अधिक नहीँ हो सकता तथा धोखे से २ से भी अधिक नहीँ कहा जा सकता। इसलिये धोखे से २ को भी प्रधान सीमा कह सकते

हो जो कि वस्तुतः कनिष्ठ सीमा है। यहाँ पर अपचित घात क्रम से गुणकर समीकरण का रूप बनाओ तो

$$फ(य) = (य-५)^२ (य-२) = (य^२ - १०य + २५)(य-२)$$
$$= य^३ - १२य^२ + ४५य - ५० = ०$$

यहाँ ५८वें प्रक्रम से प्रधान सीमा ५१ और ५८वें प्रक्रम से भी ५१ आती है। यह तो बहुत भारी होने से ठीक ही है परन्तु ५९वें प्रक्रम से जो $\frac{५०}{१+४५} + १ = २$ यह प्रधान सीमा जो आती है वह ठीक नहीँ,

इसी प्रकार दूसरे (य – ५) (य – ४) (य – १) = ० इस उदाहरण में भी देखने से प्रधान सीमा ५ है और यह भी स्पष्ट है कि १ से अधिक य के सब धन मानों में फ (य) धन होगा इसलिये यदि १ को प्रधान सीमा कहोगे तो ठीक नहीँ होगा।

इसी फ (य) को घात कर $य^३ - १०य^२ + २९य - २०$ ऐसा बनाओ तो ५८वें, ५८वें, प्रक्रम से प्रधान सीमा २१ यह ठीक आती है परन्तु ५९वें से जो $\frac{२०}{२०} + १ = २$ आती है यह ठीक नहीँ।

यहाँ डेस्कार्टिस् की युक्ति से जानते हैं कि अव्यक्त के सब मान धन हैं इसलिये १० सब मानों का योग होगा। तब स्पष्ट है कि कोई धन मान १० से बड़ा न होगा इसलिये यहाँ १० को प्रधान सीमा कह सकते हैं। इसी प्रकार पहिले उदाहरण $य^३ - १२य^२ + ४५य - ५०$ इसमें प्रधान सीमा १२ होगी जो क्रम से ५१ और ५१ दोनों से छोटो है। इस प्रकार से और उदाहरणों में भी समझना चाहिए।

६७—जब २५वेँ प्रक्रम के पूर्व प्रसिद्धार्थ से स्पष्ट है कि

फ $(य)=य^{न}+प_{१}य^{न-१}+\cdots\cdots+प_{न}=०$ इसमेँ $-प_{१}$ यह सब मूलोँ के योग के समान है और फ $(-र)=०$ मेँ जो जो र के धन मान आवेँगे वे य के ऋणमान होँगे इसलिये यदि फ $(य)=०$ इसमेँ य के सब मान सम्भाव्य होँ तो फ $(-र)=०$ इसके धन मूलोँ की जो प्रधान सीमा हो उसे धन मूलोँ की संख्या से गुण कर फ $(य)$ के द्वितीय पद के विरुद्ध चिन्हात्मक गुणक मेँ जोड़ देने से जो योग होगा वह फ $(य)=०$ इसमेँ य के सब धन मानोँ के योग से बड़ा होगा। इसलिये योग को प्रधान सीमा कह सकते हैँ।

जैसे $य^{३}-७य+३=०$ इसके सब मूल सम्भाव्य हैं (४७वाँ प्रक्रम देखो) इसलिये य के स्थान मेँ $-र$ का उत्थापन देने से $र^{३}-७र-३=०$ ऐसा समीकरण बना जिसका रूपान्तर $र(र^{२}-७)-३=०$ ऐसा कर सकते हो इससे स्पष्ट है कि यदि $र=३$ तो फ $(-र)$ यह सर्वदा धन होता है और यहाँ धन मान एक ही है इसलिये र के धन मान की प्रधान सीमा ३ हुई। इसे एक से गुण कर फ $(य)$ के $य^{२}$ के गुणक शून्य मेँ जोड़ देने से फ $(य)=०$ इसके धन मूलोँ की प्रधान सीमा ३ हुई।

६८—यदि फ $(य)$ मेँ य के स्थान मेँ क्रम से अ और क ऐसी दो संख्याओँ का उत्थापन दिया जाय जिनके बीच फ $(य)=०$ इसके मूलोँ की संख्या विषम हो तो फ (अ) और फ (क) ये दोनेँ विरुद्ध

चिन्ह के होंगे। यदि उनके बीच समीकरण का कोई मूल न हो या मूलों की संख्या सम हो तो वे दोनें एक चिन्ह के होंगे।

फ (य) = ० इस समीकरण के सब सम्भाव्य मूल क्रम से $अ_1, अ_2, \cdot, अ_त$ मानों तो

$$फ(य) = (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3) \cdot (य - अ_त) फा(य)$$

ऐसा होगा।

जहाँ फा (य), सब असम्भाव्य मान सम्बन्धी अव्यक्त के एक घात खण्ड के घातके तुल्य है और जो य के किसी सम्भाव्य मान मेँ सर्वदा धन ही रहता है क्योँ कि किसी समीकरण मेँ जोड़े जोड़े असम्भाव्य मान सम्बन्धो अव्यक्त के खण्ड रहेँगे जिनके मान क्रम से

$य - अ - क\sqrt{-1}$, $य - अ + क\sqrt{-1}$ ये होते हैँ (२६वाँ प्रक्रम देखो) और जिनके घात $(य - अ)^2 + क^2$ ये सर्वदा य के सम्भाव्य मान मेँ धन ही होते हैँ।

कल्पना करो कि अ और क दो संख्या हैँ जिनमेँ क से अधिक अ है और अ और क के बीच मेँ फ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल $अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_त$ ये पड़े हैँ।

अब य के स्थान मेँ क्रम से अ और क का उत्थापन देने से

$$फ(अ) = (अ - अ_1)(अ - अ_2) \cdot (अ - अ_त) फा(अ)$$

$$फ(क) = (क - अ_1)(क - अ_2) \cdots (क - अ_त) फा(क)$$

यहाँ स्पष्ट है कि (अ—$अ_1$) (अ—$अ_2$) .... (अ—$अ_त$) ये सब खण्ड धन हैं और (क—$अ_1$) (क—$अ_2$)......(क—$अ_त$) ये सब खण्ड ऋण हैं। और ऊपर की युक्ति से फा (अ) और फा (क) ये दोनों सर्वदा धन अर्थात् एक ही चिन्ह के हैं। इसलिये फ (अ) और फ (क) ये दोनों क्रम से तभी एक या विरुद्ध चिन्ह के होते हैं जब सम्भाव्य मूलों की अर्थात् $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$,...$अ_त$ इनकी संख्या सम या विषम होती है।

९९—ऊपर की युक्ति की विलोम विधि से यह सिद्ध होता है कि यदि फ (य) में य के स्थान में उत्थापित जो दो संख्यायें विरुद्ध चिन्ह के फलों को उत्पन्न करती हैं तो उन संख्याओं के बीच फ(य)=० इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी है और यदि वे संख्यायें एक चिन्ह के फलों को उत्पन्न करती हैं तो उनके बीच या तो समीकरण का कोई मूल नहीं है या मूलों की सम संख्या पड़ी है।

ऊपर अ को भी $अ_1$, $अ_2$,...$अ_त$ से छोटा मान लेने से वा क को $अ_1$, $अ_2$,...$अ_त$ से बड़ा मान लेने से यह स्पष्ट है कि फ (अ) और फ (क) यदि एक ही चिन्ह के हों तो सम्भव है कि अ और क के बीच फ (य) = ० इसका कोई मूल न पड़ा हो।

इस सिद्धान्त के अन्तर्गत १९वें प्रक्रम का सिद्धान्त है इसलिये इसके बल से उस में की बात सिद्ध हो जाती है।

७०—फ (य) = ० इसके पास पास के जो दो दो सम्भाव्य मूल होंगे उनके बीच में फ (य) = ० इसका एक एक सम्भाव्य मूल अवश्य होगा।

मान लो कि एक एक से न्यून $अ_1, अ_2, अ_3, \ldots\ldots अ_त$ सम्भाव्य मूल और असम्भाव्य एक घात के खण्ड फा (य) जो सर्वदा य के किसी सम्भाव्य मान में धन रहता है, फ (य) = ० इसमें हैं तो

$$फ (य) = (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3) \cdots \cdots (य - अ_त)$$ फा (य) और ५२वें प्रक्रम से

$$फ' (य) = \Big\{ (य - अ_2)(य - अ_3) \cdots (य - अ_त) + (य - अ_1)(य - अ_3) \cdots\cdots (य - अ_त) \Big\} फा (य) + (य - अ_1)(य - अ_2)(य - अ_3) \cdots (य - अ_त) फा' (य)$$

इसमें य के स्थान में क्रम से $अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_त$ का उत्थापन देने से सब में $(य - अ_1)(य - अ_2)(य - {}_3) \cdots\cdots (य - अ_त)$ यह तो उड़ जायगा। इसलिये फ' ($अ_1$) उसी चिन्ह का होगा जिस चिन्ह का $(अ_1 - अ_2)(अ_1 - अ_2) \cdots\cdots (अ_1 - अ_त)$ है। इसी प्रकार $(अ_2 - अ_1)(अ_2 - अ_3) \cdots (अ_2 - अ_त)$ यह जिस चिन्ह का होगा उसी चिन्ह का फ' ($अ_2$) होगा।

$(अ_3 - अ_1)(अ_3 - अ_2) \cdots (अ_3 - अ_त)$ यह जिस चिन्ह का होगा उसी चिन्ह का फ' ($अ_3$) होगा। इसी प्रकार आगे भी करने से स्पष्ट है कि फ' ($अ_1$) धन होगा क्योंकि इसके

खण्डों में एक ऋण है। इस प्रकार पहिला धन, दूसरा ऋण तीसरा धन इत्यादि एकान्तर विरुद्ध चिन्ह के हैं। इसलिये ६७वे प्रक्रम से $अ_१, अ_२, अ_३ \cdots अ_त$ इत्यादि दो दो पास पास के मूलों के बीच $फ'(य)=०$ इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी होगी। इसलिये $अ_१, अ_२; अ_२, अ_३; अ_३, अ_४;$ इत्यादि दो दो पास पास के मूलों के बीच $फ'(य)=०$ इसका एक संभाव्य मूल अवश्य होगा।

६९—यदि $फ(य)=०$ इसके $अ_१$ मूल त वार, $अ_२$ मूल थ वार, $अ_३$ मूल द वार इत्यादि आवें और असंभाव्य मूल सम्बन्धी खण्डों के घात $फा(य)$ हो तो

$$फ(य) = (य - अ_१)^त (य - अ_२)^थ (य - अ_३)^द \cdots फा(य)$$

(यहां भी $अ_१, अ_२, अ_३ \cdots\cdots$ क्रम से एक एक से न्यून मानो।)

यहां भी ५६वें प्रक्रम से

$$फ'(य) = फा(य) \left\{ त(य - अ_१)^{त-१} (य - अ_२)^थ \cdots\cdots\cdots + थ(य - अ_१)^त (य - अ_२)^{थ-१} (य - अ_३)^द \right\}$$

$$+ (य - अ_१)^त (य - अ_२)^थ (य - अ_३)^द \cdots\cdots फा'(य)$$

कल्पना करो कि $फ(य)$ और $फ'(य)$ का अव्यक्तात्मक महत्तमापवर्त्तन

$$(य - अ_१)^{त-१} (य - अ_२)^{थ-१} (य - अ_३)^{द-१} \cdots = फ_१(य)$$

$$\text{ता } \frac{\text{फ}'(\text{य})}{\text{फ}_1(\text{य})} = \text{फा}(\text{य}) \left\{ \text{त}(\text{य}-\text{अ}_2)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots\cdots + \text{थ}(\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots + \cdots \right\}$$

$$+ (\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_2)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots\text{फा}'(\text{य}) = \text{फि}(\text{य})$$

पिछले प्रक्रम की युक्ति से $\text{अ}_1, \text{अ}_2; \text{अ}_2, \text{अ}_3$ इत्यादि के बीच फि (य) = ० इसके मूलों की विषम संख्या पड़ी होगी और फ' (य) = फ_1 (य) फि (य) इसमें अव्यक्त के जिस जिस मान में फि (य) शून्य के तुल्य होगा उस उस मान में फ' (य) भी शून्य के तुल्य होगा; इसलिये यहां भी फ (य) = ० इसके दो दो पास पास के मूलों के बीच फ' (य) = ० इसके एक एक मूल अवश्य होंगे, यह सिद्ध होता है।

७०—ऊपर की युक्ति की विपरीत क्रिया से यह भी सिद्ध होता है कि फ' (य) = ० इसके दो दो पास पास के मूलों के बीच फ (य) = ० इसका एक ही मूल पड़ सकता है। अधिक मूल नहीं पड़ सकते क्योंकि कल्पना करो कि यदि फ' (य) = ० इसके दो पास के जो $\text{अ}_1, \text{अ}_2$ मूल हैं उनके भीतर फ (य) = ० इसके दो मूल क_1 और क_2 पड़ते हैं तो अब ६८वें और ६९वें प्रक्रमों की युक्ति से कम से कम फ' (य) = ० इसका एक मूल क_1 और क_2 के बीच में अ पड़ेगा इसलिये दो दो पास के मूल अ_1, अ, अ_2 ये हुए जो पूर्व कल्पित धर्म से विरुद्ध हैं इसलिये $\text{अ}_1, \text{अ}_2$ के बीच फ (य) = ० इसका एक ही मूल हो सकता है, अधिक नहीं हो सकता।

अनुमान—फ' (य) = ० इसका सब से बड़ा जो मूल आवेगा उससे बड़ा फ (य) = ० इसका कोई एक ही मूल

होगा। क्योंकि यदि दो बड़े मूल हों तो ऊपर की युक्ति से इन दोनों के बीच फ′ (य) = ० इसका एक मूल होगा जो पहिले कल्पित सब से बड़े मूल से भी बड़ा होगा जो पूर्व कल्पना से असम्भव है।

इसी प्रकार फ′ (य) = ० इसका सब से छोटा जो मूल होगा उससे छोटा फ (य) = ० इसका एक ही कोई मूल हो I कता है।

७१—यदि फ (य) = ० इस न घात वाले समीकरण के सम्भाव्य मूल म हों तो ऊपर की युक्ति से फ′ (य) = ० इसके कम से कम म − १ संभाव्य मूल होंगे। फ″ (य) = ० इसके कम से कम म − २ संभाव्य मूल होंगे। इसी तरह फ^{त} (य) = ० इसके कम से कम म − त संभाव्य मूल होंगे। इसलिये फ^{त} (य) = ० इसके यदि आ असंभव मूल हों तो फ (य) = ० इसके भी कम से कम आ असम्भव मूल होंगे। यदि आ से भी कम असम्भव मूल मानो तो फ (य) = ० इसके न − आ इससे अधिक संभाव्य मूल होंगे और ऊपर की युक्ति से फ^{त} (य) = ० इसके न − त − आ इससे अधिक संभाव्य मूल होंगे। इसलिये सब मूल न − त − आ + आ = न − त इससे अधिक आवेंगे। परन्तु फ′ (य), फ″ (य) इत्यादि के आनयन से स्पष्ट है कि फ^{त} (य) = ० यह न − त घात का होगा इसलिये सब मान न − त से अधिक न होने चाहिए। इसलिये पहली बात असम्भव है। तब सिद्ध हुआ कि फ (य) = ० इसके कम से कम आ असम्भव मूल होंगे।

७२—११वें प्रक्रम से यदि फ (य) का न − त − १ संख्यक उत्पन्न फल निकालें और उसे शून्य के तुल्य करें तो

$\frac{प_0 य^{त+१}(न)!}{त+१!} + \cdots + \frac{प_{त-१} य^२ (न-त+१)!}{२!} + प_त य (न-त)!$

$+ प_{त+१} (न-त-१)! = ०$ ऐसा होगा। इसमें य के स्थान में $\frac{१}{र}$ का उत्थापन देने से, $र^{त+१}$ से गुण देने से और $प_{त+१} (न-त-१)$ इससे भाग देने से

$$र^{त+१} + \frac{(न-त)\, प_त}{प_{त+१}} र^त$$

$$+ \frac{(न-त+१)\,(न-त)}{१!} \cdot \frac{प_{त-१}}{प_{त+१}} र^{त-१} + \cdots \cdots = ०$$

इसके यदि सब मूल संभाव्य होंगे तो मूलों का वर्गयोग अवश्य धन होगा। इसलिये ३४वें प्रक्रम से

$$\frac{(न-त)^२ प^२_त}{प^२_{त+१}} > (न-त+१)\,(न-त) \frac{प_{त-१}}{प_{त+१}}$$

$$वा\ प^२_त > \frac{(न-त+१)\, प_{त-१}\, प_{त+१}}{न-त}$$

$$वा\ प^२_त > प_{त-१}\, प_{त+१}$$

इसलिये यदि पास पास के कोई तीन पदों के गुणक में मध्य का वर्ग आदि और अन्त के घात से अल्प हो तो अवश्य कहेंगे कि $फ^{न-त+१}(य) = ०$ इसका कम से कम एक जोड़ा असम्भव मूल होगा। इसलिये ७१वें प्रक्रम से $फ(य) = ०$ इसका भी कम से कम एक जोड़ा असम्भव मूल अवश्य होगा।

७३—फ′ (य) = ० इसके जितने सम्भाव्य मूल हैं यदि वे विदित हों तो फ (य) = ० इसके जितने सम्भाव्य मूल होंगे उनकी संख्या मालूम हो जायगी।

कल्पना करो कि फ′ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल क्रम से एक से एक अधिक $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$, ·····$अ_त$ हैं तो फ (य) में य के स्थान में $-\infty$ $अ_1$, $अ_2$ ···· $अ_त + \infty = ०$

इनका क्रम से उत्थापन देने से कोई दो पास के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो १९वें और ७०वें प्रक्रमों से य के उन दो मानों के भीतर फ (य) = ० इसका एक मूल अवश्य होगा। इसलिये फ (य) में य के स्थान में ऊपर लिखे हुए मानों का क्रम से उत्थापन देने से जो श्रेढ़ी प्राप्त होगी उसमें जितने व्यत्यास होंगे उतने ही फ (य) = ० इसके सम्भाव्य मूल आवेंगे।

यदि ऊपर लिखित य के किसी मान के उत्थापन देने से फ (य) यह शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि फ (य) = ० इसके कई मूल समान हैं जो ५६वें प्रक्रम से व्यक्त हो जायंगे।

जैसे यह जानना चाहते हैं कि किस स्थिति में

$य^3 - त_2 य + त_3 = ०$ इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य होंगे जब यह ज्ञात है कि $त_2$ धन सम्भाव्य संख्या है।

यहां फ′ (य) = $३य^2 - त_2$ इसलिये फ′ (य) = ० इसका एक मूल = $+\sqrt{\frac{त_2}{३}} = अ_1$, दूसरा = $-\sqrt{\frac{त_2}{३}} = अ_2$। इस प्रकार से फ′ (य) = ० इसके दोनों मूल सम्भाव्य हुए।

फ (य) में य के स्थान में इन दोनों मूलों का उत्थापन देने से

$$फ(अ_१) = \left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} - त_२\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{१}{२}} + त_३$$

$$= -२\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} + त_३ ।$$

$$फ(अ_२) = -\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} + त_२\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{१}{२}} + त_३$$

$$= २\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}} + त_३ ।$$

अब यदि $त_३ > २\left(\frac{त_२}{३}\right)^{\frac{३}{२}}$ वा $\left(\frac{त_३}{२}\right)^२ > \left(\frac{त_२}{३}\right)^३$ तो यदि $त_३$ धन हो तो फ $(अ_१)$ और फ $(अ_२)$ दोनों धन हुए। इसलिये

$$\begin{matrix} फ(-\infty), & फ(अ_२), & फ(अ_१), & फ(-\infty) \\ - & + & + & + \end{matrix}$$

यहां एक ही व्यत्यास हुआ इसलिये फ (य) = ० इसका एक ही सम्भाव्य मूल होगा।

यदि $त_३$ ऋण और $\left(\frac{त_३}{२}\right)^२ > \left(\frac{त_२}{३}\right)^३$ तो फ $(अ_१)$ और फ $(अ_२)$ दोनों ऋण होंगे तब

$$\begin{matrix} फ(-\infty), & फ(अ_२), & फ(अ_१), & फ(+\infty) \\ - & - & - & + \end{matrix}$$

यहां भी एक ही व्यत्यास हुआ इसलिये फ (य) = ० इसका एक ही सम्भाव्य मूल होगा जो $अ_१$ से बड़ा होगा।

पुनः कल्पना करो कि $\left(\frac{त_३}{२}\right)^२ < \left(\frac{त_२}{३}\right)^३$ तो चाहे $त_३$ धन वा ऋण हो फ($अ_१$) ऋण और फ($अ_२$) धन होगा। इसलिये

$$फ(-\infty), फ(अ_२), फ(अ_१), फ(+\infty)$$
$$- \quad + \quad - \quad +$$

यहां तीन व्यत्यास हुए इसलिये फ(य) = ० इसके तीन मूल संभाव्य हुए।

७४—प्रत्येक व्यत्यास में फ(य) = ० इसका एक ही मूल होगा।

कल्पना करो कि फ(य) = ० इसके धन मूलों की प्रधान सीमा अ और ऋण मूलों की प्रधान सीमा −क है और कोई दो मूलों का अन्तर ज से छोटा नहीं है तो फ(य) में य के स्थान मे अ, अ−ज, अ−२ज, ...

अ−(त−१)ज, अ−त ज (जहां अ−(त−१)ज यह −क से बड़ी और अ−त ज छोटी है) इत्यादि का उत्थापन देने से फ(य) के जो अनेक मान आवेंगे उनमें जिन दो दो मानों के बीच व्यत्यास होगा य के उन दो मानों के बीच फ(य) = ० इसका एक मूल अवश्य होगा क्योंकि यदि मान लो कि य के स्थान में अ−२ज और अ−३ज के उत्थापन से फ(य) में व्यत्यास हुआ तो फ(य) = ० इसका एक ही कोई मूल अ−२ज और अ−३ज इनके भीतर होगा। यदि मानो कि अ−२ज और अ−३ज इनके भीतर दो होंगे तो उनका अन्तर अ−२ज और अ−३ज इनके अन्तर ज से छोटा होगा। परन्तु

ज को तो सब अन्तरों से छोटा पहिले मान लिया है इसलिये दो मूलों का अन्तर ज से भी छोटा होना असम्भव है। इसलिये एक एक व्यत्यास में **फ** (य) = ० इसका एक ही मूल होगा।

जैसे $य^{३} - ३य^{२} - ४य + १३ = ०$ इस पर से ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से **फ** (य) = ० इसके मूलों के अन्तर वर्ग के समान जिस समीकरण के मूल हैं उसका स्वरूप

$र^{३} - ४२र^{२} + ४४१र - ४९ = ०$ ऐसा होगा। इसमें यदि

$र = \frac{१}{ल}$ तो

$$४९ल^{३} - ४४१ल^{२} + ४२ल - १ = ०$$

वा $४९ल^{२} (ल - ९) + ४२(ल - \frac{१}{४२}) = ०$

इसमें प्रधान सीमा ९ आई। इसलिये र की कनिष्ठ सीमा $\frac{१}{९}$ हुई।

फ (य) = ० इसके कोई दो मूलों का अन्तर $\sqrt{\frac{१}{९}} = \frac{१}{३}$ इससे छोटा न होगा और **फ** (य) = ० इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ५६वें प्रक्रम से $४ + १ = ५$ होगी और ५७वें प्रक्रम से ऋण मूलों की सीमा $-(१ + \sqrt{४}) = -३$ यह होगी। इसलिये य के स्थान में ५, $५ - \frac{१}{३}$, $५ - \frac{२}{३}$, $५ - १$, $४ - \frac{१}{३}$, ... इत्यादि के उत्थापन से जो **फ** (य) के अनेक मान आवेंगे उनसे स्पष्ट जान पड़ेगा कि ३ और $२\frac{२}{३}$, $२\frac{२}{३}$ और $२\frac{१}{३}$, और -२ और $-२\frac{१}{३}$ इनके बीच **फ** (य) = ० इसका एक एक मूल पड़ा हुआ है।

७५—इस प्रक्रम में पिछले प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखलाते हैं।

(१) $य^३ - ८य^२ + य + २ = ०$ इसके धन मूलों की प्रधान सीमा बतलाओ।

यहां ५६वें प्रक्रम से, सब से बड़े ऋणात्मक गुणक की संख्या ८ है। इसलिये प्रधान सीमा $८ + १ = ९$ हुई। ५८वें प्रक्रम से भी यही आती है।

(२) $य^५ + य^४ + य^३ - ११य + ५ = ०$ इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या होगा।

यहां ५६वें प्रक्रम से प्रधान सीमा $११ + १ = १२$ और ५८वे प्रक्रम से

$१ + \left(११\right)^{\frac{१}{३}}$ यह अर्थात् ४ हुई जो पहले से छोटी है।

यहां ५९वें प्रक्रम से $\frac{११}{१ + १ + १} + १$ यह अर्थात् ५ भी प्रधान सीमा आती है जो १२ से छोटी है।

(३) $य^७ + ५य^६ - ४य^५ + ६य^४ - १०य^३ - १२य^२ + ७य - ९ = ०$ इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

यहां ५६वें प्रक्रम से १३, और ५९वें प्रक्रम से

$\frac{४}{१+५}, \frac{१०}{१+५+६}, \frac{१२}{१+५+६}, \frac{९}{१+५+६+७}$ इन भिन्नों में सब से बड़ा तीसरा है इसलिये प्रधान सीमा २ हुई जो १३ से छोटी है।

(४) $य^४ - ५य^३ + ३४य^२ - ३य + १९ = ०$ इसके रूपान्तर से धन मूलों की प्रधान सीमा का पता लगाओ।

यहां इसका रूपान्तर

$$य^{४} - ५य^{३} + ६य^{२} + २८य^{२} - ३य + १६ = ०$$

वा $य^{२}(य^{२} - ५य + ६) + २८य\left(य - \frac{३}{२८}\right) + १६ = ०$

यहां $य^{५} - ५य + ६ = ०$ इसके असम्भव मूल आते हैं। इसलिये यह ६१वें प्रक्रम से य के किसी सम्भाव्य मान में धन ही होगा तब दूसरे खण्ड पर से प्रधान सीमा १ हुई।

(५) $५य^{५} - ८य^{४} - ११य^{३} - २३य^{२} - १०य - ३११ = ०$ रूपान्तर कर इसके धनात्मक मूलो की प्रधान सीमा वतलाओ।

यहां $५य^{५}$ का पांच विभाग कर प्रत्येक ऋण पद में मिला कर समान गुणकों के अलगाने से रूपान्तर

$$य^{४}(य - ८) + य^{३}(य^{२} - ११) + य^{२}(य^{३} - २३) + य(य^{४} - १०) + (य^{५} - ३११) = ०\ .$$

इस पर से प्रधान सीमा ८ हुई।

(६) $य^{४} - य^{३} - ३य^{२} - ५य - २३ = ०$ इसके रूपान्तर से धनात्मक मूलो की प्रधान सीमा क्या है।

यहां ४ पद ऋण है और सब से बड़ा य का घात भी ४ ही है इसलिये दोनों पक्षों को ४ से गुण कर $४य^{४}$ का चार भाग कर चारो ऋण पदो में मिलाने से रूपान्तर

$$य^{३}(य - ४) + य^{२}(य^{२} - १२) + य(य^{३} - २०) + (य^{४} - ९२) = ०$$

इसके धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई जो और दूसरे प्रकारों से आई हुई सीमाओं से छोटी है।

(७) न्यूटन की रीति से

फ $(य) = य^४ - २य^३ - ३य^२ - १५य - ३ = ०$ इसके धन मूलों की प्रधान सीमा क्या है।

६३वें प्रक्रम से, यहां फ $(य) = य^४ - २य^३ - ३य^२ - १५य - ३$

$$फ'(य) = ४य^३ - ६य^२ - ६य - १५$$

$$\frac{१}{२} फ''(य) = ६य^२ - ६य - ३$$

$$\frac{१}{२३} फ'''(य) = ४य - २$$

यहां य = १ तो फ''' (य) धन; य = २ तो फ'' (य) धन; य = ३ तो फ' (य) धन और य = ४ तो फ (य) धन होता है इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा ४ हुई।

(८) $य^३ - ८य^२ + ४य + ४८ = ०$ इसके धन मूलों की प्रधान सीमा क्या होगी।

यहां य का चाहे शून्य से लेकर जो धन मान मानो सब में फ (य) धन ही होता है इसलिये धन मूलों की प्रधान सीमा यदि शून्य को कहें तो अशुद्ध है। ५६वें प्रक्रम से यहां ८ + १ = ९ प्रधान सीमा ठीक है। यही ५९वें प्रक्रम से भी आती है। ६४वें प्रक्रम की युक्ति से यहां य = − र का उत्थापन देने से

$$र^३ + ८र^२ + ४र - ४८ = ०$$

$$वा\ र (र^२ + ८र + ४र) - ४८ = ०$$

यहां यदि र = २ तो फ (र) शून्य के तुल्य होता है और यदि र दो से अधिक हो तो फ (र) धन होता है। इसलिये

य के ऋणमान की सीमा २ हुई। इसे फ (य) के $य^{२}$ के विपरीत चिन्ह गुणक में अर्थात् ८ में घटा देने से प्रधान सीमा ६ हुई।

(६) सिद्ध करो कि $य^{न} - न\, अ\, य + (न-१)क = ०$ इसके सम्भव मूल कब और किस स्थिति में आवेंगे।

यहां $फ'(य) = न\, य^{न-१} - न\, अ = ०$ $\therefore य = अ^{\frac{१}{न-१}} = अ_{१}$ यदि न सम हो।

इसलिये फ' (य) में य का एक ही सम्भाव्य मान निकला। इसका उत्थापन फ (य) में देने से

$$फ(य) = अ^{\frac{न}{न-१}} - न\, अ^{\frac{न}{न-१}} + (न-१)\, क$$

$$= -(न-१)अ^{\frac{न}{न-१}} + (न-१)\, क = ०$$

इसलिये यदि $अ^{न} < क^{न-१}$ तो फ (य) का मान धन होगा और यदि $अ^{न} > क^{न-१}$ तो फ (य) ऋण होगा। अब न के सम होने से ७३वें प्रक्रम से

फ (−∞),	फ ($अ_{१}$),	फ (+∞)	
+	+	+	पहिली स्थिति में।
+	−	+	दूसरी स्थिति में।

इसलिये यदि $अ^{न} < क^{न-१}$ तो फ (य) = ० इसका कोई सम्भाव्य मूल न होगा और यदि $अ^{न} > क^{न-१}$ तो दो सम्भाव्य मूल होंगे।

इसी प्रकार न के विषम होने से यदि $अ^{न} > क^{न-१}$ तो $फ(य) = ०$ इसके तीन और यदि $अ^{न} < क^{न-१}$ तो एक सम्भाव्य मूल होगा।

(१०) $य^{न}(य-१)^{न} = ०$ स्पष्ट है कि इसके सब मूल सम्भाव्य हैं जिनमें न शून्य के और +१ के समान है। अब इसके न वारोत्पन्न फल पर से दिखलाओ कि

$$य^{न} - न\frac{न}{२न}य^{न-१} + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}\cdot\frac{न(न-१)}{२न(२न-१)}य^{न-२} - \cdots = ०$$

इसके सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में पड़े हैं।

यहां ११वें प्रक्रम में $\frac{र^{त}}{त!}$ का गुणक है उसमें न के स्थान में २न का और त के स्थान में न का उत्थापन देने से और $फ(य) = य^{न}(य-१)^{न}$ इसका रूप द्वियुक् पद सिद्धान्त से फैलाने से स्पष्ट है कि ऊपर का समीकरण $फ^{न}(य) = ०$ यह है और ७१वें प्रक्रम से इसके सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में होंगे क्योंकि $फ(य) = ०$ इसके सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में हैं। इसलिये $फ'(य) = ०$ इसके भी सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में होंगे। फिर इसके प्रथमोत्पन्न फल $फ''(य) = ०$ इसके भी सम्भाव्य मूल ऊपर ही की युक्ति से ० और १ के बीच में होंगे। इसी प्रकार आगे भी क्रिया करते जाओ तो स्पष्ट हो जायगा कि $फ^{न}(य) = ०$ इसके भी सब सम्भाव्य मूल ० और १ के बीच में होंगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

(१) $य^{६} - ४य^{५} + २य^{४} + ११य^{३} - १०य^{२} + २ = ०$ इसके धन और ऋण मूलों की प्रधान सीमाओं को बताओ।

(२) $य^४ - ८य^३ + १२य^२ + ६य - ३१ = ०$ इसका इस प्रकार से रूपान्तर करो कि धन मूलों की प्रधान सीमा ६ हो।

(३) सिद्ध करो कि $य^५ + ५य^४ - २०य^२ - १९य - २ = ०$ इसका एक धन मूल २ और ३ के बीच होगा और कोई धन मूल ३ से बड़ा न होगा। एक ऋण मूल -५ और -४ के होगा और कोई ऋण मूल -५ से अल्प न होगा।

(४) न्यूटन की रीति से नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूलों की सीमाओं का ज्ञान करो:—

(१) $य^४ - २य^३ + ६य^२ + ७य - १० = ०$ ।

(२) $य^४ - ४य^२ + ५य - २ = ०$ ।

(३) $य^४ - २य^३ + ५य^२ + २य - ५ = ०$ ।

(४) $य^४ - ४य^३ + १०य^२ - १९ = ०$ ।

(५) $य^४ - ३य^३ + २य^२ + य - ३ = ७$ ।

(६) $य^४ - ७य^३ + य^२ - ३ = ०$ ।

(५) नीचे लिखे हुए समीकरणों के सम्भाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बतलाओ:—

(१) $य^३ - १२य + १७ = ०$ ।

(२) $य^४ - ३२य \mp २० = ०$ ।

(३) $य^३ - ४य + ३ = ०$ ।

(४) $४य^३ + ९य^२ - १२य + २ = ०$ ।

(५) $य^७ - अ^५ य^२ + क^७ = ०$ ।

(६) $य^{२न} - प य^२ + त = ०$ ।

(६) यदि फ (य) = $(य^२ - १)^न$ = ० तो दिखलाओ कि

$$य^न - न \frac{न(न-१)}{२न(२न-१)} य^{न-२} +$$

$$\frac{न(न-१)}{२\,!} \cdot \frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{२न(२न-१)(२न-२)(२न-३)} य^{न-४} - \cdots\cdots = ०$$

इसके सब सम्भाव्य मूल −१ और १ के बीच में होंगे।

(७) यदि त, थ, द इन तीनों में से कोई दो शून्य के तुल्य हों तो सिद्ध करो कि

$$(य-अ)(य-क)(य-ग) - त^२(य-अ) - थ^२(य-क)$$
$$- द^२(य-ग) - २ त थ द = ०$$

इस समीकरण के सब मूल सम्भाव्य होंगे।

(८) यदि फ (य) = $य^न (१-य)^न$ = ० तो इस पर से सिद्ध करो कि

$$१ - \frac{न}{१} \frac{न+१}{१} य + \frac{न(न-१)}{२\,!} \frac{(न+१)(न+२)}{२\,!} य^२ - \cdots\cdots = ०$$

इसके सब मूल ० और १ के बीच में होंगे।

(९) फ (य) = $प_० य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ प^{न-२} + \cdots\cdots$ $+ य - त = ०$ इसमें यदि पदों के सब संख्यात्मक गुणकों से प बड़ा हो और त धनात्मक हो परन्तु $\frac{१}{२+४त}$ इससे छोटा हो तो अव्यक्त का एक धन सम्भाव्य मान २त से अल्प होगा।

(१०) $३य^४ + ८य^३ - ६य^२ - २४य + त = ०$ इसमें यदि −८ से छोटा और −१३ से बड़ा त हो तो समीकरण के चार

सम्भाव्य मूल, यदि, −८ से बड़ा और १६ से छोटा न हो तो दो सम्भाव्य मूल और यदि १६ से बड़ा न हो तो कोई सम्भाव्य मूल न होगा।

७—समीकरणों का लघूकरण

७६—समीकरण के किसी दो मूलों में किसी प्रकार के ज्ञात सम्बन्ध से अल्प घात के नये समीकरण द्वारा उन दोनों मूलों के जानने की रीति को समीकरण का लघूकरण कहते हैं।

दिए हुए किसी समीकरण के दो मूलों में परस्पर सम्बन्ध को जानते हो तो उस संबन्ध से अल्प घात का एक नया समीकरण बना सकते हो जिसका एक मूल दिए हुए समीकरण के एक मूल के समान होगा।

जैसे फ $(य) = प_0 य^न + प_1 य^{न-1} +\quad + प^न = 0$ इसके यदि दो मूल $अ_1$ और $अ_2$ हैं और इनमें $अ_2 =$ फा $(अ_1)$ इस प्रकार का संबन्ध है तो $अ_1$ के स्थान में य का उत्थापन देने से

$$फ\left\{फा(य)\right\} = प_0\left\{फा(य)\right\}^न$$
$$+ प_1\left\{फा(य)\right\}^{न-1} + \cdot\, प_न$$

यदि फ $\{$फा (य)$\}$ इसको फि (य) कहें तो य के स्थान में अ$_1$ का उत्थापन देने से

$$फि(अ_1) = फ\{फा(अ_1)\} = फ(अ_2) = ०$$ क्योंकि

अव्यक्त का अ$_2$ यह एक मान है। इस लिये फि (य) = ० और फ (य) = ०

इनके मूलों में अ$_1$ यह एक मूल उभयनिष्ठ हुआ और फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन अवश्य अव्यक्तात्मक निकलेगा जिसे शून्य के समान करने से अ$_1$ यह व्यक्त हो जायगा। यदि महत्तमापवर्त्तन में अव्यक्त के वर्गादि रहें तो अ$_1$ इसके दो तीन इत्यादि मान आवेंगे। फिर अ$_1$ के मान से और अ$_2$ = फा (अ$_1$) इस संबन्ध से अ$_2$ का भी ज्ञान हो जायगा।

इस प्रकार फ (य) = ० इसके दो मूल अ$_1$ और अ$_2$ ज्ञात हो गए। तब (य − अ$_1$) (य − अ$_2$) इससे फ (य) = ० में भाग देने से लब्धि दो घात कम और निःशेष मिलेगी अर्थात् यदि फ (य) = ० यह न घात का समीकरण होगा तो लब्धि न − त घात का समीकरण होगी। इस प्रकार दो मूलों के सम्बन्ध से दिए हुए समीकरण से दो अल्प घात का एक नया समीकरण बन जायगा।

उदाहरण—(१) फ (य) = य^3 − ५य^2 − ४य + २० = ० इसके दो मूल ऐसे हैं जिनका अन्तर ३ होता है तो सब मूलों को बतलाओ।

यहां जिन दो मूलों का अन्तर ३ है यदि उनको $अ_१$ और $अ_२$ मान लें तो

$अ_२ = अ_१ + ३ =$ फा $(अ_१)$ इस लिये ऊपर के समीकरण में य + ३ का उत्थापन देने से

$$फि (य) = (य + ३)^३ - ५(य + ३)^२ - ४(य + ३) + २०$$

$$= य^३ + ९य^२ + २७य + २७ - ५य^२ - ३०य - ४५ - ४य - १२ + २०$$

$$= य^३ + ४य^२ - ७य - १०$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन य − २ हुआ। इसे शून्य के तुल्य करने से य अर्थात् $अ_१ = २$ हुआ। इसका उत्थापन $अ_१$ में देने से $अ_२ = अ_१ + ३ = ५$ हुआ। फिर (य − २) (य − ५) इसका भाग फ (य) में देने से लब्धि = य + २ = ० इस लिये य का तीसरा मान − २ हुआ।

(२) फ $(य) = य^४ - ५य^३ + ११य^२ - १३य + ६ = ०$ इसके दो मूल $अ_१$ और $अ_२$ के बीच $२अ_२ + ३अ_१ = ७$ सम्बन्ध है तो सब मूलों को बताओ।

यहां सम्बन्ध समीकरण से $अ_२ = \frac{७ - ३अ_१}{२} =$ फा $(अ_१)$

ऐसा हुआ इसलिये फ (य) में फा $(य) = \frac{७ - ३अ_१}{२}$ इसका उत्थापन देने से, हर को समच्छेद कर उड़ा देने से और ९ का भाग देने से

$$फि (य) = ९य^४ - ५४य^३ + १२८य^२ - १३८य + ५४$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन य—१ हुआ। इसे शून्य के तुल्य करने से $अ_१ = १$। इसका उत्थापन $अ_१$ में देने से $अ_२ = २$। फिर फ (य) मे (य – १) (य – २) का भाग देकर लब्धि को शून्य के समान करने से और दो मूल $१+\sqrt{-२}$, $१-\sqrt{-२}$ ये आते हैं।

७७—यदि फ (य) = ० इसके $अ_१, अ_२, अ_३$ इन तीन मूलों में

$$अ\, अ_१ + क\, अ_२ + ग\, अ_३ = घ$$

ऐसा सम्बन्ध हो तो यहां सम्बन्ध समीकरण से

$$अ_३ = \frac{घ - अ\, अ_१ - क\, अ_२}{ग}$$

फिर उत्थापन से फ $(अ_१) = ०$, फ $(अ_२) = ०$,

$$फ \left(\frac{घ - अ\, अ_१ - क\, अ_२}{ग}\right) = ०$$

ऐसे तीन समीकरण होंगे। अन्त के दो समीकरणों से $अ_२$ की दो उन्मितिओं पर से एक

फा $(अ_१) = ०$ ऐसा समीकरण बनेगा। इसमें $अ_१$ के स्थान में य का उत्थापन देने से फा (य) = ० और फ (य) = ० इनके मूलों में से एक मूल $अ_१$ उभयनिष्ठ होगा जो महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से सहज में व्यक्त हो जायगा।

७८—समीकरण के मूलों और पदों के जो सम्बन्ध २५वें प्रक्रम मे लिखे हैं उनके बल से भी जिस समीकरण के मूलों के परस्पर सम्बन्ध दिए हों उन मूलों को सहज में निकाल सकते में। जैसे उदाहरण—(१) $य^३ - ६य^२ + ११य - ६ = ०$

यदि इसके मूल $अ_१, अ_२$ और $अ_३$ हों और उनमें $२अ_१ + ३अ_२ + ४अ_३ = ०$ ऐसा सम्बन्ध हो तो उन मूलों को व्यक्त करो।

यहां २५वें प्रक्रम से $अ_१ + अ_२ + अ_३ = ६ \cdots\cdots (१)$

$$२अ_१ + ३अ_२ + ४अ_३ = २० \cdots\cdots (२)$$

(१) का दूना (२) में घटा देने से $अ_२ + २अ_३ = ८$

$$\therefore \; अ_२ = ८ - २अ_३ = फा\,(अ_३)$$

फ (य) में ८ − २य का उत्थापन देने से

$$फि\,(य) = (८ - २य)^३ - ६\,(८ - २य)^२ + ११\,(८ - २य) - ६$$
$$= ५१२ - ३८४य + ९६य^२ - ८य^३ - ३८४ + १९२य - २४य^२ + ८८ - २२य - ६$$
$$= २१० - २१४य + ७२य^२ - ८य^३ = ०$$

−२ का अपवर्त्तन देने से

$$फि\,(य) = ४य^३ - ३६य^२ + १०७\,य - १०५$$

फ (य) और फि (य) का महत्तमापवर्त्तन यहां य − ३ आता है।

इसलिये $अ_३ = ३,\; अ_२ = ८ - २अ_३ = २,$ तब $अ_१ = १$

(२) फ (य) = ० इसके दो दो मूलों का योग २ त अर्थात् यदि एक जोड़े मूल $अ_१, अ_२$ हों तो $अ_१ + अ_२ = २त,$ है तो मूलों को बताओ।

यहां $अ_२ = २त - अ_१$ वा $अ_१ = २त - अ_२$

इसलिये फ $(य) = ० $ और फ $(२त - य) = ०$ । परन्तु यहां दोनों फल एक रूप हो जायंगे । क्योंकि फ $(अ_१) = ०$ $=$ फ $(२त - अ_२)$ और

$$फ (अ_२) = ० = फ (२त - अ_१)$$

इसलिये दोनों फल में उभयनिष्ठ मूल $अ_१$, $अ_२$ हैं ।

इसी प्रकार प्रत्येक जोड़ा मूल दोनों फलों में आवेंगे । इस लिये दोनों फल एक रूप के होंगे । अब यहां महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से मूल नहीं निकल सकते क्योंकि दोनों फल का महत्तमापवर्त्तन फ (य) यही हुआ । तब जान पड़ा कि फ $(य) = ०$ यह जितने घात का समीकरण होगा उतने ही घात का समीकरण महत्तमापवर्त्तन की विधि से भी बना जिसके मूल जानने में कुछ भी सुगमता न पड़ैगी ।

इसलिये यहां कल्पना करो कि

$$\left.\begin{array}{l} अ_१ - अ_२ = २ल \\ अ_१ + अ_२ = २त \end{array}\right\} \therefore अ_१ = त + ल ।$$

इसका उत्थापन फ $(अ_१) = ०$ में देने से फ $(त + ल) = ०$ ऐसा होगा । अब इस पर से ल का मान जानने से तत्सम्बन्धी $अ_१$ और $अ_२$ आ जायंगे । जब जानते हैं कि फ $(य) = ०$ इसके एक एक जोड़े मूल आवेंगे तब स्पष्ट है कि यह समघात का समीकरण होगा ।

मान लो कि

$$फ (य) = (य - अ_१)(य - अ_२)(य - अ_३)(य - अ_४) \cdots\cdots$$

$$\text{तब फ}(\text{ल}+\text{त}) = (\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_1)(\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_2) \times (\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_3)(\text{त}+\text{ल}-\text{अ}_4)\cdots\cdots$$

$$= \left\{ \text{ल}^2 - \left(\frac{\text{अ}_1-\text{अ}_2}{2}\right)^2 \right\} \times \left\{ \text{ल}^2 - \left(\frac{\text{अ}_3-\text{अ}_4}{2}\right)^2 \right\} \cdots\cdots$$

इसलिये फ (त + ल) = ० में ल के समघात रहेंगे। इसमें यदि ल^2 को एक अव्यक्त राशि मान लें तो जितने घात का फ (य) = ० यह समीकरण होगा उसके आधे घात का फ (त + ल) = ० यह समीकरण होगा।

अथवा कल्पना करो कि $\text{अ}_1\text{अ}_2 = \text{ल}$ तो

$$(\text{य}-\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_2) = \text{य}^2 - (\text{अ}_1+\text{अ}_2)\text{य} + \text{अ}_1\text{अ}_2$$
$$= \text{य}^2 - \text{तय} + \text{ल}$$

इसलिये फ (य) यह $\text{य}^2 - \text{तय} + \text{ल}$ इससे निःशेष होगा।

अब फ (य) में बीजगणित की साधारण रीति से $\text{य}^2 - \text{तय} + \text{ल}$ इसका भाग तब तक देते जाओ जब तक कि शेष पा य + वा ऐसा न हो। पा और वा को य से स्वतन्त्र समझना चाहिए अर्थात् ये दोनों ल के फल होंगे।

अब पूर्व युक्ति से स्पष्ट है कि शेष शून्य होगा इसलिये पा = ० और व = ० होंगे। इसलिये ल का कोई मान अवश्य ऐसा होगा जिससे दोनों समीकरण सत्य होंगे। इसलिये पा और वा में एक मान उभयनिष्ठ हुआ जो महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से निकल आवेगा।

तब $अ_१ + अ_२ = २त$ और $ल = अ_१ अ_२$ इन समीकरणों से $अ_१$ और $अ_२$ व्यक्त हो जायंगे।

(३) $फ़(य) = य^{न} + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \quad + प_{न} = ०$

इसके सब मूल योगान्तर श्रेढ़ी में हैं तो मूलों को बताओ।

यहां यदि पहला मूल $= अ$ और चय $= क$ ऐसी कल्पना की जाय तो सब मूल क्रम से

$$अ, अ + क, अ + २क, \ldots\ldots, अ + (न - १)क \text{ होंगे।}$$

२५वें प्रक्रम से

$$-प_१ = अ + (अ + क) + (अ + २क) + \cdots + \left\{अ + (न - १)क\right\}$$

और $$प^२_१ - २प_२ = अ^२ + (अ + क)^२ + \cdots\cdots + \left\{अ + (न - १)क\right\}^२$$

अर्थात् $$-प_१ = नअ + \frac{न(न - १)}{२} क, \quad \cdots\cdots (१)$$

और $$प^२_१ - २प_२ = न अ^२ + न(न - १) अक + \frac{न(न - १)(२न - १)}{६} क^२ \cdots\cdots (२)$$

(१) के वर्ग को न गुणित (२) में घटा देने से

$$(न - १) प^२_१ - २नप_२ = \frac{न^२(न^२ - १)}{१२} क^२ \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

इस पर से क व्यक्त हो जायगा फिर अ भी व्यक्त होगा।

(४) फ (य) $=$ य^3 $-$ ३य^2 $-$ ४य $+$ १२ $=$ ० यदि इसके एक मूल का चिन्ह बदल दिया जाय तो दूसरा मूल होता है अर्थात् यदि दो मूल अ$_1$ और अ^2 हों तो अ$_2$ $=$ $-$अ$_1$ यह सम्बन्ध है। तब सब मूलों को बतलाओ।

यहां ७६वें प्रक्रम से य के स्थान में $-$य का उत्थापन देने से

फि (य) $=$ य^3 $+$ ३य^2 $-$ ४य $-$ १२

अब फ (य) और फि (य) के महत्तमापवर्त्तन से सब मूल निकाल सकते हो।

अथवा फ (य) $=$ य^3 $-$ ३य^2 $-$ ४य $+$ १२ $=$ ० .... (१)

फि (य) $=$ य^3 $+$ ३य^2 $-$ ४य $-$ १२ $=$ ० .... (२)

दोनों के अन्तर से

६य^2 $-$ २४ $=$ ० $\therefore$ य $=$ $\pm$२

इसलिये फ (य) $=$ ० इसके दो मूल $+$२, $-$२, ये हुए। इन पर से तीसरा मूल $+$३ आवेगा।

(५) य^3 $-$ ७य^2 $+$ १४य $-$ ८ $=$ ० .... (१)

इसके दो मूलों का घात यदि २ हो तो मूलों को बताओ।

यदि दो मूल अ$_1$ और अ$_2$ हों तो अ$_1$ अ$_2$ $=$ २

$\therefore$ अ$_2$ $= \frac{२}{अ_1} =$ फ (अ^1)

इसलिये य के स्थान में $\frac{२}{य}$ का उत्थापन देने से

$$फ\left(\frac{२}{य}\right) = \frac{८}{य^३} - \frac{७ \times ४}{य^२} + \frac{२८}{य} - ८ = ८ - २८य + २८य^२ - ८य^३ = ०$$

इसमें -४ का भाग दे देने से मान लो कि

$$फि(य) = २य^३ - ७य^२ + ७य - २ = ० \cdots\cdots\cdots (२)$$

अब (१) और (२) के महत्तमापवर्त्तन $य - १$ को शून्य के समान करने से $अ_१ = १$ और $अ_२ = २$

इन पर से तीसरा मूल $अ_३ = ४$ आता है।

इस प्रकार से जहां जिस तरह से सुभीता पड़े वैसी क्रिया करनी चाहिए।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१—$य^४ - ७य^३ + ११य^२ - ७य + १० = ०$ इसके दो मूल $अ_१, अ_२$ में $अ_२ = २अ_१ + १$ यह सम्बन्ध है। सब मूलों को बताओ। उत्तर $अ_१ = २$, $अ_२ = ५$ और दो मूल $= \pm\sqrt{-१}$

२—नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूलों को बताओ जिनके दो मूल $अ_१, अ_२$ में $अ_२ = -अ_१$ यह सम्बन्ध है।

(१) $य^४ - २य^३ - ७य^२ + ८य - ८ = ०$

(२) $य^४ + ३य^३ - ७य^२ - २७य - १८ = ०$

(३) $य^४ + ३य^३ + २य^२ + ९य - ३ = ०$

(४) $य^४ + य^३ - ११य^२ - ९य + १८ = ०$

३—$य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = ०$ इसके दो मूल $अ_१$ और $अ_२$ में यदि $अ_१अ_२ + १ = ०$ ऐसा सम्बन्ध है तो $प_१, प_२, प_३$ में कैसा सम्बन्ध होगा। उ० $१ + प_२ + प_१प_३ + प^२_३ = ०$

४—नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल योगान्तर श्रेढ़ी में हैं। मूलों को बताओ।

(१) $य^३ - ६य^२ + ११य - ६ = ०$

(२) $य^३ - ९य^२ + २३य - १५ = ०$

(३) $२य^४ - १६य^३ + २८य^२ + १६य - ३० = ०$

(४) $य^४ + ४य^३ - ४य^२ - १६य = ०$

५—$य^३ - २य^२ - य + २ = ०$ इसके दो मूलों का घात -१ है तो मूलों को बताओ। उ० १, −१, २।

६—$य^३ - ७य^२ + १४य - ८ = ०$ इसके क्रम से मूल $अ_१$, $२अ_१$, $४अ_१$ इस प्रकार के हैं तो सब मूलों का ज्ञान करो।

७—$य^४ - ६य^३ + ७य^२ + ६य - ८ = ०$ इसके दो दो मूल $अ+१, अ-१, क+१, क-१$, इस प्रकार से हैं। मूलों को बताओ। उ० १, −१, ४, २।

८—$य^५ - १२य^४ + ५५य^३ - १२०य^२ + १२४य - ४८ = ०$ इसके मूल $अ_१$, $२अ_१$, $अ_२$, $२अ_२$, $अ_१ + अ_२$ इस क्रम से हैं। मूलों को व्यक्त करो। उ० १, २, २, ४, ३।

९—नीचे लिखे हुए समीकरणों में अव्यक्त के कितने मान समान हैं।

(१) $य^४ + ३य^३ - ५य^२ - ६य - ८ = ०$

(२) $य^४ + य^३ - ९य^२ + १०य - ८ = ०$

उ० $य = -४$, वा $य = ४$

१०—$य^४ + पअय^३ + (म^२ + म) अ^२य^२ + प_१अ^३य + अ^४ = ०$ इसके सब मूल गुणोत्तर श्रेढी में हैं। सब मूलों को तथा प और $प_१$ को म और अ के रूप में बताओ।

[मान लो कि मूल क्रम से $\frac{अ_1}{क^2}$ $\frac{अ_1}{क}$ $अ_1$ क, $अ_1 क^2$ ये हैं। इनके घात $अ_1^5 = अ^5$, और दो दो मूलों के घातों का योग $=(म^2+म)$ अ, इस पर से सब मूलों का पता लग जायगा और यह भी जान पड़ैगा कि $प = प_1$ ।]

८—हरात्मक समीकरण

७९—$\frac{१}{अ}$ को अ की हरात्मा कहते हैं। इसी प्रकार य की हरात्मा $\frac{१}{य}$ और $\frac{य}{र}$ की हरात्मा $\frac{र}{य}$ है।

हरात्मक समीकरण—अव्यक्त के स्थान में उसकी हरात्मा का उत्थापन देने से जिस समीकरण में कोई परिवर्त्तन नहीं होता उसको हरात्मक समीकरण कहते हैं।

अर्थात् फ (य) = ० इसके जितने मूल हैं उनके हरात्मा के समान अव्यक्त के मान जिस समीकरण में आते हैं उसका रूप ४०वें प्रक्रम से यदि

$फ(य) = य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots + प_न = 0$ यह हो तो

$प_न र^न + प_{न-1} र^{न-1} + प_{न-2} र^{न-2} + \cdots + प_1 र + 1 = 0$

ऐसा होगा।

इसमें $प_न$ का भाग दे देने से समीकरण का रूप

$$र^न + \frac{प_{न-1}}{प_न} र^{न-1} + \frac{प_{न-2}}{प_न} र^{न-2} + \cdots + \frac{प_1}{प_न} र + \frac{1}{प_न} = 0$$

ऐसा होगा।

इसमें यदि $\frac{प_{न-१}}{प_न} = प_१, \frac{प_{न-२}}{प_न} = प_२, \cdots\cdots \frac{प_१}{प_न} = प_{न-१}, \frac{१}{प_न} = प_न$

ऐसा हो तो स्पष्ट है कि जो रूप फ (य) = ० इसका है वही इस नये समीकरण का होगा। इसलिये य के स्थान में उसकी हरात्मा $\frac{१}{य}$ का उत्थापन देने से भी य के वे ही सब मान आवेंगे। इस प्रकार य के स्थान में यदि उसके हरात्मा का उत्थापन देने से जो नया समीकरण बने उसमें भी यदि दिए हुए समीकरण के य के मान के समान ही मान आवें तो उस नये समीकरण को हरात्मक समीकरण कहते हैं।

ऊपर गुणकों में जो सम्बन्ध दिखलाया है उसके अन्तिम समीकरण $\frac{१}{प_न} = प_न$ इससे $प^२_न = १ \therefore प_न = \pm १$। इसलिये हरात्मक समीकरण दो प्रकार के होते हैं। (१) जिसमें $प_न = +१$ और (२) जिसमें $प_न = -१$।

पहिले प्रकार के समीकरण में

$$प_{न-१} = प_१, प_{न-२} = प_२, \cdots\cdots प_१ = प_{न-१}$$

इससे सिद्ध होता है कि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पद के गुणक जिस समीकरण में तुल्य होते हैं वही पहिले प्रकार का हरात्मक समीकरण होता है। दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में

$$प_{न-१} = -प_१, प_{न-२} = -प_२, \cdots\cdots प_१ = -प_{न-१}$$

इससे सिद्ध होता है कि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित गुणकों की संख्या जिस समीकरण

में समान रहती है परन्तु चिन्हों में व्यत्यास हो जाता है वही दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण होता है।

८०—किसी हरात्मक समीकरण को पहिले प्रकार का समघात का समीकरण बनाना।

कल्पना करो कि किसी हरात्मक समीकरण का $अ_१$ यह एक मूल है तो इसके आदि समीकरण में जिससे यह हरात्मक समीकरण बना है एक अव्यक्त मान $\frac{१}{अ_१}$ यह होगा। परन्तु दोनों समीकरणों में अव्यक्त के मान समान हैं इसलिये $\frac{१}{अ_१}$ यह एक अव्यक्त का मान हरात्मक समीकरण में भी होगा। इस युक्ति से स्पष्ट है कि हरात्मक समीकरण में एक एक जोड़े अव्यक्त के मान $अ_१, \frac{१}{अ_१}$। $अ_२, \frac{१}{अ_२}$। $अ_३, \frac{१}{अ_३}$ इस प्रकार के होंगे। इसलिये समीकरण की घात संख्या यदि विषम होगी तो हरात्मक समीकरण में अव्यक्त का एक मान अवश्य ऐसा होगा जसकी हरात्मा उसी के तुल्य होगी अर्थात् वह मान पहले प्रकार के हरात्मक समीकरण में -१ होगा और दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में $+१$ होगा। इसलिये पहिले प्रकार के हरात्मक समीकरण में $य+१$ का और दूसरे प्रकार के हरात्मक समीकरण में $य-१$ का निःशेष भाग लग जायगा, जिसके भाग देने से पहले प्रकार का हरात्मक समीकरण समघात का होगा। और यदि दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण समघात का होगा तो उसका रूप $य^{न}-१+प_१य(य^{न-२}-१)+\dots\dots$

इस प्रकार का होगा जो $य^२ - १$ इससे भाग देने से निःशेष हो जायगा और लब्धि पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण होगी।

इस प्रकार से किसी हरात्मक समीकरण को पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण बना सकते हैं। लाघव से सर्वत्र हरात्मक समीकरण से पहिले प्रकार का समघात का हरात्मक समीकरण समझना चाहिए जिसका अन्त पद $+१$ होगा।

दूसरे प्रकार का समघात का यदि हरात्मक समीकरण होगा तो गुणकों के सम्बन्ध से $प_म = - प_म$ एक ऐसी स्थिति होगी जहां $म = \frac{न}{२}$ परन्तु जो कुछ $प_म$ है सो तो हई है फिर वह अपने ही ऋणात्मक मान के तुल्य कैसे हो सकता है। इसलिये यदि $प_म$ शून्य के तुल्य न हो तो यह असंभव है। ऐसी स्थिति में हरात्मक समीकरण के बीच का पद न रहेगा।

८१—हरात्मक समीकरण को लघु करना अर्थात् छोटे घात का बनाना।

कल्पना करो कि

$$य^{२म} + प_१ य^{२म-१} + प_२ य^{२म-२} + \cdots + प_२ य^२ + प_१ य + १ = ०$$

यह एक हरात्मक समीकरण है। इसे छोटे घात का बनाना है।

ऊपर के समीकरण में $य^म$ का भाग देने से, दो दो समान गुणक के पदों को एकत्र करने से

$$य^म + \frac{१}{य^म} + प_१\left(य^{म-१} + \frac{१}{य^{म-१}}\right)$$

$$+ प_२\left(य^{म-२} + \frac{१}{य^{म-२}}\right) + \cdots\cdots = ०$$ ऐसा हुआ।

इसमें यदि $य + \frac{१}{य} = र_१,\ य^२ + \frac{१}{य_२} = र_२,$

$$य_३ + \frac{१}{य_३} = र_३, \cdots\cdots य^त + \frac{१}{य^त} = र_त,$$

ऐसी कल्पना की जाय तो बीजगणित की साधारण रीति से

$$र^२_१ = \left(य + \frac{१}{य}\right)^२ = य^२ + \frac{१}{य^२} + २ = \left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) + २$$

$$\therefore र^२_१ = र_२ + २ \qquad \because र_२ = र^२_१ - १$$

$$र_३ = य^३ + \frac{१}{य^३} = \left(य + \frac{१}{य}\right)\left(य^२ + \frac{१}{य^२} - १\right)$$

$$= \left(य + \frac{१}{य}\right)\left\{\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) - १\right\} = र_१\,(र_२ - १)$$

$$= र_१\, र_२ - र_१$$

इस प्रकार

$र_{त+१} = र_त\, र_१ - र_{त-१}$ ऐसा सिद्ध होगा।

इस पर से त के स्थान में २,३,४, इत्यादि का उत्थापन देने से $र_१$ के फल स्वरूप में $र_३$, $र_४$ इत्यादि के मान आजायंगे जिन पर से पहिले की अपेक्षा अब आधे घात का अर्थात् म घात का समीकरण बनेगा। इस पर से जब $र_१$ का मान

आ जायगा तब $य + \frac{१}{य} = र_१$ इस पर से य के दो दो मान आ जायंगे।

उदाहरण—(१) $य^५ + य^४ + य^३ + य^२ + य + १ = ०$ इसमें य के मानों को बताओ।

यहां आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पद के समान गुणक समान हैं इसलिये यह हरात्मक समीकरण हुआ। अन्त पद के धन रूप अर्थात् एक होने से यह समीकरण $य + १$ से निःशेष होगा। भाग देने से

$य^४ + य^२ + १ = ०$।

इसमें $य^२$ का भाग देकर समान गुणक के दो दो पदों को एकत्र करने से

$$य^२ + \frac{१}{य^२} + १ = र^२_१ - १ = ० \quad \therefore र_१ = \pm १$$

इसलिये $य + \frac{१}{य} = १$, $य + \frac{१}{य} = -१$

इन पर से य के मान $\frac{१ \pm \sqrt{-३}}{२}$, $\frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}$।

(२) $य^{१०} - ३य^८ + ५य^६ - ५य^४ + ३य^२ - १ = ०$ इसमें य के मान क्या हैं।

यहां आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक समान और विरुद्ध चिन्ह के हैं इसलिये यह दूसरे प्रकार का हरात्मक समीकरण है। इसे $य^२ - १$ से लघु प्रकार (९वाँ प्रक्रम देखो) से भाग देने से

१	−३	+५	−५	+३	−१
	१	−२	३	−२	१
	−२	३	−२	१	०

इसलिये हरात्मक समीकरण

$य^{८} - २य^{६} + ३य^{४} - २य^{२} + १ = ०$ यह हुआ......(१)

इसमें $य^{४}$ का भाग दे देने से और सम गुणक के दो दो पदों को एकत्र करने से

$$\left(य^{४} + \frac{१}{य^{४}}\right) - २\left(य^{२} + \frac{१}{य^{२}}\right) + ३ = ०$$

८१वें प्रक्रम से $त_{४}$ और $त_{२}$ के मान पर से

$त_{४} = र_{१}^{४} - ४र_{१}^{२} + २,\ त_{२} = र_{१}^{२} - २$ इनका उत्थापन देने से

$र_{१}^{४} - ६र_{१}^{२} + ९ = (र_{१}^{२} - ३)^{२} = ०$

इसलिये $र^{२}_{१} = ३ \therefore र_{१} = \pm\sqrt{३}$

और $य + \frac{१}{य} = +\sqrt{३},\ य + \frac{१}{य} = -\sqrt{३}$

इन पर से य के मान $\frac{\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२}, \frac{-\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२}$

ये मान (१) समीकरण में दो दो बार आते हैं।

(३) $य^{६} + १ = ०$ इसके मूल बताओ।

यहां $य^{३}$ का भाग देने से $य^{३} + \frac{१}{य^{३}} = ०$

८१वें प्रक्रम से $र^{३}_{१} - ३र_{१} = ० \therefore र_{१} = ०,\ र_{१} = \pm\sqrt{३}$

इसलिये दिए हुए समीकरण में वर्गात्मक अव्यक्त-खण्ड

$य^२+१=०, य^२ \pm \sqrt{२}\, य+१=०$ ऐसे होंगे जिनके वश से ६ मूल आ जायंगे।

(४) $\frac{(१+य)^५}{१+य^५}+\frac{(१-य)^५}{१-य^५}=२अ$ इसमें य के मान बताओ।

यहां समीकरण का रूप छोटा करने से और ८१वें प्रक्रम की युक्ति से

$(१-अ)र_१^५+(७+१अ)र_१^२-(५+अ)=०$ ऐसा होगा।

इस पर से य के सब मानों का पता लग जायगा।

(५) $य^{२म}+प_१य^{२म-१}+प_२य^{२म-२}+\cdots\cdots+प_मय^म$

$+५^{=}\ {}^{१}कय^{म-१}+प_{म-२}क^२य^{म-२}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+प_२क^{म-२}य^२+प_१क^{म-१}य+क^म=०$

इसका ऐसा रूपान्तर करो जिसमें एक ह्रासात्मक समीकरण बने।

मान लो कि $य=ल\cdot क^{\frac{१}{२}}$ तो समीकरण का रूप

$ल^{२म}\cdot क^म+प_१ल^{२म-१}\cdot क^{\frac{२म-१}{२}}+\cdots\cdots\cdots+प_मल^मक^{\frac{म}{२}}$

$+प_{म-१}ल^{म-१}क^{\frac{म+१}{२}}+\cdots\cdots$

$+\cdots\cdots\cdots+प_१लक^{\frac{२म-१}{२}}+क^म=०$

इसमें $क^म$ का भाग देने से

$$ल^{२म} + प_१ ल^{म-१}.क^{-\frac{१}{२}} + \cdots\cdots + प_म ल^म.क^{-\frac{म}{२}}$$

$$+ प_{म-१} ल^{म-१}.क^{\frac{-(म-१)}{२}} + \cdots\cdots$$

$$+ \cdots\cdots + प_१ क^{-\frac{१}{२}} + १ = ०$$

अब यह हरात्मक समीकरण हो गया क्योंकि आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक समान हैं।

इस प्रकार से दिए हुए समीकरण से जहां हरात्मक समीकरण बन जाता हो तहां अव्यक्त के मान निकल सकते हैं।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^५ - १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

२। $(१ + य)^४ = अ(१ + य^४)$ इसके मूल बताओ।

३। $(१ + य)^५ = अ(१ + य^५)$ इसमें य के मान बताओ।

४। $२य^६ + य^५ - १३य^४ + १३य^२ - य - २ = ०$ इसमें य के मान बताओ। उ० $२, \frac{१}{२}, \frac{१}{२}(-३ \pm \sqrt{५}), १, -१$।

५। $य^{१०} - १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

६। $य^४ + पय^२ + १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

७। $य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots + प_२ य^२ + प_१ य + १ = ०$ इसमें य के मान यदि अ, क, ल, ग, घ, इत्यादि हों तो सिद्ध करो कि

५ $$\frac{अ^२}{क^२}+\frac{अ^२}{ख^२}+\cdot \; +\frac{क^२}{अ^२}+\frac{क^२}{ख^२}+\cdots\cdots+\frac{ख^२}{अ_२}+\frac{ख^२}{क_२}+\cdots\cdots$$

$$=(प_१^२-२प_२)^२-न$$

८ । $य^{२न}-प_१ य^{२न-१}+प_२ य^{२न-२}-प_३ य^{२न-३}+\cdot=०$
इस प्रकार के हरात्मक समीकरण में जहां एक धन, एक ऋण, इस प्रकार से पद हैं वहां सिद्ध करो कि यदि $\frac{प_न}{न}<२$ तो सब अव्यक्त के मान संभाव्य नहीं हो सकते।

९ । $य^७-३य^५+य^४+य^३-२य^२+१=०$ इसके मूल बताओ।

१० । $य^७+२य^६-८य^५-७य^४-७य^३-८य^२+२य+१=०$ इसमें य के मान बताओ।

११ । $य^८+२य^७+३य^६+२य^५-२य^३-३य^२-१=०$ इस में य के मान बताओ।

६—द्वियुक्पद समीकरण

८२—जो समीकरण $य^न-आ=०$ इस प्रकार का होता है उसे द्वियुक् पद समीकरण कहते हैं। इसमें आ यह व्यक्त संख्या है।

इस समीकरण के सब मूल भिन्न भिन्न होंगे क्योंकि फ $(य)=य^न-आ=०$ तो फ' $(य)=न य^{न-१}=०$ । अब य का कोई ऐसा मान नहीं जो दोनों समीकरणों को ठीक रखे (५३वां प्रक्रम देखो)

८३—यदि $य^न - आ = ०$ तो बीजगणित की साधारण रीति से $य = \sqrt[न]{आ}$ अर्थात् आ के न घात मूल के तुल्य य का एक मान आता है। परन्तु यह न घात का समीकरण है इसलिये २४वें प्रक्रम से य के भिन्न भिन्न न मान आवेंगे। इसलिये कह सकते हैं कि कोई बीजात्मक राशि के न घात मूल भिन्न भिन्न न आवेंगे।

किसी बीजात्मक राशि के कोई एक न घात मूल से एक के अर्थात् रूप के न घात मूलों को क्रम से गुण देने से उस राशि के सब न घात मूलों के मान हो जायंगे।

कल्पना करो कि आ राशि के न घात मूल का एक मान अ है अर्थात् $अ^न = आ$ तो य के स्थान में अ र का उत्थापन देने से $य^न - आ = अ^न र^न - आ = आ र^न - आ = ०$।

$$\therefore र^न - १ = ० \quad \therefore र = \sqrt[न]{१}।$$

इसलिये १ के न घात मूल के तुल्य र हुआ और $य = अ \cdot र = अ\sqrt[न]{१}$। परन्तु $य = \sqrt[न]{आ}$ इसलिये $\sqrt[न]{आ}$

$$= अ\sqrt[न]{१}।$$

$य^न - आ = ०$ वा $य^न + अ = ०$ इस प्रकार के दिए हुए समीकरण पर से $र^न - १ = ०$ वा $र^न + १ = ०$ इस प्रकार का समीकरण बन जाता है जिससे १ के न घात मूलों के मान

जान कर उन्हें क्रम से आ के न घात मूल के एक मान से जो व्यक्तगणित वा द्वियुक्पद सिद्धान्त से आ जायगा, गुण देने से य के सब मान आ जायंगे।

अब +१ वा −१ के न घात मूल के सब मान कैसे निकलेंगे इसके लिये आगे कुछ सिद्धान्त दिखलाते हैं।

८४—यदि $य^न - १ = ०$ इसमें य का एक मान $अ_१$ हो तो $अ^म_१$ यह भी य का एक मान होगा जहां म कोई धन वा ऋण अभिन्नाङ्क है। क्योंकि $(अ^म_१)^न = (अ^न_१)^म = १^म = १$।

८५—यदि $य^न + १ = ०$ इसमें यदि य का एक मान $अ_१$ हो तो $अ^म_१$ भी य का एक मान होगा जहां म कोई धन वा ऋण विषम अभिन्नाङ्क है। क्योंकि

$$(अ^म_१)^न = (अ^न_१)^म = (-१)^म = -१।$$

८६—यदि म और न परस्पर दृढ़ हों तो $य^म - १ = ०$ और $य^न - १ = ०$ इन दोनों समीकरणों में एक को छोड़ य का ऐसा कोई मान न होगा जो उभयनिष्ठ हो।

कल्पना करो कि $प_१$ और $प_२$ दो ऐसे अभिन्नाङ्क हैं जिनके वश से

$$प_१ म - प_२ न = \pm १$$

ऐसा समीकरण बनता है। ($प_१$ और $प_२$ सर्वदा $\frac{म}{न}$ इसके वितत रूप से व्यक्त हो जाते हैं; इसके लिये मेरा सोधा

भास्कराचार्य का बीजगणित देखो) और मान लो कि य का एक मान एक को छोड़ $अ_1$ है जो दोनों समीकरणों को ठीक रखता है तो

$$अ_1^{म} = १ \quad \therefore \quad अ_1^{प_1 म} = १ \ldots\ldots (१)$$

$$और \; अ_1^{न} = १ \quad \therefore \quad अ_1^{प_2 न} = १ \ldots\ldots (२)$$

(१) में (२) का भाग देने से

$$अ_1^{प_1 म - प_2 न} = अ_1^{\pm १} = १$$

इसलिये $अ_1 = १$ इससे ऊपर का सिद्धान्त सिद्ध हुआ।

८७—$य^{न} - १ = ०$ इसमें यदि न दृढ़ संख्या हो और इस समीकरण का एक मूल रूप छोड़ कर $अ_1$ हो तो सब मूल क्रम से

$$अ_1,\ अ_1^{२},\ अ_1^{३}, \ldots\ldots अ_1^{त}, \ldots\ldots अ_1^{न} \text{ ये होंगे।}$$

८४वें प्रक्रम में सिद्ध है कि $अ_1, अ_1^{२}, अ_1^{३}, \ldots\ldots अ_1^{न}$ ये सब मूल हैं। इसलिये यहां पर इतना ही दिखला देना है कि ये सब परस्पर भिन्न हैं अर्थात् इनमें कोई एक दूसरे के समान नहीं हैं। यदि हैं तो मान लो कि $अ_1^{त}$ और $अ_1^{द}$ दोनों तुल्य हैं जहां त और द दोनों न से अल्प हैं। इसलिये त—द भी न से अल्प होगा।

$$अब \; अ_1^{त} = अ_1^{द} \quad \therefore \quad अ_1^{त-द} = १ \text{ और } अ_1^{न} = १$$

इसलिये $य^{त-द} - १ = ०$ और $य^{न} - १ = ०$ इन दोनों समीकरणों में य का एक मान रूप के अतिरिक्त $अ_1$ उभयनिष्ठ हुआ जो न और त—द के परस्पर दृढ़ होने से ८६वें प्रक्रम से असम्भव है। इसलिये

$अ_1, अ^2_1, अ^3_1, \cdots\cdots अ^न_1$ ये सब आपस में समान नहीं हैं यह सिद्ध हुआ। तब स्पष्ट हो गया कि वे सब $य^न - १ = ०$ इसके मूल हैं।

८८—यदि न दृढ़ संख्या न हो और $य^न - १ = ०$ इसका रूपातिरिक्त एक मूल $अ_1$ हो तब यह नहीं कह सकते कि $अ_1, अ^2_1, अ^3_1, \cdots\cdots अ^न_1$ ये भी क्रम से सब मूल होंगे।

क्योंकि यदि $न = प \cdot ल$, जहां प दृढ़ संख्या है और $य^प - १ = ०$ इसका एक मूल $अ_1$ हो तो यही एक मूल $य^न - १ = ०$ इसका भी होगा क्योंकि $अ^न_1 = अ^{प \cdot ल}_1 = (अ^प_1)^ल = १$ और ८७वें प्रक्रम की युक्ति से

$अ_1, अ^2_1, अ^3_1, \cdots\cdots अ^प_1$ ये सब भिन्न भिन्न होंगे परन्तु आगे आगे बढ़ाने से $अ^{प+1}_1 = अ^प_1 \times अ_1 = अ_1$ यह अव्यक्त के पहले मान के समान हो गया। इसी प्रकार य के आगे के सब मान अब पिछले मानों के समान होंगे।

इसलिये $अ_1, अ_1^2, अ_1^3, \cdots\cdots अ_1^न$ ये सब $य^न - १ = ०$ इसके सब मूल नहीं हो सकते क्योंकि इसके जितने मूल हैं उनमें कोई आपस में समान नहीं है (८२वां प्र० देखो)।

८९—यदि $न = क \cdot ख \cdot ग \cdot घ \cdots\cdots$ जहां ये सब दृढ़ संख्या हैं तो $य^क - १ = ०, य^ख - १ = ०, य^ग - १ = ०, \cdots\cdots$ इनके जो मूल होंगे वे सब $य^न - १ = ०$ इसके भी मूल होंगे।

क्योंकि यदि $य^क - १ = ०$ इसके कोई एक मूल को $अ_1$ कहो तो $अ^क_1 = १$ जिससे $अ^न_1 = (अ^क_1)^{ख \cdot ग \cdots} = १$ अर्थात् $अ^न_1 - १ = ०$

इसी प्रकार और $य^{ख} - १ = ०$, $य^{ग} - १ = ०$ ...... समीकरणों के मूल से भी सिद्ध कर सकते हो।

९०—यदि न = क·ख ग ...... जहां क·ख·ग ......इत्यादि सब दृढ़ संख्या हैं तो $य^{न} - १ = ०$ इसके मूल $(१ + अ_{१} + अ_{१}^{२} + अ_{१}^{३} + \cdots\cdots + अ_{१}^{क-१}) (१ + अ_{२} + अ_{२}^{२} + अ_{२}^{३} + \cdots + अ_{२}^{ख-१}) (१ + अ_{३} + अ_{३}^{२} + \cdots\cdots + अ_{३}^{ग-१})$ इनके गुणनफल में जो आदि से न पद होंगे उन प्रत्येक पद के समान होंगे। जहां $अ_{१}$, $य^{क} - १ = ०$ इसका $अ_{२}$, $य^{ख} - १ = ०$ इसका $अ_{३}$, $य^{ग} - १ = ०$ इसका......एक मूल है।

यहां क, ख, ग, तीन दृढ़ संख्या के घात के तुल्य न है यह मान कर उपपत्ति दिखलाई जाती है।

ऊपर के गुणन फल में मान लो कि कोई पद $अ_{१}^{प}, अ_{२}^{व} अ_{३}^{म}$ है तो स्पष्ट है कि यह $य^{न} - १ = ०$ इसका एक मूल है क्योंकि $अ_{१}^{प·न} = १$, $अ_{२}^{व·न} = १$, $अ_{३}^{म·न} = १$

इसलिये $(अ_{१}^{प} \; अ_{२}^{व} \; अ_{३}^{म})^{न} = १$

अब इतना और दिखला देना है कि ऊपर के गुणन फल में कोई दो पद आपस में तुल्य नहीं है। यदि कहा जाय कि तुल्य हैं तो मान लो कि

$अ_{१}^{प} \; अ_{२}^{व} \; अ_{३}^{म} = अ_{१}^{प'} \; अ_{२}^{व'} \; अ_{३}^{म'}$ तब $अ_{१}^{प-प'} = अ_{२}^{व'-व} \; अ_{३}^{म'-म}$ इस समीकरण का बायां पक्ष $य^{क} - १ = ०$ इसका एक मूल हैं और दहना पक्ष

$य^{ख ग} - १ = ०$ इसका एक मूल है। इसलिये $य^{क} - १ = ०$, $य^{ख ग} - १ = ०$ इन दोनों में एक मूल उभयनिष्ठ हुआ। परन्तु क और ख·ग परस्पर दृढ़ हैं, इसलिये ८६वें प्रक्रम से यह बात

असंभव है। इसलिये ऊपर के गुणन फल में कोई दो पद परस्पर तुल्य नहीं हैं।

९१—इसी प्रकार यदि $न = क^प ख^ब ग^म$ जहां क, ख, ग दृढ़ हैं तो दिखला सकते हो कि $अ_१ अ_२ अ_३$ इस प्रकार के जो न गुणन फल होंगे वे $य^न - १ = ०$ इसके मूल होंगे जहां $अ_१$, $य^{क^प} - १ = ०$ इसका $अ_२$, $य^{ख^ब} - १ = ०$ इसका $अ_३$, $य^{ग^म} - १ = ०$ इसका एक मूल है।

इसकी उपपत्ति भी पिछले ही प्रक्रम की युक्ति ऐसी है क्योंकि $क^प$, $ख^ब$, $ग^म$ इनमें प्रत्येक से न निःशेष होता है इसलिये $अ_१^न = १$, $अ_२^न = १$, $अ_३^न = १$ और ९०वें प्रक्रम की युक्ति से दिखला सकते हो कि $अ_१$ $अ_२$ $अ_३$ इस प्रकार के मूलों के कोई दो गुणनफल समान नहीं हैं।

इसी प्रकार, तीन से अधिक दृढ़ संख्याओं को भिन्न भिन्न घात के गुणन फल के तुल्य 'न' हो तो भी सब बात सिद्ध कर सकते हो।

९२—$य^न - १ = ०$ इसमें य के न मान आवेंगे और यदि $न = प^अ$ जहां प कोई दृढ़ संख्या है और $य^{प^{अ-१}} - १ = ०$ इसमें $प^{अ-१}$ इतने य के मान आवेंगे जो सब ८९वें प्रक्रम से $य^न - १ = ०$ इसमें भी य के मान होंगे। इसलिये $य^{प^{अ-१}} - १ = ०$ इसके जितने मूल हैं उनसे नये $प^अ - प^{अ-१} = प^अ (१ - \frac{१}{प})$ इतने मूल $य^न - १ = ०$ इसके होंगे।

इसी प्रकार $य^{ब^{क-१}} - १ = ०$ इसके मूल से $य^{ब^क} - १ = ०$ इसके नये मूल $ब^क (१ - \frac{१}{ब})$ इतने होंगे।

अब यदि $न = प^{अ} व^{क}$ जहां प और व परस्पर दृढ़ हैं और ऊपर के नये मूलों में पहले समीकरण का एक मूल $अ_{१}$, दूसरे का एक मूल $अ_{२}$, कल्पना करो तो जितने मूल $य^{प^{अ}} - १ = ०$, और $य^{व^{क}} - १ = ०$ इनके होंगे उनसे नया एक मूल $अ_{१}\, अ_{२}$ के तुल्य $य^{न} - १ = ०$ इसका होगा।

यदि कहो कि $अ_{१}\, अ_{२}$ यह नया मूल $य^{न} - १ = ०$ इसका न होगा तो कल्पना करो कि कोई 'न' से अल्प म घात के समीकरण का यह मूल होगा तो $(अ_{१}\, अ_{२})^{म} = १$

$$\therefore अ_{१}^{म} = अ_{२}^{-म}$$

परन्तु $अ_{१}^{म}$, $य^{प^{अ}} - १ = ०$ इसका एक मूल है और $अ_{२}^{-म}$, $य^{व^{क}} - १ = ०$ इसका एक मूल है। इसलिये दोनों समीकरण का एक ही मूल हुआ जो $प^{अ}$ और $व^{क}$ के परस्पर दृढ़ होने से ८९वें प्रक्रम से असंभव है। इसलिये न से म छोटा नहीं हो सकता। इसलिये $य^{न} - १ = ०$ इसका $अ_{१}\, अ_{२}$ यह एक नया मूल होगा। इस प्रकार से दो दो मूलों को लेने से

$$प^{अ} \left(१ - \frac{१}{प}\right) व^{क} \left(१ - \frac{१}{व}\right) = न \left(१ - \frac{१}{प}\right) \left(१ - \frac{१}{व}\right)$$

इतने भेद होंगे। इसलिये $य^{न} - १ = ०$ इसके $न \left(१ - \frac{१}{प}\right) \times \left(१ - \frac{१}{व}\right)$ इतने मूल

$य^{प^{अ}} - १ = ०$ और $य^{व^{क}} - १ = ०$ इसके मूलों से नये आवेंगे।

विशिष्ट मूल—इस प्रकार से न घात द्वियुक्पद समीकरण में न के अपवर्त्तनाङ्क रूप घात के समीकरण के मूलों से जो नये मूल आते हैं उन्हें विशिष्ट मूल कहते हैं।

९३—$य^{न} - १ = ०$ इसका एक विशिष्ट मूल यदि $अ_१$ कहें तो सब मूल क्रम से

$$अ_१, अ^२_१, अ^३_१, अ^४_१, \cdots\cdots अ^{न}_१$$ ये होंगे।

यहां स्पष्ट है कि $अ^{न}_१ = १$ क्योंकि ८४वें प्रक्रम से ये सब मूल होंगे। इनमें यदि कोई दो तुल्य हों तो मान लो कि $अ^{त}_१ = अ^{द}_१ \; \therefore \; अ^{न-द} = १$ परन्तु त—द यह न से अल्प है इसलिये $अ_१$ विशिष्ट मूल नहीं हो सकता।

ऊपर के मूलों को $१, अ_१, अ^२_१, अ^३_१ \cdots\cdots अ^{न-१}_१$ ऐसे भी लिख सकते हैं। इस श्रेढी में यदि एक पद $अ^{त}_१$ यह चुन लें जहां त यह न से छोटा और दृढ़ है तो

$$अ^{त}_१, अ^{२त}_१, अ^{३त}_१, \cdots\cdots अ^{त(न-१)}_१, अ^{नत}_१ (= १)$$

ये सब भी परस्पर दृढ़ भिन्न होंगे क्योंकि त, २त, इत्यादि घाताङ्कों में न का भाग देने से शेष भिन्न भिन्न ०, १, २, ३, ⋯ न − १ ये आते हैं। और ऊपर लिखे मूलों में से $अ^{त}_१$ से आगे त + १ दूरी पर जो जो पद हैं उनके मूल होंगे। अन्तिम पद के बाद आदि पद से गणना कर त + १ का विचार करो। इसलिये ये भी वे ही सब मूल हैं केवल ऊपर के क्रम की अपेक्षा भिन्न क्रम से स्थित हैं।

९४—$य^{न} - १ = ०$ इसके कोई एक विशिष्ट मूल जानने के लिये चाहिए कि न का दृढ़ गुणय गुणक रूप खण्ड कर उन गुणय गुणक घात के जो पृथक् पृथक् द्वियुकपद समीकरण होंगे उनमें जो समान अव्यक्तात्मक गुणय गुणक रूप खण्ड हों उनमें से एक एक और भिन्न अव्यक्तात्मक सब खण्डों के घात

से दिए हुए समीकरण में भाग देकर लब्धि को शून्य के तुल्य करने से विशिष्ट मूल को लाना चाहिए। अथवा जो पृथक् पृथक् द्वियुक्पद समीकरण है उनके लघुतमापवर्त्य से भाग देकर, लब्धि को शून्य कर विशिष्ट मूल ले आवो।

जैसे $य^{६} - १ = ०$ इसके मूलों को जानना है।

यहां $न = ६ = २ \times ३$ इसलिये $य^{२} - १ = ०$, $य^{३} - १ = ०$ इनके सब मूल $य^{६} - १ = ०$ इसके भी मूल होंगे (८६ प्र० देखो)

परन्तु $य^{२} - १ = (य + १)(य - १)$ और $य^{३} - १ = (य - १) \times (य^{२} + य + १)$। दोनों में $य - १$ यह खण्ड आया। यह खण्ड और दोनों के भिन्न भिन्न खण्डों के घात

$$= (य + १)(य - १)(य^{२} + य + १)$$
$$= (य + १)(य^{३} - १)$$

इससे $य^{६} - १$ इसमें भाग देने से और लब्धि को शून्य के समान करने से

$$\frac{य^{६} - १}{(य + १)(य^{३} - १)} = \frac{य^{३} + १}{य + १} = य^{२} - य + १ = ० \text{ ऐसा हुआ}$$

इस पर से विशिष्ट मूल

$$\frac{१ + \sqrt{-३}}{२} = अ_{१} \text{ वा } \frac{१ - \sqrt{-३}}{२} = अ_{२} ।$$

और दिए हुए समीकरण के मूल

$$अ_{१},\ अ_{१}^{२},\ अ_{१}^{३},\ अ_{१}^{४},\ अ_{१}^{५},\ अ_{१}^{६} (= १)$$

यहां

$$अ_{१} = \frac{१ + \sqrt{-३}}{२},\ अ_{१}^{२} = \frac{-१ + \sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^{३}_{१} = अ_{१} \cdot अ^{२}_{१} = \frac{(१+\sqrt{-३})(-१+\sqrt{-३})}{२ \times २} = -१$$

$$अ^{४}_{१} = अ^{३}_{१} \cdot अ_{१} = -\frac{१+\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^{५}_{१} = अ^{४}_{१} \cdot अ_{१} = \frac{(-१-\sqrt{-३})(१+\sqrt{-३})}{२ \times २} = \frac{१-\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^{६}_{१} = अ^{५}_{१} \cdot अ_{१} = \frac{(१-\sqrt{-३})(१+\sqrt{-३})}{२ \times २} = १$$

इसलिये क्रम से मूल

$$१, \frac{१+\sqrt{-३}}{२}, \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}, -१, -\frac{१+\sqrt{-३}}{२},$$

$$\frac{१-\sqrt{-३}}{२},$$

इसमें अन्त का मूल, $अ_{२}$ के समान है। इस पर से यदि ९३वें प्रक्रम से मूल निकालो तो

$अ_{२}, अ^{२}_{२}, अ^{३}_{२}, अ^{४}_{२}, अ^{५}_{२}, अ^{६}_{२}$ ये होंगे।

परन्तु

$$अ_{२} = \frac{१-\sqrt{-३}}{२}, \; अ^{२}_{२} = -\frac{१+\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ^{३}_{२} = अ^{२}_{२} \cdot अ_{२} = \frac{(१-\sqrt{-३})(-१-\sqrt{-३})}{२ \times २} = -१$$

$$अ^{४} = अ^{३}_{२} \cdot अ_{२} = -\frac{१-\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ_१^४ = अ_२^४ \cdot अ_१ = \frac{(१-\sqrt{-३})(-१+\sqrt{-३})}{२\times२} = \frac{१+\sqrt{-३}}{२}$$

$$अ_१^५ = अ_२^५ \cdot अ_१ = \frac{(१-\sqrt{-३})(१+\sqrt{३})}{२\times२} = १$$

क्रम से मूल

$$\frac{१-\sqrt{-३}}{२}, -\frac{१+\sqrt{-३}}{२}, -१, -\frac{१-\sqrt{-३}}{२},$$

$$\frac{१+\sqrt{-३}}{२}, १$$

यह मूल श्रेढी $अ_२$ से बनी है और $अ_२ = अ_१^२$। इसलिये ६३वें प्रक्रम से $त = ५$ और $त+१ = ६$, इसलिये पहली मूल श्रेढी के $अ_१^२$ पद से छ पद जो हैं वे इस मूल श्रेढी के क्रम से दूसरा, तीसरा इत्यादि पद हैं।

(२) $य^{१२} - १ = ०$ इसके विशिष्ट मूलों को जानना है।

यहां $न = १२$ जो २ और ३ दृढाङ्क से निःशेष होता है जैसे $\frac{१२}{३} = ४$, $\frac{१२}{२} = ६$, इसलिये $य^४ - १ = ०$ और $य^६ - १ = ०$ इसके जितने मूल होंगे वे सब $य^{१२} - १ = ०$ इसके भी मूल होंगे। इसलिये $य^४ - १$ और $य^६ - १$ इसके लघुत्तमापवर्त्य $(य^२+१) \times (य^६ - १)$ इससे $य^{१२} - १$ इसमें भाग देने से $\frac{य^{१२}-१}{(य^२+१)(य^६-१)}$ $= य^४ - य^२ + १$ ....इस लब्धि को शून्य के तुल्य करने से

$$य^४ - य^२ + १ = ० \quad\quad (१)$$

यह हरात्मक समीकरण हुआ।

(१) में $य^२$ का भाग देने से और $य + \frac{१}{य} = र_१$ मानने से ८१वें प्रक्रम से

$$\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) - १ = र_१^२ - ३ = ०$$

$$\therefore \quad र_१ = \pm\sqrt{३} = य + \frac{१}{य}$$

$$\therefore \quad य^२ + १ = \pm य\sqrt{३}$$

$$\text{वा} \quad य^२ \mp य\sqrt{३} + १ = ०$$

$$\therefore \; य = \frac{\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२} \text{ वा } य = \frac{-\sqrt{३} \pm \sqrt{-१}}{२}$$

$य^{१२} - १ = ०$ इसके ये चार विशिष्ट मूल हुए।

इन चारों को क्रम से $अ, \frac{१}{अ}, अ_१, \frac{१}{अ_१}$ कहो तो

$$अ + \frac{१}{अ} + अ_१ + \frac{१}{अ_१} = (अ + अ_१)\left(१ + \frac{१}{अ\,अ_१}\right) = ०$$

$$\therefore \; अ\,अ_१ = -१ ।$$

$य^{१२} - १ = (य^६ + १)(य^६ - १) = ०$ । $य^६ - १ = ०$ इसके जो मूल हैं उनके नये अ और $अ_१$ हैं इसलिये $य^६ + १ = ०$ इस समीकरण के अ और $अ_१$ मूल हैं। तब $अ^६ = -१$ और $अ^५ = -\frac{१}{अ} = अ_१$ । इसलिये

$अ, अ_१, \frac{१}{अ}, \frac{१}{अ_१}$, इन मूलों को $अ, अ^५, अ^७, अ^{११}$ इस श्रेढी से प्रकट कर सकते हैं क्योंकि $अ^{१२} = १$ और इस श्रेढी में

एकादि पदों के पहले स्थान में क्रम से अ, अ^{५}, अ^{७}, अ^{११} रख कर, क्रम से उनका ५,७,११ घात करने से और १२ से ऊपर के घातों को १२ से तष्ट करने से

अ,	अ^{५},	अ^{७},	अ^{११}
अ^{५},	अ	अ^{११}	अ^{७}
अ^{७},	अ^{११}	अ	अ^{५}
अ^{११},	अ^{७}	अ^{५}	अ ऐसा हुआ।

देखो यहाँ हर एक ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्तियों में वे ही मूल हैं केवल क्रम में भेद है।

अ, अ^{५}, अ^{७}, अ^{११} इन विशिष्ट मूलों में घात की संख्यायें ५, ७, ११ ये सब १२ से अल्प और दृढ़ हैं। इसलिये ६३वें प्रक्रम से कोई को लेकर उसके एक, द्वि, इत्यादि सब घात से य^{१२}—१ = ० इसके मूल आ जायँगे। इन चारो पर से मूल जो घात १२ से ऊपर हैं उन्हें १२ से तष्ट कर देने से

अ	अ^{२}	अ^{३}	अ^{४}	अ^{५}	अ^{६}	अ^{७}	अ^{८}	अ^{९}	अ^{१०}	अ^{११}	१
अ^{५}	अ^{१०}	अ^{३}	अ^{८}	अ	अ^{६}	अ^{११}	अ^{४}	अ^{९}	अ^{२}	अ^{७},	१
अ^{७}	अ^{२}	अ^{९}	अ^{४}	अ^{११}	अ^{६}	अ	अ^{८}	अ^{३}	अ^{१०}	अ^{५}	१
अ^{११}	अ^{१०}	अ^{९}	अ^{८}	अ^{७}	अ^{६}	अ^{५}	अ^{४}	अ^{३}	अ^{२}	अ^{१}	१

ये क्रम भेद से सब तिर्यक् पंक्तियों में एक ही हैं।

इस प्रकार से जहाँ जैसा सम्भव हो तहाँ तैसे दिए हुए समीकरण के ऐसे उससे बड़े से बड़े ऐसे लघु घात के समीकरण बनाने चाहिए जिनमें वे लघु घाताङ्क से दिए हुए समीकरण की घात संख्या निःशेष हो जाय। फिर इन समीकरणों के लघुत्तमापवर्त्य से दिए हुए समीकरण में भाग देकर लब्धि को शून्य के समान कर विशिष्ट मूलों का पता लगाना चाहिए।

९५—$य^न - १ = ०$ इस समीकरण में जहाँ न की संख्या दो से अधिक है, ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि १ को छोड़ इसके सब मूल असम्भव हैं। इसलिये ऐसे समीकरण का विशिष्ट मूल भी असम्भव संख्या होगा।

त्रिकोणमिति में डिमाइवर के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि यदि त यह धन अभिन्नाङ्क हो तो

$$\left(\text{कोज्या } \frac{२ त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ त \pi}{न} \right)^न = १$$

इसलिये $य^न - १ = ०$ इसका एक मूल

$$\text{कोज्या } \frac{२ त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ त \pi}{न} = अ_१ \text{ यह अवश्य होगा}$$

यदि त को न से दृढ़ मानो तो कह सकते हो कि $य^न - १ = ०$ इसका एक विशिष्ट मूल $अ_१$ होगा और तब ९३वें प्रक्रम से

$अ_१, अ_१^२, अ_१^३, \dots\dots अ_१^{न-१}$

ये सब दिए हुए समीकरण के मूल होंगे जो परस्पर भिन्न हैं। यदि कोई कहे कि इनमें कोई दो समान हैं तो मान लो कि $अ_१^थ = अ_१^द$ जहाँ थ और द दोनों धन और न से अल्प हैं

डिमाइवर के सिद्धान्त से

$$अ_१^थ = \text{कोज्या } \frac{२ थ त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ थ त \pi}{न}$$

$$\text{और } अ_१^द = \text{कोज्या } \frac{२ द त \pi}{न} + \sqrt{-१} \text{ ज्या } \frac{२ द त \pi}{न}$$

यदि ये दोनों तुल्य होंगे तो अवश्य $\frac{२ थ त \pi}{न}$ और $\frac{२ द त \pi}{न}$ ये दोनों तुल्य होंगे अथवा दोनों का अन्तर चार समकोण का अपवर्त्य होगा।

इसलिये $\frac{थ \backsim द}{न}$ यह एक अभिन्नाङ्क होगा। परन्तु त यह न से दृढ़ है, इसलिये थ ∽ द यह न से निःशेष होगा। परन्तु थ और द ये न से छोटे कल्पना किए गए हैं, इसलिये न से इनके अन्तर का निःशेष होना असम्भव है। तब $अ^{थ}_{१}$, $अ^{द}_{१}$ ये दोनों परस्पर तुल्य नहीं हो सकते। इसलिये ऊपर के सब मूल अवश्य परस्पर भिन्न हैं।

९६—$य^{न} - १ = ०$ और $य^{न} + १ = ०$ इनके मूलों के जानने के लिये नीचे लिखी साधारण रीति को इस तरह दिखला सकते हो

यदि $न = २^{त}$ तो $य^{न} - १ = ०$ इसका एक मूल तो स्पष्ट है कि $+१$ होगा और सब मूल बार बार -१ के मूल लेने से जो १५वें प्रक्रम से असम्भव होंगे व्यक्त हो जायँगे। यदि $न = प \cdot म$, जहाँ $प = २^{त}$ तो

$$य^{न} = य^{पम} = (य^{२त})^{म} = र^{म}, \text{ यदि } य^{प} = र \text{ तो}$$

$य^{न} - १ = ०$ और $य^{न} + १ = ०$ इन दोनों के मूल क्रम से $र^{म} - १ = ०$ और $र^{म} + १ = ०$ इनके मूल होंगे। इनमें यदि र के मान व्यक्त हो जायँ तो उनके बार बार त बार मूल लेने से य के मान भी व्यक्त हो जायँगे।

९७—$य^{न} - १ = ०$ इसमें मान लो कि न विषम $२म + १$ के तुल्य है तो डिकार्टिस् की युक्ति से $य^{२म+१} - १ = ०$ इसका ऋण संभव मूल न होगा और धन संभाव्य मूल $न + १$ होगा। यदि $+१$ से भिन्न कोई और धन संख्या का उत्थापन य में दो तो स्पष्ट है कि $य^{२म+१}$ यह १ के समान न होगा। इसलिये इस समीकरण का $+१$ के अतिरिक्त कोई सम्भव मूल न होगा।

$य^{२म+१} - १ = ०$ इसमें $य - १$ का भाग देने से लब्धि

$य^{२म} + य^{२म-१} + \cdots\cdots + य^{२} + य + १ = ०$

यह हरात्मक समीकरण का रूप है, इसलिये हरात्मक समीकरण के तोड़ने की युक्ति से इस पर से एक म घात का समीकरण बन जायगा।

९८—$य^{न} - १ = ०$ इसमें यदि $न = २म$ तो इसके दो ही सम्भाव्य मूल $+१$ और -१ आवेंगे। इसलिये $(य + १) \times (य - १) = य^{२} - १$ इसका भाग समीकरण में देने से एक नया हरात्मक समीकरण

$य^{२म-२} + ^{२म-४} + \cdots\cdots + य^{२} + १ = ०$ ऐसा होगा।

इस पर से हरात्मक समीकरण के तोड़ने की युक्ति से $म - १$ घात का समीकरण बन जायगा।

$य^{२म} - १ = ०$ इसे $(य^{म} - १)(य^{म} + १) = ०$ ऐसे भी लिख सकते हैं। अब

$य^{म} - १ = ०$ और $य^{म} + १ = ०$ इन पर से भी दिए हुए समीकरण के मूलों को जान सकते हो।

९९—$य^{न} + १ = ०$ इसमें यदि न विषम $२म + १$ के तुल्य हो तो $य^{२म+१} + १ = ०$ इसका एक ही सम्भाव्य मूल -१ होगा। इसलिये $य^{२म+१} + १ = ०$ इसमें $य + १$ का भाग देने से एक हरात्मक समीकरण

$य^{२म} - य^{२म-१} + य^{२म-२} - \cdots\cdots + य^{२} - य + १ = ०$ ऐसा होगा। इस पर से मूलों को पता लग सकता है।

यदि न विषम हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में $-य$ का उत्थापन देने से $य^{न} - १ = ०$ ऐसा एक समीकरण बन जायगा

जिनके मूल पूर्व प्रक्रमों से वे ही विरुद्ध चिन्ह के आ जायँगे जो दिए हुए समीकरण के मूल हैं।

१००—$य^न+१=०$ यदि इसमें न सम २म के तुल्य हो तो $य^{२म}+१=०$ इसका एक भी संभाव्य मूल न होगा और $य^{२म}+१=०$ यह स्वयं हरात्मक समीकरण है, इसलिये इसमें $य^म$ का भाग देकर $य^म+\frac{१}{य^म}=०$ यह पूर्वघात के आधे घात का एक समीकरण बन जायगा।

१०१—ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट होता है कि $य^न-१=०$ और $य^न+१=०$ इन दोनों पर से एक ऐसा हरात्मक समीकरण बनता है जिसके सब मूल दिए हुए समीकरण के सब असम्भव मूल के तुल्य हैं और जिसमें ८१वें प्रक्रम से $य+\frac{१}{य}=र_१$ ऐसा होगा, जिसमें दिखला सकते हो कि $र_१$ का मान सर्वदा सम्भाव्य संख्या है।

यदि $य=कोज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}+\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}=अ_१$ (६५वाँ प्र० देखो)

$$तो\; य+\frac{१}{य}=र_१=कोज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}+\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}$$

$$+\frac{कोज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}-\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}}{\left(कोज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}+\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}\right)}\times$$

$$\frac{१}{\left(कोज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}-\sqrt{-१}\,ज्या\,\frac{२त\,\pi}{न}\right)}$$

$$= \text{कोज्या } \frac{२त\,\pi}{न} + \sqrt{-१}\ \text{ज्या}\frac{२त\,\pi}{न} + \text{कोज्या } \frac{२त\,\pi}{न}$$
$$- \sqrt{-१}\ \text{ज्या}\frac{२त\,\pi}{न}$$

$$= \text{कोज्या } \frac{२त\,\pi}{न},$$

इस पर से $र_१$ का मान सम्भाव सिद्ध होता है।

१०२—इस प्रक्रम में पिछले प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $य^३ - १ = ०$ इसके मूलों को बताओ।

यहाँ एक मूल $+१$ यह सम्भाव्य है, इसलिये $य - १$ का भाग देने से

$$\frac{य^३ - १}{य - १} = य^२ + य + १ = ०।$$

इस पर से विशिष्ट मूल

$$\frac{-१ \pm \sqrt{-३}}{२}\ \text{हुए।}$$

इसमें यदि $\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} = अ_१$ और $\frac{-१ - \sqrt{-३}}{२} = अ_२$

तो $अ^२_१ = अ_२$। इसलिये $य^३ - १ = ०$ इसके क्रम से मूल

$अ_१, अ^२_१, अ^३_१ (= १)$ इनको १ का घन मूल कहते हैं। मूलों में $अ_१$ को घा से प्रकट करते हैं।

य के चिन्ह को बदल देने से $य^३ + १ = ०$ इस समीकरण के क्रम से मूल

$$-अ_१,\ -अ^२_१,\ -अ^३_१\ (= -१)$$

(२) $य^६ - १ = ०$ । इसके मूलों को व्यक्त करो ।
दिए हुए समीकरण को

$(य^३ + १)(य^३ - १) = ०$ ऐसा भी लिख सकते हैं ।

इस पर से $य^३ + १ = ०$ और $य^३ - १ = ०$ ये हुए ।
फिर (१) उदाहरण से, $य^३ - १ = ०$ इसके क्रम से मूल

$अ_१, अ_१^२, १, -अ_१, -अ_१^२, -१$ ।

(३) $य^४ + १ = ०$ इसमें य के मान बताओ ।
यहाँ हरात्मक समीकरण की युक्ति से

$$य^२ + \frac{१}{य^२} = ० = र_१^२ - २ \text{ यदि } र_१ = य + \frac{१}{य} ।$$

इस पर से $र_१ = \pm\sqrt{२}$ और $य^२ + १ = \pm य\sqrt{२}$
इसलिये य के मान

$$\frac{१+\sqrt{-१}}{\sqrt{२}}, \frac{१-\sqrt{-१}}{\sqrt{२}}, \frac{-१+\sqrt{-१}}{\sqrt{२}}, -\frac{१+\sqrt{-१}}{\sqrt{२}} ।$$

(४) $य^५ - १ = ०$ इसके मूलों को बताओ ।

$$य^५ - १ = (य - १)(य^४ + य^३ + य^२ + य + १) = ०$$

हरात्मक समीकरण की युक्ति से

$$य^२ + \frac{१}{य^२} + य + \frac{१}{य} + १ = ०$$

यदि $र_१ = य + \frac{१}{य}$

तो $र_१^२ + र - १ = ०$ $\therefore र_१ = \frac{-१ \pm \sqrt{५}}{२}$

$र_१$ के मान से मूलों का ज्ञान सुलभ है ।

$य^{५} - १ = ०$ इसके मूलों के चिन्ह बदल देने से $य^{५} + १ = ०$ इसके सब मूल होंगे।

(५) $य^{९} - १ = ०$ इसमें य के मानों को बताओ।

यहाँ $य^{९} - १ = (य^{३} - १)(य^{६} + य^{३} + १) = ०$

$य^{३} - १ = ०$ इस पर से य के पूर्व सिद्ध तीन मान

$१, घा, घा^{२}$,

और $य^{६} + य^{३} + १ = ०$ इस हरात्मक समीकरण से

$$य^{३} + \frac{१}{य^{३}} + १ = ०$$

इस पर से $र_{१}^{३} - ३र_{१} + १ = ०$ यह घन समीकरण बना जब $र_{१} = य + \frac{१}{य}$ इसमें यदि $र_{१}$ के मान व्यक्त हों तो य के बाकी छ मान भी व्यक्त हो जायँगे। (ऐसे घन समीकरण में य के मान कैसे व्यक्त होते हैं इसकी विधि आगे लिखी जायगी)

अथवा $य^{६} + ३य + १ = ०$ इस पर से वर्ग समीकरण की विधि से $य^{३} - घा = ०$, $य^{३} - घा^{२} = ०$ ऐसे दो समीकरण बनेंगे।

फिर $य^{३} - १ = ०$, $य^{३} - घा = ०$, $य^{३} - घा^{२} = ०$ ऐसे तीन समीकरणों से जो य के नव मान आते हैं वे क्रम से (८९वाँ प्रक्रम देखो)

$१, घा, घा^{२}, घा^{\frac{१}{९}}, घा^{\frac{४}{९}}, घा^{\frac{७}{९}}, घा^{\frac{२}{९}}, घा^{\frac{५}{९}}, घा^{\frac{८}{९}}$ ये हैं।

इनमें $घा^{\frac{१}{९}}$ इसको य का एक विशिष्ट मान मानने से दिये हुए समीकरण में य के क्रम से नव मान

१, $घा^{\frac{१}{३}}$, $घा^{\frac{२}{३}}$, घा, $घा^{\frac{४}{३}}$, $घा^{\frac{५}{३}}$, $घा^{२}$, $घा^{\frac{७}{३}}$, $घा^{\frac{८}{३}}$ ये सहज में आ जाते है।

इनमें $य^{३} - १ = ०$ इसके मूल १, घा, $घा^{२}$ को निकाल देने से

$(य^{३} - घा)(य^{३} - घा^{२}) = य^{६} + य^{३} + १ = ०$ इसमें के छवो मान य के हैं। इस प्रकार जहाँ पर जैसे लाघव हो उत्तर निकालना चाहिए।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^{९} - १ = ०$ इसके मूल बताओ।

२। $य^{८} - १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

३। $य^{८} + १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

४। १०२ प्रक्रम के (१) उदाहरण से सिद्ध करो कि $१ + घा + घा^{२} = ०$।

५। सिद्ध करो कि $(घाम + घा^{२}न)(घा^{२}म + घान)$ यह अकरणी गत होगा। उ० $म^{२} - मन + न^{२}$।

६। सिद्ध करो कि $(अ + घाक + घा^{२}ग)(अ + घा^{२}क + घाग)$
$= अ^{२} + क^{२} + ग^{२} - अक - अग - कग$।

७। सिद्ध करो कि
$(अ + क + ग)(अ + घाक + घा^{२}ग)(अ + घा^{२}क + घाग)$
$= अ^{३} + क^{३} + ग^{३} - ३अकग$।

८। एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसके मूल
$म + न$, $घाम + घा^{२}न$, $घा^{२}म + घान$ हों।

उ० $य^{३} - ३मनय - (म^{३} + न^{३}) = ०$

९। $(\text{य}+१)^{७} - (\text{य}^{७}+१)$ इसके गुणय गुणक रूप खण्डों को निकालो। उ० $७\text{य}(\text{य}+१)(\text{य}^{२}+\text{य}+१)^{२}$

१०। एक ऐसा घन समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त के मान क्रम से

$\text{अ}_{१}+\text{अ}_{१}^{६}, \text{अ}_{१}^{२}+\text{अ}_{१}^{५}, \text{अ}_{१}^{३}+\text{अ}_{१}^{४}$ ये हों जहाँ $\text{अ}_{१}$, $\text{य}^{७}-१=०$ इसमें य का एक असम्भव मान है।

उ० $\text{य}^{३}+\text{य}^{२}-२\text{य}-१=०$।

११। $\text{य}^{५}-१=०$ इसका एक विशिष्ट मूल $\text{अ}_{१}$ हो तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल क्रम से $\text{अ}_{१}+२\text{अ}_{१}^{४}$, $\text{अ}_{१}^{२}+२\text{अ}_{१}^{३}$, $\text{अ}_{१}^{३}+२\text{अ}_{१}^{२}$, $\text{अ}_{१}^{४}+२\text{अ}_{१}$ ये हों।

उ० $\text{य}^{४}+२\text{य}^{३}-\text{य}^{२}-३\text{य}+११=०$

१२। $\text{य}^{१३}-१=०$ इसका एक विशिष्ट मूल $\text{अ}_{१}$ हो तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल क्रम से

$\text{अ}_{१}+\text{अ}_{१}^{८}+\text{अ}_{१}^{१२}+\text{अ}_{१}^{५}, \text{अ}_{१}^{२}+\text{अ}_{१}^{३}+\text{अ}_{१}^{११}+\text{अ}_{१}^{१०},$

$\text{अ}_{१}^{४}+\text{अ}_{१}^{६}+\text{अ}_{१}^{९}+\text{अ}_{१}^{७}$ ये हों। उ० $\text{य}^{३}+\text{य}^{२}-४\text{य}+१=०$

१३। $४\text{य}^{४}-८५\text{य}^{३}+३५७\text{य}^{२}-३४०\text{य}+६४=०$ इस पर से एक हरात्मक समीकरण बना कर तब इसके मूलों को बताओ।

मान लो कि $\text{र}=\frac{\text{य}}{२}$ $\therefore \text{य}=२\text{र}$। इसका उत्थापन समीकरण में देने से

$६४\text{र}^{४}-६८०\text{र}^{३}+१४२८\text{र}^{२}-६८०\text{र}+६४=०$ अब यह हरात्मक समीकरण बन जायगा। इस पर से र का मान व्यक्त होने से समीकरण के मूल भी व्यक्त हो जायँगे।

१४। $य^{न} - १ = ०$ इसमें यदि न रूढ़ हो और इसका एक असम्भव मूल $अ_१$ हो तो सिद्ध करो

$$(१ - अ_१)(१ - अ_१^{२})(१ - अ_१^{३}) \cdots \cdots (१ - अ_१^{न-१}) = न$$

१५। $य^{१५} - १ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

१६। $य^{१५} - १ = ०$ इसके सब विशिष्ट मूल वे ही हैं जो $य^{८} - य^{७} + य^{५} - य^{४} + य^{३} - य + १ = ०$ इसके मूल हैं, यह सिद्ध करो।

१७। $य^{८} - य^{७} + य^{५} - य^{४} + य^{३} - य + १ = ०$ यह एक हरात्मक समीकरण है। इस पर से ८१वें प्रक्रम की युक्ति से जो

$$र_१^{४} - र_१^{३} - ४र_१^{२} + ४र_१ + १ = ०$$

ऐसा समीकरण बनेगा इसमें $र_१$ के मान

$$२कोज्या \frac{२\pi}{१५},\ २कोज्या \frac{४\pi}{१५},\ २कोज्या \frac{८\pi}{१५},\ २कोज्या \frac{१४\pi}{१५}$$

ये ही होंगे यह सिद्ध करो।

१०—परिच्छिन्न मूल

१०३—जिस मूल को किसी अभिन्नाङ्क वा भिन्नाङ्क से प्रकाश कर सकें उसको परिच्छिन्न मूल कहते हैं। जैसे $४, १, \frac{३}{५}$ इत्यादि।

बीजगणित से सिद्ध है कि किसी करणी का मान न अभिन्नांक, न भिन्नाङ्क होता है इसलिये करणीगत राशि का मूल परिच्छिन्न मूल नहीं है। जैसे $\sqrt{५}$ इस करणी का मान न अभिन्न है और न भिन्न है, इसलिये $\sqrt{५}$ इसका मूल संभाव्य तो है परन्तु परिच्छिन्न नहीं है।

करणी का मान न भिन्नाङ्क, न अभिन्नाङ्क होता है इसकी उपपत्ति को कमलाकर ने अपने बनाए हुए तत्त्वविवेक ग्रन्थ के स्पष्टाधिकार में बहुत अच्छी तरह से लिखा है। भारतवर्ष में जिस समय (शक १५८० वा सन् १६५८ ई०) इसने अपने इस ग्रन्थ को लिखकर पूरा किया था उस समय यूरप में न्यूटन की उमर बारह वर्ष की थी।

१०४—फ (य) = ० इसके आदि पद का गुणक एक हो और अन्य पदों के गुणक यदि परिच्छिन्न अभिन्न हों तो समीकरण का एक भी मूल परिच्छिन्न भिन्न नहीं हो सकता।

कल्पना करो कि समीकरण

$य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न-१}य + प_{न} = ०$ ऐसा है और यदि सम्भव हो तो कल्पना करो कि इस समीकरण का एक परिच्छिन्न भिन्न मूल $\frac{अ}{क}$ है जिसमें अ और क परस्पर दृढ़ हैं। इसका उत्थापन ऊपर के समीकरण में य के स्थान में देने से और दोनों पक्षों को $क^{न-१}$ से गुण देने से

$$\frac{अ^{न}}{क} + प_{१}अ^{न-१} + प_{२}अ^{न-२}क + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ प_{न-२}अ^{२}क^{न-३} + प_{न-१}अक^{न-२} + प_{न}क^{न-१} = ०$$

$$\therefore -\frac{अ^{न}}{क} = प_{१}प^{न-१} + प_{२}अ^{न-२}क + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ प_{न-२}अ^{२}क^{न-१} + प_{न-१}अक^{न-२} + प_{न}क^{न-१}$$

परन्तु यह असम्भव सिद्ध होता है क्योंकि अ और क के परस्पर दृढ़ होने से $\frac{अ^{न}}{क}$ यह एक भिन्नाङ्क ही होगा और दहिना पक्ष अभिन्नाङ्क सिद्ध है, इसलिये कोई दृढ़ भिन्न किसी अभिन्नाङ्क के तुल्य कैसे हो सकता है। इसलिये ऊपर के समीकरण का एक भी मूल परिच्छिन्न भिन्नाङ्क नहीं हो सकता।

अब ऊपर के समीकरण में इतना ही विचार करना चाहिए कि उसका कोई मूल अभिन्न परिच्छिन्न है वा नहीं। इसके लिये जो आगे रीति लिखी जायगी उसे भाजक रीति अथवा न्यूटन की रीति कहते हैं।

१०५—कल्पना करो कि

$$फ(य) = य^{न} + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots\cdots प_{न-१} य + प_न = ०$$

इसका एक अभिन्न परिच्छिन्न मूल अ है तो इसका उत्थापन य के स्थान में देने से

$$अ^{न} + प अ^{न-१} + \cdots\cdots\cdots + प_{न-१} अ + प_न = ०$$

इसमें अ का भाग देकर पदों को उलट कर रखने से

$$\frac{प_न}{अ} + प_{न-१} + प_{न-२} अ + \cdots\cdots\cdots + प_१ अ^{न-२} + अ^{न-१} = ०$$

इसलिये $\frac{प_न}{अ}$ यह अवश्य अभिन्न होगा। मान लो कि यह $व_१$ के तुल्य है तो ऊपर के समीकरण में फिर अ का भाग देने से

$$\frac{व_१ + प_{न-१}}{अ} + प_{न-२} + \cdots\cdots + प_२ अ^{न-४} + प_१ अ^{न-३} + अ^{न-२} = ०$$

इसलिये $\frac{व_{१} + प_{न-१}}{अ}$ यह अभिन्न होगा, मान लो कि यह $व_{२}$ के तुल्य है तो फिर ऊपर के समीकरण में अ का भाग देने से

$$\frac{व_{२} + प_{न-२}}{अ} + प_{न-३} + \cdots + प_{२}अ^{न-५} + प_{१}अ^{न-४} + अ^{न-३} = ०$$

$\frac{व_{२} + प_{न-२}}{अ}$ यह अभिन्न होगा। इसे ऊपर की युक्ति से अभिन्न $व_{३}$ कहें और फिर अ का भाग दें तो $\frac{व_{३} + प_{न-३}}{अ}$ यह अभिन्न ठहरेगा। यों तन्त तक क्रिया करने से अन्त में

$\frac{व_{न-१} + प_{१}}{अ} + १ = ०$ ऐसा होगा। इस पर से नीचे लिखी हुई क्रिया उत्पन्न होती है।

यदि फ (य) = ० इसका एक मूल अ होगा तो समीकरण का अन्त पद अ से अवश्य निःशेष होगा। लब्धि में य के गुणाङ्क के जोड़ने से जो संख्या होगी वह भी अ से निःशेष होगी। इस लब्धि में $य^{२}$ का गुणाङ्क जोड़ने से जो संख्या होगी वह भी अ से निःशेष होगी। यही क्रिया न − १ वार तक करने से जो निःशेष लब्धि आवे उसमें $य^{न-१}$ का गुणाङ्क जोड़ कर अ का भाग दो, यदि लब्धि −१ के तुल्य आवे तो निश्चय समझना चाहिए कि फ (य) = ० इस समीकरण का एक मूल अ अवश्य है। यदि ऊपर की स्थिति का कहीं पर व्यभिचार हो जाय तो समझना कि अभिन्न अ समीकरण का मूल नहीं है।

१०६—ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि यदि अव्यक्त का मान परिच्छिन्न अ है तो समीकरण का अन्त पद उससे अवश्य निःशेष होता है। इसलिये दिए हुए किसी पूरे समीकरण के अभिन्न परिच्छिन्न मूल जानने के लिये देख लेना चाहिए कि किस किस अभिन्नाङ्क से अन्त पद निःशेष होता है। जिनसे निःशेष हों, स्पष्ट है कि उन्हीं में से कोई न कोई संभव रहते समीकरण का एक मूल होगा। इसलिये अन्त पद को निःशेष करने वाले उन हारों में से एक एक को लेकर १०५वें प्रक्रम की क्रिया करो। जिन जिन हारों में क्रिया, आदि से अन्त तक, पूरी पूरी उतर जाय उन उन हारों को निःसंशय दिए हुए समीकरण के मूल कहो। दिया हुआ समीकरण यदि पूरा न हो तो ३ प्रक्रम से उसे पूरा कर तब क्रिया करना आरम्भ करो।

परिश्रम बचाने के लिए दिए हुए समीकरण के मूलों की धन और ऋण सीमाओं को ६ अध्याय से जान कर अन्त पद को निःशेष करने वाले हारों में जो जो उन सीमाओं के बाहर पड़े हों उन्हें छोड़ कर जो भीतर हों उन्हीं से १०६ प्र० की क्रिया करो, क्योंकि जो सीमाओं से बाहर हैं वे सीमासाधन की युक्ति से समीकरण के मूल नहीं हो सकते, इसलिये उनको लेकर क्रिया करने से व्यर्थ समय को नष्ट करना है। और अन्त पद के जो +१ और −१ भाग हार हैं उन पर से भी क्रिया करना व्यर्थ गौरव दोष लगाना है क्योंकि +१ और −१ इनका उत्थापन य के स्थान में देने से बड़े लाघव से जान सकते हो कि दिए हुए समीकरण में ये दोनों य के मान हैं वा नहीं।

उदाहरण—(१) $य^3 - १६य + ३० = ०$ इसका परिच्छिन्न मूल निकालो।

यहाँ अन्त पद् ३० को निःशेष करने वाले भाग हार

२,३,५,६,१५,१०,३०,−२,−३,−५,−६,−१५,−१०,−३०।

धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा, समीकरण को $य (य^2 - १६) + ३० = ०$ ऐसा लिखने से ५ हुई और य के स्थान में −य का उत्थापन देने से ऋण मूलों की प्रधान सीमा, $य^3 - १६य + ३० = ०$ इसे दो से गुण कर $य^3$ को दोनों पदों में मिलाने से

$य (य^2 - ३८) + य^3 - ६० = ०$ इस पर से −७ आती है। इसलिये −७ और ५ के भीतर हारों को चुनने से क्रियोपयोगी संख्यायें

−६,−५,−३,−२,२,३,५ ये हुईं।

पूरे समीकरण के पद गुणकों को उलट कर एक पंक्ति में रखने से तथा पहले −६ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	−५	+४	
	−२४	+४	

+४ यह अब −६ से निःशेष नहीं होता, क्रिया रुक गई, इसलिये −६ यह समीकरण का मूल नहीं है।

−५ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	−६	+५	−१

यहां पूरी क्रिया उतर गई इसलिये −५ यह एक मूल हुआ।

−३ से क्रिया करने में

३०	−१९
	−१०
	−२९

−२९ यह −३ से निःशेष नहीं होता इसलिये क्रिया के रुकने से −३ यह एक मूल नहीं हो सकता।

−२ से क्रिया करने में

३०	−१९	०	१
	−१५	−१७	
	−३४	−१७	

−१७ यह −२ से नहीं निःशेष होता इसलिये क्रिया रुकने से −२ यह मूल नहीं है।

+२ से क्रिया करने में

३०	−१९	०	१
	+१५	−२	−१
	− ४	−२	०

यहां पूरी क्रिया उतर गई इसलिये २ यह एक मूल हुआ

+३ से क्रिया करने में

३०	−१९	०	१
	+१०	−३	−१
	− ९	−३	०

यहां पूरी क्रिया उतर जाने से ३ यह एक मूल हुआ।

+ ५ से क्रिया करने में

३०	−१६	०	१
	+ ६		
	−१३		

यहां −१३ यह ५ से नहीं निःशेष होता इसलिये क्रिया के रुक जाने से ५ यह मूल नहीं हुआ। इसलिये य^{३} − १६य + ३०=० इसके तीनों मूल क्रम से −५, २, ३ हुए।

१०७—फ (य) = ० इसका यदि एक मूल अ हो और यदि य के स्थान में र+म का उत्थापन दें तो स्पष्ट है कि फ (र+म) = ० इसमें र का एक मान अ − म होगा जहां अ, क दोनों अभिन्न हैं।

अ और म के अभिन्न होने से र का एक मान अ−म यह अभिन्न होगा और १०६वें प्रक्रम की युक्ति से फ (र+म) में जो र से स्वतन्त्र पद फ (म) होगा उसे निःशेष भी करैगा। इसलिये यदि फ (म) को अ−म निःशेष न करै तो र का मान अ − म नहीं होगा तब दिए हुए समीकरण में य का मान अ भी नही होगा। इसलिये र का एक मान अ − म है।

परीक्षा करने में सुभीता पड़े और फ (म) के मान जानने में भी थोडा परिश्रम हो इसलिये म को +१ वा −१ मान लेते हैं। यदि फ (१) यह अ − १ से और फ (−१) यह अ + १ से निःशेष न हो तो कहेंगे कि फ (य) = ० इसका एक मूल अ

नहीं है। अब इस पर से भी अन्त पद को निःशेष करनेवाले हारों में से कौन क्रियोपयोगी नहीं हैं उनका पता लगा सकते हो

जैसे १०६वें प्रक्रम के उदाहरण $य^3 - १६य + ३० = ०$ इसमें पहले जो $-६, -५, -१, -२, २, ३, ५$ ये संख्यायें लेकर क्रिया करते रहे उनमें

फ $(१) = १२$ इसमें $-६ - १ = -७$ का पूरा पूरा भाग नहीं लगता इसलिये -६ यह समीकरण का मूल नहीं हो सकता।

इसी प्रकार फ $(-१) = ४८$ इसमें भी $-६ + १ = -५$ का भाग नहीं जाता इसलिये इससे भी सिद्ध होता है कि -६ को समीकरण का मूल न ग्रहण करना चाहिए।

इस प्रकार फ $(य) = य^3 - ३य^2 - ८य - १० = ०$ इस उदाहरण में धनमूलों की सीमा ११, य के स्थान में $-र$ का उत्थापन देने से और उचित रीति से समीकरण बनाने से

$$र^3 + ३र(र - \frac{८}{३}) + १० = ०.$$

इसमें स्पष्ट है कि र के धन मानों की सीमा ३ होगी, इसलिये य के ऋण मानों की सीमा -३ हुई। अब -३ और ११ के बीच में अन्त पद १० को निःशेष करनेवाले $+१$ और -१ को छोड़ कर और हार

$१०, ५, २, -२$ ये हैं।

इनमें फ $(१) = -२०$ इसको $१० - १ = ९$ यह निःशेष नहीं करता इसलिये समीकरण का एक मूल १० को न ग्रहण करना चाहिए।

इसी प्रकार $य^3 - २०य^2 + १६४य - ४०० = ०$ इस पूरे समीकरण में डेकार्टिस् की युक्ति से सर के न होने से य का कोई ऋणमान नहीं है तब स्पष्ट है कि दूसरे पद के गुणक को विरुद्ध चिन्ह का बना कर ग्रहण करने से य के सब धन मानों का योग २० होगा इसलिये य का कोई एक धन मान २० से अधिक नहीं होगा तब य के धन मानों की प्रधान सीमा १० हुई

(इस उदाहरण में य के धन मानों की सीमा जानने के लिये टाड्हण्टर साहब ने जो समीकरण का रूपान्तर कर ग्रन्थ को बढ़ाया है वह व्यर्थ है। उनके ग्रन्थ का ११९वाँ प्रक्रम देखो) और य का ऋण मान कोई है ही नहीं।

इसलिये अन्त पद ४०० को निःशेष करनेवाले २० से अल्प हार २, ४, ५, ८, १० और १६ ये हुए।

और फ(१) = −२२५ इसमें ५ − १ = ४, ८ − १ = ७, १० − १ = ९ इनका निःशेष भाग न लगने से ५, ८ और १० इन्हें ऊपर लिखे हुए समीकरण के मूल न ग्रहण करना चाहिए। केवल २, ४ और १६ से परीक्षा करने के लिये १००५वें प्रक्रम की क्रिया करो।

२ से क्रिया करने में

−४००	१६४	−२०	१
	−२००	−१८	−१९
	− ३६	− ३८	−१८

यहां अन्त में शून्य नहीं हुआ इसलिये २ यह मूल नहीं है।

४ से क्रिया करने में

−४००	१६४	−२०	१
	−१००	+१६	−१
	+६४	−४	०

यहां क्रिया पूरी हो जाने से ४ यह समीकरण का एक मूल हुआ।

१६ से क्रिया करने में

−४००	१६४	−२०	१
	−२५		
	१३९		

यहां १३९ यह १६ से निःशेष नहीं होता। इसलिये १६ यह समीकरण का मूल नहीं है। इस प्रकार से दिए हुए समीकरण का परिच्छिन्न अभिन्न मूल एक ही ४ है।

१०८—फ (य) = ० इसमें य के सब से बड़े घात के गुणाङ्क से अपवर्त्तन देने से समीकरण के छोटे रूप में पदों के गुणक अभिन्न न हों तो ३६वें प्रक्रम से एक नया समीकरण जिसमें सब पदों से गुणक अभिन्न हों बना कर तब १०५वें प्रक्रम की क्रिया करना आरंभ करो। फिर नये समीकरण के मूल से दिए हुए समीकरण के मूल निकाल सकते हो। जैसे

उदाहरण—(१) $फ(य) = य^{३} + \frac{य^{२}}{२} - \frac{१७}{४}य + \frac{१५}{८} = ०$

इसमें यदि $य = \frac{र}{२}$ तो

$$फ(य) = \frac{र^{३}}{८} + \frac{र^{२}}{८} - \frac{१७र}{८} + \frac{१५}{८} = ०$$

८ से गुण देने से अभिन्न समीकरण

$$र^{३} + र^{२} - १७र + १५ = ० ।$$

इसका रूपान्तर करने से धन मूलों की सीमा ५ हुई।

र के स्थान में −र का उत्थापन देने से और समीकरण को ३ से गुण रूपान्तर करने से ऋण मूलों की सीमा −८ हुई।

इन दोनों के भीतर अन्त पद को निःशेष करनेवाली संख्यायें

१, ३, ५, −१, −३, −५ ये हुईं।

और फ (१) = ० । इसलिये र का एक मान १ है।

फ (−१) = १२ । इसलिये र का एक मान −१ यह नहीं है।

३ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	+ ५	−४	−१
	−१२	−३	०

पूरी क्रिया उतर जाने से ३ यह र का एक मान हुआ।

५ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	+ ३		
	−१४		

५ से −१४ इसके निःशेष न होने से ५ यह र का मान नहीं है।

−३ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	− ५		
	−२२		

−३ से −२२ इसके निःशेष न होने से र का मान −३ नहीं है।

−५ से क्रिया करने में

१५	−१७	१	१
	−३	+४	−१
	−२०	+५	०

क्रिया के पूरी होने से −५ यह र का एक मान हुआ।

इसलिये र के मान १, ३, −५ ये हुए और य = $\frac{र}{२}$ इसलिये य के मान $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{२}$, $-\frac{५}{२}$ ये सिद्ध हुए।

इस पर से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि जब फ (य)=० इसमें य के सब से बड़े घात का गुणक रूपातिरिक्त कोई संख्या हो और सब पद के गुणक अभिन्न भी हों तो भी यह नहीं कहा जा सकता कि य का मान परिच्छिन्न अभिन्नाङ्क होगा।

१०६—५६वें प्रक्रम में फ (य) और फ′ (य) के महत्तमापवर्त्तन परम्परा से दिखला आए हैं कि फ (य) = ० इसके कितने मूल दो बार, कितने तीन बार इत्यादि आते हैं। यदि फ (य) में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के होंगे तो स्पष्ट है कि ५६वें प्रक्रम में जो $या_१$, $या_२$ इत्यादि के मान आवेंगे उनके पद के गुणक भी सब परिच्छिन्न मूल के होंगे। इसलिये यदि फ (य) = ० इसमें य का एक ही कोई मान त बार होगा तो वह अव्यक्त मान $या_त = ०$ इससे जो आवेगा वह परिच्छिन्न मूल का होगा क्योंकि एक ही अव्यक्त मान जो त बार आया है उसका एक ही मान $या_त = ०$ इससे निकलेगा। इसलिये $या_त$ यह य के एक घात का खण्ड होगा अर्थात् $या_त$ = अय − क इस रूप का होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से अ और क दोनो परि-

च्छिन्न मूल के होंगे। इसलिये त वार आए हुए अव्यक्त मान की संख्या $या_त = ०$ इससे परिच्छिन्न मूल ही की होगी।

इस पर से नीचे लिखे हुए तीन विशेष उत्पन्न होते हैं

विशेष—(१) यदि किसी घन समीकरण में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न आवे तो उस घन समीकरण के समान मूल न आवेंगे। क्योंकि यदि समान मूल होंगे तो एक मूल तीन वार आवेगा वा एक मूल दो बार और दूसरा एक वार आवेगा। दोनों स्थितिओं में ऊपर की युक्ति से एक मूल परिच्छिन्न मूल का होगा जिसका होना कल्पना से विरुद्ध है।

(२) यदि किसी चतुर्घात समीकरण में सब पद के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न आता हो तो ऐसा नहीं हो सकता कि उस चतुर्घात समीकरण का एक मूल चार वार या तीन वार आवे, क्योंकि ऐसा होने से ऊपर की युक्ति से वह मूल परिच्छिन्न होगा जो कल्पना से विरुद्ध है। इसलिये यदि इस चतुर्घात समीकरण के मूल समान होंगे तो दो वार एक मूल और दो वार दूसरा मूल आवेगा। ऐसी स्थिति में फ (य) = ० इसमे फ (य) यह एक पूरा पूरा वर्ग होगा।

(३) यदि किसी पञ्चघात समीकरण में सब पदों के गुणक परिच्छिन्न मूल के हों और १०५वें प्रक्रम की युक्ति से उस समीकरण का कोई मूल परिच्छिन्न मूल का न हो तो उस पञ्चघात समीकरण का कोई मूल समान न होगा। क्योंकि

यदि एक मूल चार वार आवे और दूसरा एक वार तो जो चार वार आवेगा वह ऊपर की युक्ति से परिच्छिन्न होगा जो कल्पना से विरुद्ध है। यदि एक मूल दो वार, दूसरा दो वार और तीसरा एक वार आवे तो ऊपर की युक्ति से तीसरा परिच्छिन्न ठहरेगा। यदि एक मूल दो वार और दूसरा, तीसरा और चौथा एक एक वार आवें तो जो दो वार आया है वह परिच्छिन्न ठहरेगा। यदि एक मूल तीन वार और दूसरा दो वार आवें तो दोनों परिच्छिन्न ठहरेंगे। यदि एक मूल तीन वार और दूसरा और तीसरा एक एक वार आवें तो जो तीन वार आयेगा वह परिच्छिन्न ठहरेगा। इस तरह से हर एक स्थिति में एक मूल परिच्छिन्न ठहरता है जो कल्पना से विरुद्ध है।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। परिच्छिन्न मूल से क्या समझते हो।

२। $य^{४} - २य^{३} - १३य^{२} + ३८य - २४ = ०$ इसमें य के परिच्छिन्न मान बताओ। उ० १, २, ३, −४।

३। $३य^{४} - २३य^{३} + ३५य^{२} + ३१य - ३० = ०$ इसके परिच्छिन्न मूल बताओ। उ० १, ३, ५।

४। $य^{४} + य^{३} - २य^{२} + ४य - २४ = ०$ इसमें य के सब मान बताओ। उ० $-३, २, \pm २\sqrt{-१}$

५। $य^{४} - २य^{३} - १६य^{२} + ६८य - ६० = ०$ इसके सब मूल बताओ। उ० २, २, ३, −५।

६। $य^{५} - २३य^{४} + १६०य^{३} + ३१य^{२} - ३२य + ६० = ०$ इसमें य के परिच्छिन्न मान बताओ। उ० ५, ८, ११.

७। $य^५ - २६य^४ - ३१य^३ + ३१य^२ - ३२य + ६० = ०$ इसके परिच्छिन्न मूल बताओ। उ० १, −२, ३०।

८। फ $(य) = ०$ इसमें अन्तिम पद जो य से स्वतन्त्र है यदि विषम संख्या हो और फ (१) यह भी विषम संख्या हो तो फ $(य) = ०$ इसमें य का कोई अभिन्न परिच्छिन्न मान न होगा।

९। फ $(य) = ०$ इसमें यदि फ (०) और फ (−१) दोनों विषम संख्या हों तो फ $(य) = ०$ इसमें य का कोई अभिन्न परिच्छिन्न मान न होगा।

११—समीकरण के मूलों का आनयन

११०—जिस रीति से वर्गादि समीकरण के मूल निकाले जाते हैं उस रीति को मूलानयन कहते हैं।

बीजगणित से किसी वर्गसमीकरण को $य^२ + पा य + वा = ०$ इस प्रकार का बना सकते हो जिसका पक्षान्तर से $य^२ + पा य = - वा$ ऐसा रूप होगा। दोनों पक्षों को ४ से गुण कर $पा^२$ जोड़ कर वर्ग मूल लेने से

$$२य + पा = \pm\sqrt{पा^२ - ४वा} \quad \therefore य = \frac{-पा \pm \sqrt{पा^२ - ४वा}}{२}$$

इस पर से य के दो मान सिद्ध होते हैं जिनसे गुण्य गुणक रूप खण्डों में दिए हुए समीकरण का

$$\left\{य - \left(\frac{-पा + \sqrt{पा^२ - ४वा}}{२}\right)\right\}\left\{य - \left(\frac{-पा - \sqrt{पा^२ - ४वा}}{२}\right)\right\} = ०$$

ऐसा रूप होगा। बीजगणित की साधारण रीति से यह क्रिया प्रसिद्ध है इसलिये इस पर कुछ बढ़ा कर लिखना केवल

ग्रन्थ को व्यर्थ बढ़ाना है। इसलिये आगे घन समीकरण पर विचार करते हैं।

१११—किसी पूरे समीकरण पर से ३९वें प्रक्रम की युक्ति से उसी घात का एक नया समीकरण बना सकते हो जिसमें दूसरा पद उड़ जायगा। इसलिये घनसमीकरण पर से एक ऐसा समीकरण बन सकता है जिसमें अव्यक्त का घन, अव्यक्त का एक घात और व्यक्ताङ्क रहे पर अव्यक्त का वर्ग न रहे। इसलिये जो घनसमीकरण

$य^3 + पय + त = ०$ ऐसा है उसी में य के मानानयन का विचार करते हैं

११२—कल्पना करो कि दिया हुआ समीकरण

$य^3 + पय + त = ०$ ऐसा है।

इसमें कल्पना करो कि $य = र + ल$ तो समीकरण में इसका उत्थापन देने से

$$(र + ल)^3 + प(र + ल) + त = ०$$

वा $$र^3 + ल^3 + (३रल + प)(र + ल) + त = ० \cdots\cdots (१)$$

इसमें मान लो कि र, ल ऐसे हैं जिनके वश से $३रल + प = ०$ होता है तो

$$ल = -\frac{प}{३र} \cdots\cdots (२)$$

इसका उत्थापन (१) में देने से

$$र^3 + \left(\frac{-प}{३र}\right)^3 + त = ०$$

वा $$र^6 + तर^3 - \frac{प^3}{२७} = ०$$

इस पर से $र^3 = -\frac{त}{२} \pm \sqrt{\left(\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}\right)}$

और $ल^3 = -त - र^3 = -\frac{त}{२} \mp \sqrt{\left(\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}\right)}$

यहां र और ल के परस्पर बदल देने से कोई भेद नहीं पड़ैगा इसलिये चिन्ह युगल के स्थान में $र^३$ में धन और $ल^३$ में ऋण लेने से

$$य = \left\{ -\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

$$+ \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}} \ldots\ldots\ldots\ldots \; (३)$$

१०२ प्रक्रम के (१) उदाहरण से १ का घन मूल १, घा, $घा^२$ है इसलिये यदि $-\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)}$ इसका एक घन मूल व्यक्त गणित से म संख्या तुल्य आवे तो ८४वें प्रक्रम से इनके तीनों घन मूल म, मघा, $मघा^२$ होंगे। इसी युक्ति से व्यक्तगणित से यदि $-\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)}$ इसका एक घन मूल न संख्या तुल्य हो तो तीनों घन मूल नघा, $नघा^२$ ये हैं।

इस प्रकार से य के मान जो दो संख्याओं के घन मूल के योग तुल्य आता है उसके प्रत्येक घन मूलों के तीन तीन भेद होने से नव मान आवेंगे परन्तु घनसमीकरण में य के तीन मानों से अधिक नहीं हो सकते। इसलिये य के नव मानों में से छ मान अशुद्ध होंगे और तीन मान शुद्ध। इनकी परीक्षा के लिये (२) से जो $र \cdot ल = -\frac{प}{३}$ यह सिद्ध होना है उससे क्रिया करनी चाहिए।

कल्पना करो कि र = म, और ल = न। म और न ऐसे हैं जिनसे $म \cdot न = -\frac{प}{३}$ यह ठीक हो जाता है तो म और न को ग्राह्य मान कहेंगे। और यदि र = मघा, ल = $नघा^२$ तो

$र \cdot ल = म \cdot न \cdot घा^3 = मन$। इसलिये म घा और $न \cdot घा^2$ ये दो भी ग्राह्य होंगे।

इसी प्रकार यदि $र = म \cdot घा^2$ और $ल = न \cdot घा$ तो भी $र \cdot ल = म \cdot न \cdot घा^3 = मन$।

इसलिये ये दोनों मान भी ग्राह्य हैं। इन पर से य के तीन मान क्रम से

$म + न$, $घा \cdot म + घा^2 न$, $घा^2 म + घा न$, ये होंगे।

र और ल के और मान लेने से $रल = -\frac{घा प}{3}$ ऐसा होगा, $-\frac{प}{3}$ ऐसा नहीं होगा इसलिये उन मानों को न ग्रहण करना चाहिए। जैसे

उदाहरण—(१) $य^3 - ५य - १२ = ०$

इसमें $प = -५$ और $त = -१२$

$$इसलिये \left\{ -\frac{त}{2} + \sqrt{\left(\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ ६ + \sqrt{\left(३६ - \frac{१२५}{२७}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(६ + \sqrt{\frac{८४७}{२७}} \right)^{\frac{1}{3}} = २.३ \dots\dots$$

इसी प्रकार

$$\left\{ -\frac{त}{2} - \sqrt{\left(\frac{त^2}{४} + \frac{प^3}{२७}\right)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(६ - \sqrt{\frac{८४७}{२७}} \right)^{\frac{1}{3}} = .७ \dots\dots$$

इसलिये $य = २.३ + .७ = ३$

इसका उत्थापन देने से समीकरण ठीक हो जाता है; इसलिये य का मान यह ठीक ही आया। इसलिये य — १ इसका समीकरण में भाग दे देने से

$$य^२ + ३य + ४ = ० \text{ यह हुआ।}$$

इस पर से य के दो मान $\frac{-३ \pm \sqrt{-७}}{२}$ ये और आ जाते हैं।

ऊपर जो घन मूल का मान है उसके जानने के लिये बीजगणित से सर्व साधारण कोई रीति नहीं उत्पन्न होती। इसके लिये गणित क्रिया से आसन्न मान निकालना चाहिए अथवा द्वियुक्पद सिद्धान्त से $\left(६ \pm \sqrt{\frac{८४७}{२७}}\right)^{\frac{१}{३}}$ इसे फैला कर तब आसन्न मान निकालो।

ऊपर जिस रीति से घनसमीकरण के मूल निकले हैं उसे कार्डन (Cardan) साहेब ने निकाला है। इसलिये उनके आदरार्थ कार्डन की रीति (Cardan's solution of a cubic equation) कहते हैं।

११३—ऊपर घनसमीकरण में अव्यक्त के जो मान दिखलाये गये हैं उन पर कुछ विशेष विचार करते हैं।

कल्पना करो कि प और त संभाव्य संख्या हैं तो प और त के मान के वश से $र^३$ और $ल^३$ के मान सभाव्य और असभाव्य दोनों हो सकते हैं।

पहिले कल्पना करो कि मान संभाव्य हैं और पाटीगणित की रीति से क्रम से $र^३$ और $ल^३$ के एक एक मान म और न हैं तो इस स्थिति में दिए हुए समीकरण में य के मान क्रम से

$\text{म}+\text{न},\ \text{म}\cdot\text{घा}+\text{नघा}^{२},\ \text{म}\cdot\text{घा}^{२}+\text{न घा}$ ये होंगे।

इनमें घा के स्थान में इनके मान $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$ इसका उत्थापन देने से य के क्रम से मान

$$\text{म}+\text{न},\ -\tfrac{१}{२}(\text{म}+\text{न})+\tfrac{१}{२}(\text{म}-\text{न})\sqrt{-३},$$
$$-\tfrac{१}{२}(\text{म}+\text{न})-\tfrac{१}{२}(\text{म}-\text{न})\sqrt{-३}$$ ये होंगे।

यदि म और न तुल्य न हो तो इनमें पिछले दो मान असंभव होंगे। यदि म और न तुल्य हों तो पिछले दो मान समान होंगे जिनकी संख्या $-\text{म}$ वा $-\text{न}$ के तुल्य होगी।

ऐसी स्थिति में $\text{र}^{३}=\text{ल}^{३}$, इसलिये $\frac{\text{तु}^{२}}{४}+\frac{\text{पु}^{३}}{२७}=०$। इसके व्यतिरेक से कह सकते हो कि किसी घनसमीकरण में अव्यक्त के तीनों मान यदि असमान और संभाव्य हों तो $\text{र}^{३}$ और $\text{ल}^{३}$ के मान असम्भाव्य होंगे।

अब कल्पना करो कि $\text{र}^{३}$ और $\text{ल}^{३}$ दोनों असंभाव्य हैं तो $\frac{\text{तु}^{२}}{४}+\frac{\text{पु}^{३}}{२७}$ यह ऋण संख्या होगा और १५वें प्रक्रम से $\text{र}^{३}$ और $\text{ल}^{३}$ के घनमूल क्रम से $\text{म}=\text{म}_{१}+\text{न}_{१}\sqrt{-१},\ \text{न}=\text{म}_{१}-\text{न}_{१}\sqrt{-१}$ ये होंगे। इस स्थिति में दिए हुए घनसमीकरण में क्रम से अव्यक्त के मान

$$\text{म}_{१}+\text{न}_{१}\sqrt{-१}+\text{म}_{१}-\text{न}_{१}\sqrt{-१}=२\text{म}_{१},$$

$$(\text{म}_{१}+\text{न}_{१}\sqrt{-१})\text{घा}+(\text{म}_{१}-\text{न}_{१}\sqrt{-१})\text{घा}^{२}=-\text{म}_{१}-\text{न}_{१}\sqrt{३}$$

और $(\text{म}_{१}+\text{म}_{१}\sqrt{-१})\text{घा}^{२}+(\text{म}_{१}-\text{न}_{१}\sqrt{-१})\text{गा}=-\text{म}_{१}+\text{न}_{१}\sqrt{३}$।

११४—ऊपर जो अव्यक्त मान लिखे हैं उनसे स्पष्ट होता है कि यदि दिए हुए घनसमीकरण में अव्यक्त के तीनों मान

असमान और संभाव्य हों तो व्यवहार में कार्डन की रीति से काम नहीं चल सकता। क्योंकि इस स्थिति में $र^३$ और $ल^३$ असंभाव्य हैं। यहाँ बीज गणित की युक्ति से यद्यपि जानते हैं कि इसका कोई न कोई असंभाव्यात्मक मूल निकलेगा तथापि पाटीगणित की युक्ति से उन घनमूलों के मान नहीं जान सकते जिसके लिये इतना प्रयास किया गया है। इसलिये ऐसी स्थिति में कार्डन की रीति से काम नहीं चलेगा। जैसे

उदाहरण—(१) $य^३ - १२य + ९ = ०$

यहाँ $त = +९$ और $प = -१२$

इसलिये $-\frac{त}{२} + \sqrt{\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}} = -४\frac{१}{२} + \sqrt{\frac{८१}{४} - ६४}$

$$= -\frac{९}{२} + \frac{\sqrt{१७५}}{२}\sqrt{-१}$$

अब यहाँ यह नहीं जान पड़ता कि $-\frac{९}{२} + \frac{\sqrt{१७५}}{२}\sqrt{-१}$ इसका क्या घनमूल होगा।

उदाहरण—(२) $य^३ - १५य - ४ = ०$

यहाँ $त = -४$ और $प = -१५$

इसलिये $-\frac{त}{२} + \sqrt{\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}} = २ + \sqrt{४ - १२५} = २ + ११\sqrt{-१}$

इसलिये $य = (२ + ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} + (२ - ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$

अटकल से $(२ + ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = २ + \sqrt{-१}$

और $(२ - ११\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = २ - \sqrt{-१}$

इसलिये य का एक मान $२ + \sqrt{-१} + २ - \sqrt{-१} = ४$ हुआ

दिए हुए समीकरण में य−४ का भाग देने से

$$य^२+४य+१=०$$

इस पर से य के और मान $-२+\sqrt{३}$, $-२-\sqrt{३}$ ये आ जाते हैं।

इसलिये जहां असंभाव्य का घनमूल अटकल से निकल आवे वहां पर कार्डन की रीति से य के मान आ जायंगे।

११५—यद्यपि असंभाव्य संख्या के घनमूल का ठीक ठीक पता लगाना कठिन है तथापि द्वियुक्पदसिद्धान्त से घनमूल का आसन्न मान निकाल सकते है। जैसे

कल्पना करो कि $अ+क\sqrt{-१}$ इसका घनमूल निकालना है तो यदि $अ>क$ तो

$$(अ+क\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}=अ^{\frac{१}{३}}\left(१+\frac{क}{अ}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$=अ^{\frac{१}{३}}\left(१+\frac{१}{३}\,\frac{क}{अ}\sqrt{-१}+\frac{१}{३^२}\,\frac{क^२}{अ^२}+\frac{५}{३^४}\,\frac{क^३}{अ^३}\sqrt{-१}+\cdots\cdots\right)$$

यहां $\frac{क}{अ}$ के रूपाल्प होने से आगे जाकर $\frac{क^न}{अ^न}$ यह बहुत ही छोटा होगा जिसके आगे सब पदों को स्वल्पान्तर से छोड़ सकते हैं।

यदि $अ<क$ तो

$$(अ+क\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}=(\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}\left(क+\frac{अ}{\sqrt{-१}}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$=-\sqrt{-१}\,(क-अ\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$$

$$=-क^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१-\frac{अ}{क}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

इस पर से पूर्ववत् आसन्न मान निकल आवेगा।

जैसे ११४वें प्रक्रम के (१) उदाहरण में $-\frac{९}{२}+\frac{\sqrt{१७५}}{२}\sqrt{-१}$ इसका घनमूल निकालना है तो यहां $अ=-\frac{९}{२}$, $क=\frac{\sqrt{१७५}}{२}$ और अ < क इसलिये

$$घनमूल -क^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१-\frac{अ}{क}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{१७५}}{२}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१+\frac{९}{\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}\right)^{\frac{१}{३}}$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{१७५}}{२}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१+\frac{१}{३}\,\frac{९}{\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}+\frac{१}{३^{२}}\,\frac{८१}{१७५}-\frac{५}{३^{४}}\,\frac{क^{३}}{अ^{३}}\sqrt{-१}+\cdots\right)$$

कोष्ठान्तर्गत केवल चार पद लेने से

$$घनमूल=-\left(\sqrt{\frac{१७५}{२}}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(१+\frac{३}{\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}+\frac{९}{१७५}-\frac{९^{३}}{१७५\sqrt{१७५}}\sqrt{-१}\right)$$

$$=-\left(\frac{१३.२२८}{२}\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left\{१+\frac{९}{१७५}+\left(\frac{३}{\sqrt{१७५}}-\frac{९}{३५\sqrt{१७५}}\right)\sqrt{-१}\right\},$$

$$=-\left(६.६१४\right)^{\frac{१}{३}}\sqrt{-१}\left(\frac{९६}{३५\times१३.२२८}\sqrt{-१}+१.०५१\right)$$

$$=१\cdot ६\left(\frac{६६'}{३५\times १३\cdot २२८}-१\,०५१\sqrt{-१}\right)$$

$$=१\cdot ६\left(२०७-१\,०५१\sqrt{-१}\right)$$

$$=\cdot ३६३३-१\,०५१\times १\,६\sqrt{-१}$$

और $\cdot ३६३३+१\,०५१\times १\,६\sqrt{-१}$

$$=\left\{-\frac{त}{२}-\sqrt{\left(\frac{त^२}{४}+\frac{प^३}{२७}\right)}\right\}^{\frac{१}{३}}$$

इसलिये $य=\left\{-\frac{त}{२}+\sqrt{\left(\frac{त^२}{४}+\frac{प^३}{२७}\right)}\right\}^{\frac{१}{३}}$

$$+\left\{-\frac{त}{२}-\sqrt{\left(\frac{त^२}{४}+\frac{प^३}{२७}\right)}\right\}^{\frac{१}{३}}$$

र का पहला मान जो $\cdot ३६३३-१\,०५१\times १\,६\sqrt{-१}$ $=\cdot ३६३३-१\,६६७\sqrt{-१}$ यह आया है इसे $चा=\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$ $=-\cdot ५+\frac{\sqrt{३}}{२}\sqrt{-१}=-\cdot ५+\cdot ८६६\sqrt{-१}$ इससे गुण देने से र का दूसरा मान $=१\,५३३+१\,३३६\sqrt{-१}$ ।

ल के पहले आए हुए मान को $चा^२$ से गुण देने से ल का दूसरा मान $=१\,५३३-१\,३३६\sqrt{-१}$ ।

दोनों को जोड़ देने से य का दूसरा मान $३\,०६६$ यह हुआ। इसमें दशमलव को छोड़ देने से $य=३$, इसका उत्थापन समीकरण में देने से समीकरण ठीक हो जाता है।

इसलिये $य^३ - १२य + ९ = (य - ३)(य^२ + ३य - ३) = ०$ ।

$य^२ + ३य - ३ = ०$ ऐसा मानने से

$$य = \frac{-३ \pm \sqrt{२१}}{२} = \frac{-३ \pm ४·५८}{२} ।$$

इसलिये स्वल्पान्तर से $य = ·७९$ वा $य = -३·७९$ ।

ऊपर पहले य का जो मान आया है उसमें दो ही दशमलव ग्रहण करें तो यही ·७९ य का मान ठीक आता है ।

पहले छियुक्पद सिद्धान्त से र और ल के जो आसन्न घन मूल आए हैं जिन पर से य = ·७९ हुआ है उन्हें क्रम से घा और $घा^२$ से गुण कर दूसरे घन मूलों के मान से य = ३ ऐसा आया है । यदि उन्हें क्रम से $घा^२$ और घा से गुणकर जोड़ दो तो य का तीसरा मान − ३·७९ यह आवेगा ।

इस प्रकार छियुक्पद सिद्धान्त से असंभाव्य संख्याओं का आसन्न घनमूल जान उस पर से स्वल्पान्तर से य के मान आ सकते हैं । इसलिये व्यवहार में जहां घनमूल असम्भव संख्या में आवेगा वहां य के आसन्न मान कार्डन की रीति से जान सकते हैं ।

११६—ऊपर के प्रक्रमों से जान पड़ता है कि $य^३ + पय + त = ०$ इस समीकरण में कार्डन की रीति से बिना परिश्रम य के मान आ जायँगे यदि $\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}$ यह धन संख्या हो अर्थात् यदि प धन संख्या हो अथवा प ऋण होकर $\frac{त^२}{४} > \frac{प^३}{२७}$ ऐसा अर्थात् $२७ त^२ > ४प^३$ ऐसा हो । इन स्थितियों

में य के दो मान असंभाव्य होंगे। और यदि $\frac{२७त^२}{४}$ इससे $प^३$ का संख्यात्मक मान अल्प हो और प ऋण हो तो य के सब मान संभाव्य आवेंगे परन्तु कार्डन की रीति से य के मान निकालने में सुभीता न पड़ेगा।

यदि प ऋण हो और $\frac{त^२}{४}+\frac{प^३}{२७}=०$ तो दिए हुए समीकरण में अव्यक्त के दो मान समान आवेंगे जैसा कि ११३वें प्रक्रम में लिख आए हैं तब ११२वें प्रक्रम से म और न के मान $\sqrt[३]{-\frac{त}{२}}$ इसके समान होंगे और य के मान क्रम से २म, −म, −म ये होंगे।

प्रत्येक स्थिति में यदि ठीक ठीक य का एक मान आ जाय तो उसको य में घटाने से जो अव्यक्तात्मक एक खण्ड होगा उससे दिए हुए समीकरण में भाग देने से जो लब्धि पूरी पूरी आवेगी उसे शून्य के समान करने से बाकी य के दो मान आ जायँगे।

११७—पूरे घन समीकरण से द्वितीय पद न रहने वाला समीकरण बनाने से अव्यक्त के मानों में पूरे घनसमीकरण के पद वश क्या स्थिति होगी इसके लिये एक प्रकार लिखते हैं।

कल्पना करो कि पूरा घनसमीकरण

$अय^३+३कय^२+३खय+ग=०$ है।

इसमें यदि $य=व-\frac{क}{अ}$ तो इस पर से नया समीकरण

$व^३+पव+त=०$ ऐसा होगा जहाँ

$$प=३\frac{ख}{अ}-\frac{३क^२}{अ^२};\ त=\frac{ग}{अ}-\frac{३खक}{अ^२}+\frac{२क^३}{अ^३}।$$

कार्डन की रीति से

$$व = \left\{ -\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

$$+ \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}}$$

यदि य के दो मान समान आवेंगे तो $य = व - \frac{क}{अ}$ $\therefore$ $व = य + \frac{क}{अ}$ इस पर से स्पष्ट है कि व के भी दो मान समान होंगे।

इसलिये यहां भी ११३वें प्रक्रम से

$$\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७} = (२क^३ - ३अकख + अ^२ग)^२ + (अख - क^२)^३ = ०$$

ऐसा होगा जिसका रूपान्तर बीजगणित से

$(अग - कख)^२ - ४(क^२ - अख)(ख^२ - कग) = ०$ ऐसा होगा।

इसलिये पूरे घनसमीकरण के पदों के गुणकों में ऊपर जो स्थिति दिखाई गई है वह यदि पाई जाय तो कहेंगे कि य के दो मान समान होंगे तब फ (य) और फ' (य) के महत्तमापवर्त्तन से य के उस समान मान को जान सकते हो।

११८—कभी कभी घनसमीकरण के पदों के गुणक इस प्रकार के होते हैं कि उन से बीजगणित की साधारण रीति से अव्यक्त का मान निकल आता है।

जैसे उदाहरण—

(१) $य^३ + ३य = अ - \frac{१}{अ}$ तो इसे

$य^३ + ३य = (अ - \frac{१}{अ})^३ - ३(अ - \frac{१}{अ})$ ऐसे लिख सकते हो।

इस पर से

$$य^{३} - \left(अ - \frac{१}{अ}\right)^{३} + ३\left\{य - \left(अ - \frac{१}{अ}\right)\right\} = ०$$

इसलिये य का एक मान $अ - \frac{१}{अ}$ यह हुआ।

$$(२)\ य^{३} + अय^{२} + कय + ग = ०$$

इसमें जानते हैं कि $३अग = क^{२}$ तो समशोधन से

$$-य^{३} = अय^{२} + कय + ग ।$$

दोनों पक्षों को ३अ क से गुणने से

$$-३अकय^{३} = ३अ^{२}कय^{२} + ३अक^{२}य + ग^{३} ।$$

दोनों पक्षों में $अ^{३}य^{३}$ के जोड़ने से

$$(अ^{३} - ३अक)य^{३} = अ^{३}य^{३} + ३अ^{२}कय^{२} + ३अक^{२}य + ग^{३}$$
$$= (अय + ग)^{३}$$

घन मूल लेने से $य\sqrt[३]{अ^{३} - ३अक} = अय + ग$

$$\therefore\ य = \frac{ग}{\sqrt[३]{अ^{३} - ३अक} - अ} ।$$

११९—$य^{३} + पय + त = ०$ इसमें यदि प ऋण होकर $\frac{प^{३}}{२७}$ का संख्यात्मक मान $\frac{त^{२}}{४}$ इससे छोटा हो या प धन हो तो त्रिकोणमिति की युक्ति से सारणी के बल से सहज में अव्यक्त के मान जान सकते हैं। जैसे पहिले मान लो कि प धन है तो कार्डन की रीति से

$$य = \left\{-\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^{२}}{४} + \frac{प^{३}}{२७}\right)}\right\}^{\frac{१}{३}}$$
$$+ \left\{-\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^{२}}{४} + \frac{प^{३}}{२७}\right)}\right\}^{\frac{१}{३}} ।$$

इसमें मानो कि $\frac{\text{प}^3}{२७} = \frac{\text{त}^2}{४}$ स्प^{2}प, तो इसका उत्थापन देने से

$$\text{य} = \left(-\frac{\text{त}}{२} + \frac{\text{त}}{२}\text{ छेप}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\text{त}}{२} - \frac{\text{त}}{२}\text{ छेप}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(-\text{त}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(\frac{१ - \text{छेप}}{२}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{१ + \text{छेप}}{२}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$= \left(\frac{-\text{त}}{\text{कोज्याप}}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(\text{कोज्या}^2\frac{\text{प}}{२}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\text{ज्या}^2\frac{\text{प}}{२}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$= \left(\frac{-\text{त}}{\text{कोज्याप}}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\text{कोज्या}^{\frac{2}{3}}\text{प} - \text{ज्या}^{\frac{2}{3}}\text{प}\right\}।$$

दूसरी स्थिति में जब प ऋण और $\frac{\text{प}^3}{२७}$ इसके संख्यात्मक मान से $\frac{\text{त}^2}{४}$ यह बड़ा है तब मान लो कि $\frac{\text{प}^3}{२७} = -\frac{\text{त}^2}{४}$ ज्या^{2}प।

इस पर से

$$\text{य} = \left(-\frac{\text{त}}{२} + \frac{\text{त}}{२}\text{ कोज्याप}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\text{त}}{२} - \frac{\text{त}}{२}\text{ कोज्याप}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(-\text{त}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{\left(\text{कोज्या}\frac{\text{प}}{२}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\text{ज्या}\frac{\text{प}}{२}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}$$

त्रिकोणमिति सम्बन्धी सारिणी से ज्या $\frac{\text{प}}{२}$ इत्यादि के मान जान लेने से लाघव से य का मान आ जायगा।

१२०—यदि फ (य) = (य − अ) (य − क) (य − ग) − अ$'^2$(य − अ) − क$'^2$ (य − क) − ग$'^2$ (य − ग) − २ अ$'$क$'$ग$'$ = (य − अ) {(य − क) (य − ग)$'$ − अ$'^2$} − {क$'^2$ (य − क) + ग$'^2$ (य − ग) + २अ$'$क$'$ग$'$} = ० . . . . (१)

तो इसमें यह सिद्ध करना है कि य के सब मान संभाव्य होंगे।
$(य-क)(य-ग)-अ'^2=०$ इस वर्गसमीकरण में अर्थात्

$$य^2-य(क+ग)+कग-अ'^2=०$$

इसमें य के मान

$$\frac{क+ग}{२}\pm\sqrt{\left(\frac{क+ग}{२}\right)^२-(कग-अ'^२)}$$

$$=\frac{क+ग}{२}\pm\sqrt{\frac{क^२+२कग+ग^२-४कग+४अ'^२}{४}}$$

$$=\frac{क+ग}{२}\pm\frac{१}{२}\sqrt{(क-ग)^२+४अ'^२}$$

यहां मूलचिन्हान्तर्गत संख्या का मूल स्पष्ट है कि क−ग से अधिक आवेगा। इसलिये य का एक मान $\frac{क+ग}{२}+\frac{क-ग}{२}$ =क इससे बड़ा होगा और क से ग को बड़ा मान लिया है क्योंकि क−ग इसे धन समझते हैं। इसलिये य का एक मान क और ग दोनो से बड़ा होगा।

इस प्रकार य का दूसरा मान $\frac{क+ग}{२}-\frac{क-ग}{२}$ इससे भी छोटा होगा। इसलिये वह क और ग दोनों से छोटा होगा।

कल्पना करो कि य का बड़ा मान च और छोटा मान ज है तो फ (य) में $+\infty$, च, ज और $-\infty$ का उत्थापन देने से

फ (∞), फ (च) फ (ज) फ $(-\infty)$

$$+\infty, -\{क'\sqrt{च-क}+ग'\sqrt{च-ग}\}^२,$$

$$+\{क'\sqrt{क-ज}-ग'\sqrt{ग-ज}\}^२-\infty$$

यहां तीन व्यत्यास हुए इसलिये ∞ और च के बीच अव्यक्त का एक मान जो च से बड़ा होगा दूसरा च और ज के बीच और तीसरा ज से छोटा ये तीन सभाव्य मान होंगे।

यदि च और ज तुल्य हों तो वर्ग समीकरण में मूल चिन्हान्तर्गत संख्या का नाश हो जाना चाहिए इसलिये $अ' = ०$ और $क = ग$

तब $फ(य) = (य - अ)(य - क)(य - क) - ग'^{२}(य - क)$

$$= (य - क)\{(य - अ)(य - क) - ग'^{२}\} = ०$$

इसमें जो $य - क = ०$ तो $य - क$

और जो $(य - अ)(य - क) - ग'^{२} = य^{२} - य(अ + क) + अक - ग'^{२} = ०$

इससे $य = \frac{अ + क}{२} \pm \sqrt{(अ - क)^{२} + ४ग'^{२}}$

इसलिये य के तीनों मान सभाव्य हुए।

यदि च का उत्थापन देने से $फ(य)$ शून्य के तुल्य हो तो स्पष्ट है कि $फ(य) = ०$ इसमें अव्यक्त का एक मान च है और ऊपर व्यत्यास की विधि से सिद्ध होगा कि अव्यक्त का एक मान ज से छोटा होगा। इसलिये $फ(य) = ०$ इसमें अव्यक्त के दो संभाव्य मान आने से तीसरा भी अवश्य संभाव्य होगा क्योंकि किसी समीकरण का संभाव्य मूल जोड़ा जोड़ा होगा (२६वां प्रक्रम देखो)।

१२१—इस प्रक्रम में घनसमीकरण के कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

(१) $य^{३} + ६य - २० = ०$ इसमें य के मान बताओ।

यहां कार्डन की रीति से प $= ६$, त $= -२०$

इसलिये $य = (१० + \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} + (१० - \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}}$

आसन्न मान से $(१० + \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = २\cdot७३२\cdots\cdots\cdots$ और

$(१० - \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = -\cdot७३२\cdots\cdots$

इसलिये $य = २$ इसका उत्थापन समीकरण में देने से समीकरण ठीक होता है। इसलिये य का एक मान २ यह ठीक ठहरा।

$य - २$ इसका समीकरण में भाग देने से $य^२ + २य + १० = ०$ यह आया। इस पर से य के और दो मान $-१ \pm ३\sqrt{-१}$ ये हुए।

यहां अटकल से ठीक ठीक $(१० + \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = १ + \sqrt{३}$ और $(१० - \sqrt{१०८})^{\frac{१}{३}} = १ - \sqrt{३}$ इसलिये दोनों का योग २ यह य का ठीक ठीक मान आता है।

(२) $य^३ - ३\sqrt[३]{२}\, य - २ = ०$ इसमें अव्यक्त के मान बताओ।

यहां $त = -२$, $प = -३\sqrt[३]{२}$। इन पर से

$$य = (१ + \sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} + (१ - \sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$$

अब अटकल से

$$(१ + \sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt[३]{२}} + \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt[३]{२}}\sqrt{-१}$$

और $(१-\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}} = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt[३]{२}} - \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt[३]{२}}\sqrt{-१}$

इसलिये

$$य = \frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt[३]{२}}$$

और य के दो मान $\frac{१-\sqrt{३}}{\sqrt[३]{२}}, -\frac{२}{\sqrt[३]{२}}$ ये आवेंगे।

(३) १२०वें प्रक्रम में फ (य) के प्रथम खण्ड में आए हुए वर्गसमीकरण का मूल च कथ फ (य) = ० इसके एक मूल के तुल्य होगा।

फ (य) के प्रथम खण्ड में आए हुए वर्गसमीकरण

$(य-क)(य-ग)-अ'^{२}=०$ इसमें च का उत्थापन देने से

$$(च-क)(च-ग)-अ'^{२}=० \qquad \cdots \qquad (१)$$

दूसरे खण्ड में भी च का उत्थापन देने से वह भी शून्य के तुल्य होगा क्योंकि फ (च) = ०।

इसलिये $क'^{२}(च-क)+ग'^{२}(च-ग)+२अ'क'ग'=० \qquad (२)$

(१) से अ' का मान जान (२) में उसका उत्थापन देने से

$$क'^{२}(च-क)+ग'^{२}(च-ग)+२क'ग'\sqrt{(च-क)(च-ग)}=०$$

इसलिये $\{क'\sqrt{(च-क)}+ग'\sqrt{(च-ग)}\}^{२}=०$

और $\quad क'^{२}\sqrt{(च-क)}=ग'^{२}\sqrt{(च-ग)} \cdots\cdots \quad (३)$

(२) और (३) से

$$च - क = -\frac{अ'ग'}{क'},\ च - ग = -\frac{अक'}{ग} \quad \cdots\cdots\cdots (४)$$

और $$क - \frac{अ'ग'}{क} = ग - \frac{अक'}{ग'}, \quad \cdots\cdots\cdots (५)$$

इस (५) से गुणकों की स्थिति स्पष्ट होती है।

(४) भुज और कर्ण का अन्तर अ और क्षेत्रफल फ है तो भुज, कोटि और कर्ण को बताओ।

मान लो कि भुज $= य$ तो कर्ण $= य + अ$ और कोटि $= \frac{२फ}{य}$

$$भु^२ + को^२ = य^२ + \frac{४फ^२}{य^२} = \frac{य^४ + ४फ^२}{य^२} = क^२ = य^२ + २अय + अ^२$$

छेदगम और संशोधन से

$$२अय^३ + अ^२य^२ - ४फ^२ = ०$$

२अ का भाग देने से

$$य^३ + \frac{अ}{२}य^२ - \frac{२फ^२}{अ} = ० \quad \cdots\cdots\cdots (६)$$

मान लो कि $य = व - \frac{अ}{६}$

तो $$य^३ = व^३ - \frac{अ}{२}व^२ + \frac{अ^२}{१२}व - \frac{अ^३}{२१६}$$

$$\frac{अ}{२}य^२ = \frac{अ}{२}व^२ - \frac{अ^२}{६}व + \frac{अ^३}{७२}$$

$$य^{३} + \frac{अ}{२}य^{२} - \frac{२फ^{२}}{अ} = व^{३} - \frac{अ^{२}}{१२}व + \frac{अ^{३}}{१०८} - \frac{२फ^{२}}{अ} = ०$$

$$= व^{३} + पव + त = ०$$

जहां यदि $प = -\frac{अ^{२}}{१२}$, $त = \frac{अ^{३}}{१०८} - \frac{२फ^{२}}{अ}$

अब कार्डन की रीति से व का मान जान कर उस पर से य का मान निकाल सकते हो।

(५) $अय^{३} + ३कय^{२} + ३खय + ग = ०$

इसमें यदि य के मान $अ_{१}$, $अ_{२}$ और $अ_{३}$ हों और $अ_{२} - अ_{१} = अ_{३} - अ_{२}$ हो तो अ, ख, ग के रूप में क का मान निकालो।

यहां $अ_{२} - अ_{१} = अ_{३} - अ_{२}$ $\quad ∴ २अ_{२} = अ_{१} + अ_{३}$

और $३अ_{२} = अ_{१} + अ_{२} + अ_{३} = -\frac{३क}{अ}$ (२५वें प्रक्रम का पूर्वार्ध प्रसिद्धार्थ)

$∴ अ_{२} = -\frac{क}{अ}$। इसलिये य का एक मान $-\frac{क}{अ}$ हुआ।

इसका उत्थापन $फ(य) = अय^{३} + ३कय^{२} + ३खय + ग = ०$ इसमें देने से

$+अ$	$३क$	$३ख$	$ग$
	$-क$	$-\frac{२क^{२}}{अ}$	$-\frac{३खक}{अ} + \frac{२क^{२}}{अ^{२}}$
	$२क$	$३ख - \frac{२क^{२}}{अ}$,	$ग - \frac{३खक}{अ} + \frac{२क^{३}}{अ^{२}}$

$\text{ग} - \frac{\text{३खक}}{\text{अ}} + \frac{\text{२क}^{३}}{\text{अ}^{२}}$ यह अवश्य शून्य समान होगा। इस-लिये इसे शून्य के तुल्य कर दोनों पक्षों को $\text{अ}^{२}$ से गुण देने से

$$\text{गअ}^{२} - \text{३अकख} + \text{२क}^{३} = ०$$

२ का भाग देने से

$$\text{क}^{३} - \frac{\text{३अख}}{२}\text{क} + \frac{\text{गअ}^{२}}{२} = ०$$

यहां $\text{त} = \frac{\text{गअ}^{२}}{२}$, और $\text{प} = -\frac{\text{३अख}}{२}$ ऐसी कल्पना कर कार्डन की रीति से क के मान जान सकते हो।

(६) $\text{य}^{३} + \text{१२य} = \text{६य}^{२} + ३५$ इसमें य के मान बताओ।

इस उदाहरण को भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित में लिखा है और इसके उत्तर के लिये लिखते हैं कि ऐसे उदा-हरणों के उत्तर के लिये कोई विधि नहीं केवल अपने बुद्धि बल से कुछ जोड घटा कर उत्तर निकालो।

उन्होंने नीचे लिखे हुए प्रकार से उत्तर निकाला है

$$\text{य}^{३} + \text{१२य} = \text{६य}^{२} + ३५$$

$\text{६य}^{२} + ८$ इसको दोनों पक्षों में घटा देने से

$$\text{य}^{३} - \text{६य}^{२} + \text{१२य} - ८ = २७$$

वा $$(\text{य} - २)^{३} = २७$$

घनमूल लेने से

$$\text{य} - २ = ३ \qquad \text{य} = ५ \text{।}$$

बस य का यही एक मान निकाल कर रह गए हैं। आगे कुछ भी विशेष नहीं लिखा है।

यहां एक ही पक्ष में सब पदों को ले आने से

$$य^3 - ६य^2 + १२य - ३५ = ० = फ(य).$$

इसके परिच्छिन्न मूल ले आने की युक्ति से अन्त पद को निःशेष करने वाली संख्या ५ और ७ है। और फ(१) = २८ यह ७ − १ = ६ इससे निःशेष नहीं होता और ५ − १ = ४ इससे निःशेष होता है इसलिये परीक्षा से परिच्छिन्न मूल केवल ५ ही है। य − ५ का फ(य) में भाग देने से

$य^2 - य + ७ = ०$। इस पर से य के और दो मान

$\frac{१ \pm \sqrt{-२७}}{२}$ ये असमव आते है।

यदि यहां २६वें प्रक्रम की रीति से दूसरा पद उड़ाने के लिये य = व + २ तो ऊपर के समीकरण में तीसरे पद के भी उड़ जाने से उसका रूप

$व^3 - २७ = ०$ ऐसा होता है जिससे व = ३

और $य = व + २ = ३ + २ = ५$।

इस पर से ऊपर की युक्ति से य के और दोनों मान आ जायेंगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^3 - ६य - ४ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

२। $य^4 - ६य - ८८ = ०$ इसके मूल बताओ।

३। नीचे लिखे हुए समीकरणों में य के मान बताओः—

(१) $२य^3 + ६य - ३ = ०$

(२) $३य^3 - ६य^2 - ४ = ०$

(३) $य^३ - २य = -६$

(४) $य^३ - १५य^२ - ३३य + ८४७ = ०$

(५) $य^३ + ६अय^२ = ३६अ^३$

(६) $य^३ + ६अय^२ + ३६अ^३ = ०$

(७) $य^३ - ३(अ^२ + क^२)य = २अ(अ^२ - ३क^२)$

४। यदि $य^३ + पय + त = ०$ इस पर से $य^४ = (य^२ + अय + क)^२$ ऐसा समीकरण बनता हो तो प और त का परस्पर क्या सम्बन्ध होगा। उ० $(-२प)^{\frac{३}{२}} = ८त$।

५। $य^३ + पय + त = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाया जाय जिसके मूल पहले समीकरण के मूलों से च तुल्य छोटे हों तो यदि $२७तच^३ - ९प^२च^२ - प^३ = ०$ तो सिद्ध करो कि नये समीकरण के मूल गुणोत्तर श्रेढी में होंगे।

६। $य^३ + पय + त = ०$ इसमें यदि अव्यक्त के दो असंभाव्य मान $अ \pm क\sqrt{-१}$ ऐसे हों तो सिद्ध करो कि $क^२ = ३अ^२ + प$

७। भुज, कोटि का अन्तर १ और जात्य त्रिभुज का क्षेत्र-फल ६ है तो भुज, कोटि और कर्ण के मान बताओ।

उ० भु = ३, को = ४, क = ५।

८। $य^३ + प_१य^२ + प_२य + त = ०$ इसमें अव्यक्त के मान यदि गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि $तप_१^३ = प_२^३$।

९। $य^३ - य^२ + २य - ८ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

चतुर्घात समीकरण

१२२—किसी पूरे चतुर्घात समीकरण में य के स्थान में एक ऐसे अव्यक्त का उत्थापन दे सकते हैं जिसके वश से नये समीकरण में दूसरा पद न रहे (३९वाँ प्रक्रम देखो) जैसे

$प_0 य^4 + प_1 य^3 + प_2 य^2 + प_3 य + प_4 = 0$ इस पूरे चतुर्घात समीकरण में (३९वें प्रक्रम से) यदि $य = र - \frac{प_1}{4प_0}$ तो इसके उत्थापन से अब जो र का चतुर्घात समीकरण बनेगा उसमें $र^3$ का पद उड़ जायगा। इसलिये यहां पर उस चतुर्घात समीकरण में य के मान जानने के लिये विधि लिखी जाती है जिसमें दूसरे पद का लोप हो गया है।

कल्पना करो कि किसी पूरे चतुर्घात समीकरण को

$$अय^4 + 4कय^3 + 6खय^2 + 4गय + घ = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

ऐसा बना लिया है। इसमें यदि $य = \frac{र-क}{अ}$ तो नया समीकरण

$$र^4 + 6चा\,र^2 + 4जा \cdot र + अ^3 झा - 3चा^2 = 0 \text{ ऐसा होगा} \quad \cdots (2)$$

जहां $चा = अख - क^2$, $जा = अ^2ग - 3अकख + 2क^3$,

$$झा = अघ - 4कग + 3ख^2 \text{ ।}$$

ऐसे द्वितीय पद रहित चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये ओलर (Euler) ने कल्पना की कि

$$र = \sqrt{प} + \sqrt{व} + \sqrt{भ}$$

वर्ग करने से

$$र^2 - प - व - भ = 2\left(\sqrt{प \cdot व} + \sqrt{प \cdot भ} + \sqrt{व \cdot भ}\right)$$

फिर क्रम से वर्ग और लघु करने से

$$र^४ - २(प+ब+भ)र^२ - ८र\sqrt{प ब \cdot भ} + (प+ब+भ)^२ - ४(बभ+पब+पभ) = ०$$

(२) के साथ तुलना करने से

$$प+ब+भ = -३चा,\ ब \cdot भ+पभ+पब = ३चा^२ - \frac{अ^२झा}{४},\ \sqrt{पबभ} = -\frac{जा}{२}$$

इस पर से एक घन समीकरण बनाने से

$$ट^३ + ३चाट^२ + \left(३चा^२ - \frac{अ^२झा}{४}\right)ट - \frac{जा^२}{४} = ०$$ ऐसा हुआ ....(३) इसमें क्रम से जो ट के मान होंगे वे क्रम से प,ब और भ के मान होंगे।

(३) का थोड़ा सा रूपान्तर करने से

$$ट^३ + ३चाट^२ + ३चा^२ट + चा^३ - चा^३ - \frac{अ^२झा}{४}ट - \frac{अ^२झा}{४}चा + \frac{अ^२झा}{४}चा - \frac{जा^२}{४}$$

$$= (ट+चा)^३ - \frac{अ^२झा}{४}(ट+चा) + \frac{अ^२झा}{४}चा - चा^३ - \frac{जा^२}{४} = ०$$

इसे ४ से गुणा देने से

$$४(ट+चा)^३ - अ^२झा(ट+चा) + अ^२झाचा - जा^२ - ४चा^३ = ०$$

इसमें यदि $अ^२झाचा - जा^२ - ४चा^३ = अ^३छा$

र के चार मान यदि $र_1, र_2, र_3, र_4$ क्रम से ये हैं तो र के चतुर्घात समीकरण में $र^3$ के पद के न रहने से स्पष्ट है कि

$$र_1 + र_2 + र_3 + र_4 = ०$$

और ऊपर की युक्ति से

$$र_1 = \sqrt{प} + \sqrt{ब} - \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

$$र_2 = -\sqrt{प} - \sqrt{ब} - \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

$$र_3 = -\sqrt{प} + \sqrt{ब} + \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

$$र_4 = \sqrt{प} - \sqrt{ब} + \frac{जा}{२\sqrt{प}\sqrt{ब}}$$

इन पर से

$$र_2 + र_3 = -२\sqrt{प},\ र_1 + र_4 = २\sqrt{प}$$

$$\therefore (र_2 + र_3)^2 = (र_1 + र_4)^2 = ४प$$

इसी प्रकार $(र_3 + र_1)^2 = (र_2 + र_4)^2 = ४ब$

$$(र_1 + र_2)^2 = (र_3 + र_4)^2 = ४भ$$

इन पर से भी $र_1, र_2, र_3, र_4$ ये $\sqrt{प} + \sqrt{ब}, \sqrt{भ}$ इनके रूप में आ जायंगे।

यदि दिए हुए चतुर्घात समीकरण में य के मान $अ_1, अ_2, अ_3, अ_4$ हों तो (१) समीकरण में र = अय + क। इसलिये य के चारों मानों का उत्थापन य के स्थान में और र के चारों मानों का उत्थापन र के स्थान में देने से

$$\left.\begin{aligned} \text{अअ}_{१} + \text{क} &= \sqrt{\text{प}} - \sqrt{\text{ब}} - \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अअ}_{२} + \text{क} &= -\sqrt{\text{प}} + \sqrt{\text{ब}} - \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अअ}_{३} + \text{क} &= -\sqrt{\text{प}} - \sqrt{\text{ब}} + \sqrt{\text{भ}} \\ \text{अअ}_{४} + \text{क} &= \sqrt{\text{प}} + \sqrt{\text{ब}} + \sqrt{\text{भ}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (५)$$

इन पर से प, ब, भ के मान

$$\left.\begin{aligned} \text{प} &= \frac{\text{अ}^{२}}{१६}\left(\text{अ}_{२} + \text{अ}_{३} - \text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}\right)^{२} \\ \text{ब} &= \frac{\text{अ}^{२}}{१६}\left(\text{अ}_{३} + \text{अ}_{१} - \text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}\right)^{२} \\ \text{भ} &= \frac{\text{अ}^{२}}{१६}\left(\text{अ}_{१} + \text{अ}_{२} - \text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}\right)^{२} \end{aligned}\right\} \cdots (६)$$

(५) में दो दो का अन्तर कर आपस में गुण देने से और प, ब, भ के रूप $\text{ष}_{१}$, $\text{ष}_{२}$, $\text{ष}_{३}$ इनके रूप में बनाने से

$$\left.\begin{aligned} ४(\text{ब} - \text{भ}) &= ४\text{अ}^{२}(\text{ष}_{२} - \text{ष}_{३}) = -\text{अ}^{२}(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}) \\ ४(\text{भ} - \text{प}) &= ४\text{अ}^{२}(\text{ष}_{३} - \text{ष}_{१}) = -\text{अ}^{२}(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}) \\ ४(\text{प} - \text{ब}) &= ४\text{अ}^{२}(\text{ष}_{१} - \text{ष}_{२}) = -\text{अ}^{२}(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}) \end{aligned}\right\} \cdots (७)$$

(४) में दूसरे पद के न रहने से $\text{ष}_{१} + \text{ष}_{२} + \text{ष}_{३} = ०$
इसलिये (७) में परस्पर घटाने से

$$\left.\begin{aligned} १२\text{ष}_{१} &= (\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}) - (\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}) \\ १२\text{ष}_{२} &= (\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{४}) - (\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}) \\ १२\text{ष}_{३} &= (\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{४}) - (\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{४}) \end{aligned}\right\} \cdots (८)$$

इस प्रकार (५),(६),(७) और (८) से आपस के सब प्रकार के सम्बन्ध जान पड़ते हैं।

(३) समीकरण को ओलर का घनसमीकरण कहते हैं और (४) को अपवर्त्तित घनसमीकरण कहते हैं।

ऊपर के समीकरणों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

उदाहरण—(१) $आ_0 य^4 + ६आ_2 य^2 + ४आ_3 य + आ_4 = ०$

और $आ_0 य^4 + ६आ_2 य^2 - ४आ_3 य + आ_4 = ०$

इन दोनों पर से अपवर्त्तित घन समीकरण एक ही होगा।

यहां स्पष्ट है कि पहले समीकरण में $जा = आ_3$ और दूसरे समीकरण में $जा = -आ_3$ इसलिये $जा^2$ का मान दोनों में एक ही होगा और अवर्त्तित घन समीकरण में व्यक्ताङ्क के मान में $जा^2$ आता है। इसलिये दोनों समीकरणों पर से अपवर्त्तित घनसमीकरण एक ही होगा।

$$(२)\ य^4 - ६द\, य^2 \pm ८य\sqrt{द^3 + म^3 + न^3 - ३दमन} + ३(४मन - द^2) = ०$$

इस पर से अपवर्त्तित घनसमीकरण बनाओ।

यहां दिए हुए समीकरण के रूप से

$$चा = -द,\ जा = \pm २\sqrt{द^3 + म^3 + न^3 - ३दमन}$$

और $अ^2 झा - ३चा^2 = ३(४मन - द^2)$

$$\therefore\ अ^2 झा = १२मन - ३द^2 + ३चा^2$$
$$= १२मन$$

इन पर से $अ^2 झा\, चा - जा^2 - ४चा^3$

$$= अ^3 छ$$

$= -$ अ^{2}भाद $- ४द^३ - ४म^३ - ४न^३ + १२दमन + ४द^३$

$= - १२दमन - ४द^३ - ४म^३ - ४न^३ + १२दमन + ४द^३$

$= - ४(म^३ + न^३)$, अ $= १$ ऐसा मान लेने से।

इनका उत्थापन अपवर्त्तित घनसमीकरण में देने से और ४ का अपवर्त्तन देने से

$ष^३ - ३मनष - (म^३ + न^३) = ०$ ऐसा हुआ।

(३) $\{ य^४ - ६दय^२ + ३ (४मन - द^२) \}^२$
$= ६४ (द^३ + म^३ + न^३ - ३मन) य^२$

इसमें य के मान बताओ।

यह समीकरण अष्ट घात का है, इसलिये य के आठ मान आवेंगे। और दोनों पक्षों के मूल लेने से जो चतुर्घात समीकरण होगा उसमें य के चार मान आवेंगे। मूल लेकर सब पदों को बाईं ओर ले जाने से समीकरण का रूप

$य^४ - ६दय^२ \pm ८य\sqrt{द^३ + म^३ + न^३ - ३दमन} + ३(४मन - द^२) = ०$

ऐसा होगा।

यह ठीक (२) उदाहरण के ऐसा हो गया। इसलिये इस पर से अपवर्त्तित घनसमीकरण

$ष^३ - ३मनष - (म^३ + न^३) = ०$

कार्डन की रीति से $त = -(म^३ + न^३)$, $प = - ३मन$

इन पर से $र = \left\{ -\frac{त}{२} + \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}} = म$

और $ल = \left\{ -\frac{त}{२} - \sqrt{\left(\frac{त^२}{४} + \frac{प^३}{२७}\right)} \right\}^{\frac{१}{३}} = न$

इसलिये $ष_1 = म + न$, $ष_2 = घाम + घा^2न$, $ष_3 = घा^2म + घान$

और $य = \sqrt{द + म + न} + \sqrt{द + घाम + घा^2न} + \sqrt{द + घा^2म + घान}$

मूलों के धन, ऋण चिन्हों के वश से य के आठ मान आ जायंगे।

(४) $र^4 + ६चा \cdot र^2 + ४जा र + अ^2 झा - ३चा^2 = ०$ इसमें यदि र का एक मान

$$\sqrt{द + म + न} + \sqrt{द + घाम + घा^2न} + \sqrt{द + घा^2म + घान}$$

यह हो तो चा, झा और छ के मान बताओ।

(३) उदाहरण की युक्ति से यहां अपवर्त्तित घन समीकरण

$ष^3 - ३मनष - (म^3 + न^3) = ०$ ऐसा होगा।

(२) उदाहरण की युक्ति से अ = १ ऐसा मान लेने से

$चा = -द$, $झा = १२मन$, $छ = -४(म^3 + न^3)$।

(५) यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य हों तो सिद्ध करो कि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त का एक संभाव्य धन मान होगा और दो असंभाव्य मान होंगे।

६वाँ समीकरण जो पहिले लिख आए हैं उससे स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति में ओलर के समीकरण में अव्यक्त का एक मान ध.. ..ाव्य होगा और दो असंभाव्य। विचारने में यह बात मान ल.. ..है कि चतुर्घात समीकरण के दोनों संभाव्य मूल आपस में तुल्य नहीं हैं। तुल्य मानने से व्यभिचार हो जायगा। ६वें समीकरण से इतनी बातें सिद्ध होती हैं।

यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के सब मान धन संभाव्य हों तो चतुर्घात समीकरण मे अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे।

यदि ओलर के घनसमीकरण में अव्यक्त के सब संभाव्य मान ऋण हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के सब मान असंभाव्य होंगे। और यदि ओलर के घन समीकरण में अव्यक्त के दो असंभाव्य मान हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। यदि ज = ० और छ = ० तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त मान कैसे आवेंगे।

२। यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान समान हों तो सिद्ध करो कि अपवर्त्तित घन समीकरण में भी अव्यक्त के दो मान समान आवेंगे।

३। यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के तीन मान समान हों तो सिद्ध करो कि अपवर्त्तित घन समीकरण में अव्यक्त के सब मान शून्य होंगे। इस दशा में झा = ०, छ = ० होगा।

४। यदि चतुर्घात समीकरण के दो दो मूल समान हों तो सिद्ध करो कि ओलर के घन समीकरण के दो मूल शून्य होंगे और ज और $१२चा^{२} - अ^{२}झा$ ये भी शून्य होंगे।

५। सिद्ध करो कि यदि चतुर्घात समीकरण के सब मूल संभाव्य वा असंभाव्य हों तो अपवर्त्तित घनसमीकरण के

सब मूल संभाव्य होंगे। और इसका विपरीत यदि अपवर्त्तित घन समीकरण के सब मूल संभाव्य हों तो चतुर्घात समीकरण के सब मूल संभाव्य वा असंभाव्य होंगे।

६। यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य हों तो सिद्ध करो कि अपवर्त्तित घन समीकरण में अव्यक्त के दो मान असंभाव्य होंगे। और यदि अपवर्त्तित घनसमीकरण में अव्यक्त के दो मान असंभाव्य होंगे तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे।

७। यदि चा धन होगा तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के असंभव मान अवश्य होंगे।

८। यदि भा ऋण होगा तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के दो मान संभाव्य और दो मान असंभाव्य होंगे।

९। यदि चा और छ दोनों धन हों तो चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के सब मान असभव होंगे।

१०। सिद्ध करो कि यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$ और $अ_४$ हों तो $अ^६ (अ_२ - अ_३)^२ (अ_३ - अ_१)^२ (अ_१ - अ_२)^२ (अ_१ - अ_४)^२ (अ_२ - अ_४)^२ (अ_३ - अ_४)^२ = २५६ (भा^३ - २७छ^२)$। १२२वें प्रक्रम में दिए हुए (७)वें समीकरण से और ४१वें प्रक्रम के दूसरे उदाहरण के अन्त में जो समीकरण का लघुतम रूप है उससे यह प्रश्न सिद्ध हो जाता है।

१२३— ओलर के घनसमीकरण मे प, व और भ के जो मान आते हैं जिनके वश से पहले र के आठ मान आ जाते हैं,

फिर विचार करने से चार मान अशुद्ध ठहरते हैं और चार ठीक उनके जानने के लिये और भी कई एक प्रकार हैं जिनसे बिना संशय र के चार मान आ जाते हैं। पिछले प्रक्रम में जो प्रकार लिख आए हैं उनसे बुद्धिमान अनेक कल्पना कर सकता है, इसलिये व्यर्थ ग्रंथ बढ़ाना नहीं चाहते। अब चतुर्घात समीकरण को दो वर्ग समीकरणों के गुण्य गुणक रूप खण्डों में कैसे ले जाना होता है इसके लिये दो प्रकार दिखला कर यह अध्याय समाप्त किया जाता है।

प्रकार—(१) कल्पना करो कि

$$अय^४ + ४कय^३ + ६खय^२ + ४गय + घ = ०$$

इसका रूपान्तर

$$(अय^२ + २कय + ख + २अष)^२ - (२माय + ना)^२$$

ऐसा होता है।

दिए हुए समीकरण को अ से गुण कर इसके साथ समीकरण के रूपान्तर की तुलना करने से

$$मा^२ = क^२ - अख + अ^२ष,\ ना^२ = (ख + २अष)^२ - अघ$$

$$माना = कख - अग + २अकष$$

$मा^२$ को $ना^२$ से गुण कर उसमें माना का वर्ग घटा देने से

$$४अ^२ष^३ - (अघ - ४कग + ३ख^२)अष + अखघ + २खगक$$
$$- अग^२ - घक^२ - ख^३ = ०$$

यह पिछले प्रक्रम का वही अपवर्त्तित घन समीकरण बन जाता है।

इस पर से ष के तीन मान $ष_१$, $ष_२$ और $ष_३$ मिलेंगे फिर उनसे $मा^२$, मा·ना और $ना^२$ भी व्यक्त हो जायंगे जिनसे मा और ना के मान भी जान सकते हो।

इस युक्ति से चतुर्घात समीकरण का

$$(\text{अय}^2 + 2\text{कय} + \text{ख} + 2\text{अप})^2 - (2\text{माय} + \text{ना})^2$$
$$= \{\text{अय}^2 + 2(\text{क} - \text{मा})\text{य} + \text{ख} + 2\text{अप} - \text{ना}\}$$
$$\{\text{अय}^2 + 2(\text{क} + \text{मा})\text{य} + \text{ख} + 2\text{अप} + \text{ना}\} = 0$$

इसमें प के स्थान में $\text{प}_1, \text{प}_2, \text{प}_3$ का उत्थापन देने से तीन जोड़े वर्गसमीकरण के गुण्य गुणक रूप खण्ड होंगे।

चतुर्घात समीकरण में य के जो मान अ_1, अ_2, अ_3 और अ_4 ये हैं उनमें मान लो कि पहले एक जोड़े वर्गसमीकरण से क्रम से अ_2, अ_3 और अ_1, अ_4 दूसरे जोड़े से अ_3, अ_1 और अ_2, अ_4 और तीसरे जोड़े से अ_1, अ_2 और अ_3, अ_4 ये मान आए तो २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$$\text{अ}_2 + \text{अ}_3 = -\frac{2}{\text{अ}}(\text{क} - \text{मा}_1),\quad \text{अ}_3 + \text{अ}_1 = -\frac{2}{\text{अ}}(\text{क} - \text{मा}_2),$$
$$\text{अ}_1 + \text{अ}_2 = -\frac{2}{\text{अ}}(\text{क} - \text{मा}_3),$$

$$\text{अ}_1 + \text{अ}_4 = -\frac{2}{\text{अ}}(\text{क} + \text{मा}_1),\quad \text{अ}_2 + \text{अ}_4 = -\frac{2}{\text{अ}}(\text{क} + \text{मा}_2),$$
$$\text{अ}_3 + \text{अ}_4 = -\frac{2}{\text{अ}}(\text{क} + \text{मा}_3),$$

जहां $\text{मा}_1 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2\text{प}_1}$,

$\text{मा}_2 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2\text{प}_2}$,

$\text{मा}_3 = \sqrt{\text{क}^2 - \text{अख} + \text{अ}^2\text{प}_3}$

दो दो समीकरणों को परस्पर घटाने से

$$अ_२ + अ_३ - अ_१ - अ_४ = ४\frac{मा_१}{अ},\; अ_३ + अ_१ - अ_२ - अ_४ = ४\frac{मा_२}{अ},$$

$$अ_१ + अ_२ - अ_३ - अ_४ = ४\frac{मा_३}{अ}$$

और दिए हुए चतुर्घात समीकरण पर से

$$अ_१ + अ_२ + अ_३ + अ_४ = -४\frac{क}{अ}$$

इसलिये

$$अअ_१ + क = -मा_१ + मा_२ + मा_३$$

$$अअ_२ + क = मा_१ - मा_२ + मा_३$$

$$अअ_३ + क = मा_१ + मा_२ - मा_३$$

$$अअ_४ + क = -मा_१ - मा_२ - मा_३$$

इसकी तुलना १२२वें प्रक्रम के (५) समीकरण से करने में स्पष्ट होता है कि ओलर के घनसमीकरण में जो प, ब, भ हैं वे क्रम से $मा_१^२$, $मा_२^२$, $मा_३^२$ इनके समान हैं।

$४\frac{मा_१}{अ}$, $४\frac{मा_२}{अ}$ इत्यादि को परस्पर गुण देने से

$$अ^३ \;(अ_२ + अ_३ - अ_१ - अ_४)\;(अ_३ + अ_१ - अ_२ - अ_४)\cdot(अ_१ + अ_२ - अ_३ - अ_४) = ६४\, मा_१ मा_२ मा_३$$ ऐसा होगा।

फिर १२२वें प्रक्रम के (५) समीकरण से

$$अअ_४ + क = \sqrt{प} + \sqrt{ब} + \sqrt{भ} = -मा_१ - मा_२ - मा_३$$

इसलिये $\sqrt{प}\sqrt{ब}\sqrt{भ} = -मा_१ मा_२ मा_३ = -\frac{जा}{२}$

$$\therefore\; मा_१, मा_२, मा_३ = \frac{जा}{२}$$

इस पर से $मा_1$, $मा_2$, $मा_3$ इनका कैसा चिन्ह ग्रहण करना चाहिए इसका भी विचार कर सकते हैं।

पिछले समीकरण से $मा_3 = \frac{जा}{२मा_1 मा_2}$

इसलिये य के मान जानने के लिये केवल

$अय + क = मा_1 + मा_2 - \frac{जा}{२मा_1 मा_2}$ ऐसा समीकरण बना सकते हैं

$मा_1 = \sqrt{क^2 - अख + अ^2 व_1}$ और $मा_2 = \sqrt{क^2 - अख + अ^2 व_2}$

इन पर से $मा_1$ और $मा_2$ के धन और ऋण मान लेने से ऊपर अय+क में परस्पर उत्थापन देने से चतुर्घात समीकरण में य के चार मान आ जायंगे।

दो राशिओं के वर्गान्तर के रूप में जो चतुर्घात समीकरण ऊपर बनाया गया है वह बहुतों के मत से फेररी (Ferrari) और बहुतों के मत से सिम्पसन् (Simpson) की कल्पना है।

प्रकार—(२) कल्पना करो कि

$$अय^4 + ४कय^3 + ६खय^2 + ४गय + घ = ०$$

इस चतुर्घात समीकरण का रूप

$अ(य^2 + २पय + त)(य^2 + २प'य + त')$ यदि ऐसा है तो दोनों खण्डों को गुणने से और दिए हुए समीकरण के साथ तुलना करने से

$$प + प' = २\frac{क}{अ},\ त + त' + ४पप' = ६\frac{ख}{अ},\ पत' + प'त = २\frac{ग}{अ}$$

$$तत' = \frac{घ}{अ} \quad \ldots\ldots\ldots (१)$$

अब इन चारो समीकरणों से यदि पाचवां समीकरण

$प प' = फि$, वा $त + त' = फि$ ऐसा बन जावे तो $प, प', त$ और $त'$ इनके मान व्यक्त हो जायँगे।

यदि $फि = \frac{ख}{अ} - प प' = \frac{१}{४}\left(त + त' - \frac{२ख}{अ}\right)$ ऐसा मानो तो बहुत सुभीता पड़ेगा।

(१) समीकरण से यहां

$$प न + प' त' = \frac{४ अ क ल - २ अ^{२} ग}{अ^{३}} + \frac{८ क फि}{अ}$$

और $(प^{२} + त^{२})(प'^{२} + त'^{२}) = (प त' - प' त)^{२} + (प त + प' त')^{२}$

इस सरूप समीकरण से

$$४ अ^{२} फि^{२} - अ झा फि + छा = ०$$

ऐसा अपवर्त्तित घन समीकरण बन जायगा।

इस प्रकार से फि के मान से $प प'$ और $त + त'$ व्यक्त हो जायंगे। फिर (१) समीकरण से $प, त, प', त'$ सब व्यक्त हो जायगे।

(१) प्रकार से जो दो वर्गसमीकरण उत्पन्न हुए है उनसे स्पष्ट है कि

$$अ_{२} अ_{३} = \frac{ख + २ अ प_{१} - ना}{अ}$$

$$अ_{१} अ_{४} = \frac{ख + २ अ प_{१} + ना}{अ}$$

$$अ_{२} अ_{३} + अ_{१} अ_{४} = ४ प_{१} + \frac{२ख}{अ}।$$

और (२) प्रकार में वर्गसमीकरण के जो खण्ड है उनसे

$४पप' =$ दो दो मानों के योग का घात। इसे दो दो मानों के घात $\frac{६ख}{अ}$ में घटा देने से

$$अ_१अ_३ + अ_२अ_४ = \frac{६ख}{अ} - ४पप'$$

$$= \frac{६ख}{अ} - \frac{४ख}{अ} + ४फि$$

$$= ४फि_१ + \frac{२ख}{अ}$$

इसलिये (१) प्रकार में जो ष है वही (२) प्रकार में फि है।

इस पर से यह भी सिद्ध होता है कि ष पर से जैसा अपवर्त्तित घन समीकरण बनता है वैसा ही फि पर से भी बनेगा।

१२४—$य^४ + ६चाय^२ + ४जाय + अ^२झा - ३चा^२ = ०$

इस चतुर्घात समीकरण का यदि

$$(य^२ + २पय + त)\ (य^२ - २पय + त')$$

ऐसा रूपान्तर करें तो इनके घात को दिए हुए समीकरण के साथ तुलना करने से

$$त + त' - ४प^२ = ६चा,\ २प(त' - त) = ४जा,\ तत' = अ^२झा - ३चा^२$$

अर्थात्

$$त + त' = ६चा + ४प^२;\ त' - त = \frac{४जा}{२प},\ तत' = अ^२झा - ३चा^२$$

प के रूप में पहले दो समीकरणों से

$$त = \frac{६चा + ४प^२ - \frac{४जा}{२प}}{२}, \quad त' = \frac{६चा + ४प^२ + \frac{४जा}{२प}}{२}$$

$$\therefore तत' = \left(\frac{६चा + ४प^२ - \frac{४जा}{२प}}{२}\right)\left(\frac{६चा + ४प^२ + \frac{४जा}{२प}}{२}\right)$$

$$= अ^२झा - ३चा^२$$

इस पर से

$$६४प^६ + १६ \times १२चाप^४ + ४(३६चा^२ - ४अ^२झा + १२चा^२)प^२ - १६जा^२ = ०$$

वा $४प^६ + १२चाप^४ + (१२चा^२ - अ^२झा)प^२ - जा^२ = ०$

इसमें यदि $अ^२फि = प^२ + च = \frac{१}{४}(त + त' - २चा)$ इसका उत्थापन दो और $अ^२$ का भाग दे दो तो वही अपवर्त्तित घन समीकरण

$४अ^२फि^३ - अझाफि + छा = ०$ ऐसा हो जायगा।

इस पर से भी ऊपर की युक्ति से य के मान व्यक्त हो जायंगे। यह डिकार्टिस की कल्पना है।

१२५—$अय^४ + ४कय^३ + ६खय^२ + ४गय + घ = ०$

इसमें यदि $य = जर + थ$ तो समीकरण का रूप

$$अज^४र^४ + ४स_१ज^३र^३ + ६स_२ज^२र^२ + ४स_३जर + स_४ = ०$$

जहां $स_१ = अथ + क$, $स_२ = अथ^२ + २कथ + ख$, $स_३ = अथ^३ + ३कथ^२ + ३खथ + ग$। अब यदि यह हरात्मक समीकरण हो तो ७६वें प्रक्रम से

$$अ ज^४ = स_४,\ स_१ ज^२ = स_३ ज$$

इन पर से $\frac{स_३}{स_१} = ज^२$ और $\frac{अ स_३^२}{स_१^२} = स_४$

$$\therefore\ अ स_३^२ - स_१^२ स_४ = ०$$

और $\quad ज^२ = \frac{स_३}{स_१} = \frac{अ थ^३ + ३क थ^२ + ३ख थ + ग}{अ थ + क}$

इस पर से ज के विरुद्ध चिन्ह के दो मान आवेंगे।

१२६—यदि किसी न घात के समीकरण को

$$स_न = अ_० य^न + न अ_१ य^{न-१} + \frac{न(न-१)}{२!} अ_२ य^{न-२} + \cdots$$
$$+ न अ_{न-१} य + अ_न \qquad (१)$$

इस प्रकार से लिखें और यदि न के स्थान में न − १ इसका उत्थापन दें तो पूर्व संकेत से

$$स_{न-१} = अ_० य^{न-१} + (न-१) अ_१ य^{न-२} + \quad + (न-१) अ_{न-२} य + अ_{न-१}$$

....

$$स_३ = अ_० य^३ + ३अ_१ य^२ + ३अ_२ य + अ_३$$
$$स_२ = अ_० य^२ + २अ_१ य + अ_२$$
$$स_१ = अ_० य + अ_१$$
$$स_० = अ_० ।$$

$स_न$ का प्रथमोत्पन्न फल बनाओ तो

$$न \left\{ अ_० य^{न-१} + (न-१) अ_१ य^{न-२} + \frac{(न-१)(न-२)}{२!} अ_२ य^{न-३} + \cdots\cdots + अ_{न-१} \right\}$$

$= न स_{न-१}$ ऐसा होता है।

यदि (१) में य के स्थान में र+च का उत्थापन दें तो

$$स_न = आ_० र^न + नआ_१ र^{न-१} + \frac{न(न-१)}{२!} आ_२ र^{न-२} + \dots\dots\dots$$
$$+ नआ_{न-१} र + आ$$

जहां $फ(च) = आ_न$, $फ'(च) = न आ_{न-१}$

और $आ_० = अ_०$

$आ_१ = अ_० च + अ_१$

$आ_२ = अ_० च^२ + २अ_१ च + अ_२$

अब यदि ऊपर के समीकरण में $र^{न-१}$ पद का लोप करना हो तो

$$आ_१ = अ_० च + अ_१$$

$$\therefore च = -\frac{अ_१}{अ_०}$$

इसका उत्थापन $आ_२$, $आ_३$, · · इत्यादि में देने से

$$आ_२ = अ_० \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right)^२ + २अ_१ \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right) + अ_२$$

$$= \frac{अ_० अ_२ - अ_१^२}{अ_०}$$

$$आ_३ = अ_० \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right)^३ + ३अ_१ \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right)^२ + ३अ_२ \left(-\frac{अ_१}{अ_०}\right) + अ_३$$

$$= \frac{अ_०^२ अ_३ - ३अ_० अ_१ अ_२ + २अ_१^३}{अ_०^२}$$

इस प्रकार से $आ_1$, $आ_2$, $आ_3$ इत्यादि के मान लाघव से जान सकते हो।

१२७—१२५वें प्रक्रम में $अ स_3^2 - स_1^2 स_4 = ०$ जो यह लिखा गया है इसमें $स_3$ और $स_4$ के मान $स_1$ और व्यक्ताङ्कों के रूप में लाकर उत्थापन देने से

$$२जा स_1^3 + (अ^2 झा - १२चा^2) स_1^2 - ६जा चा स_1 - जा^2 = ० \cdots (१)$$

ऐसा होगा क्योंकि

$$स_1 = अथ + क$$

$$स_2 = अथ^2 + २कथ + ख$$

$$स_3 = अथ^3 + ३कथ^2 + ३खथ + ग$$

$$\therefore अ^2 स_3 = अ^3थ^3 + ३कअ^2थ^2 + ३खअ^2थ + अ^2ग$$

$$= अ^3थ^3 + ३कअ^2थ^2 + ३क^2अथ + क^3 - ३क^2अथ - क^3 + ३खअ^2थ + अ^2ग$$

$$= (अथ + क)^3 - ३क^2अथ - ३क^3 + ३खअ^2थ + ३खअक + अ^2ग + २क^3 - ३खअक$$

$$= स_1^3 - ३क^2(अथ + क) + ३खअ(अथ + क) + २क^3 + अ^2ग - ३खअक$$

$$= स_1^3 + ३स_1(अख - क^2) + २क^3 + अ^2ग - ३खअक$$

$$= स_1^3 + ३चा स_1 + जा \text{ (१२२वां प्र० देखो)} \cdots (२)$$

इसी प्रकार

$$स_4 = अथ^4 + ४कथ^3 + ६खथ^2 + ४गथ + घ$$

$$\therefore अ^3 स_4 = अ^4थ^4 + ४कअ^3थ^3 + ६खअ^3थ^2 + ४गअ^3थ + अ^3घ$$

$$= अ^4थ^4 + ४कअ^3थ^3 + ६क^2अ^2थ^2 + ४क^3अथ + क^4$$
$$- ६क^2अ^2थ^2 - ४क^3अथ - क^4 + ६खअ^2थ^2$$
$$+ ४गअ^2थ + अ^2घ$$

$$= (अथ + क)^4 - ६क^2अ^2थ^2 - १२क^3अथ - ६क^4$$
$$+ ८क^3अथ + ५क^4 + ६खअ^2थ^2 + ४गअ^2थ + अ^2घ$$

$$= स_1^4 - ६क^2 \left(अ^2थ^2 + २अकथ + क^2\right) + ८क^3अथ$$
$$+ ८क^4 - ३क^4 + ६खअ^2थ^2 + ४गअ^2थ + अ^2घ$$

$$= स_1^4 - ६क^2स_1^2 + ६अख(अ^2थ^2 + २अकथ + क^2)$$
$$- १२अ^2कखथ - ६अक^2ख + ८क^3अथ + ८क^4$$
$$+ ४गअ^2थ + अ^2घ$$

$$= स_1^4 + ६चास_1^2 + ८क^3(अथ + क) + ४अ^2ग(अथ + क)$$
$$- ४अ^2कग - १२(अथ + क)अकख + ६अक^2ख$$
$$- ३क^4 + अ^2घ$$

$$= स_1^4 + ६चास_1^2 + ४(अथ + क)(२क^3 + अ^2ग$$
$$- ३अकख) + अ^2घ + ६अक^2ख - ४अ^2कग - ३क^4$$

$$= स_1^4 + ६चास_1^2 + ४जास_1 + अ^2(अघ - ४कग + ३ख^2)$$
$$- ३अ^2ख^2 + ६अक^2ख - ३क^4$$

$$= स_1^4 + ६चास_1^2 + ४जास_1 + अ^2झा$$
$$- ३(अ^2ख^2 - २अखक^2 + क^4)$$

$$= स_1^4 + ६चास_1^2 + ४जास_1 + अ^2झा - ३(अख - क^2)^2$$

$$= स_1^4 + ६चास_1^2 + ४जास_1 + अ^2झा - ३च^2 \quad \ldots\ldots (३)$$

(२) का वर्ग कर $अ^2$ का भाग देने से $अस_3^2$ का मान आवेगा उसमें (३) को $स_1^2$ से गुण कर $अ^2$ का भाग देकर घटा देने से (१) उत्पन्न हो जायगा।

(१) में यदि $स_1 = अथ + क = \frac{\frac{1}{2}जा}{अ^2 ष - चा}$ इसका उत्थापन दो तो

$$४अ^2 ष^3 - झा अष + छा = ०$$

यह वही अपवर्त्तित घनसमीकरण उत्पन्न होता है जो कि १२२वें प्रक्रम का (२) समीकरण है।

इस प्रकार हरात्मक समीकरण पर से चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये मि. एस्. एस्. ग्रीथीड (Mr S. S Greatheed) ने कल्पना की है (see Cambridge Math. Journal, vol. I)।

यदि चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान क्रम से $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$, $अ_4$ ये हों तो इनके रूप में ज और थ के मान इस प्रकार जान सकते हैं।

य = जर + थ। इसलिये यदि र के दो मान $र_1$, $र_2$ हों तो और र के मान $\frac{1}{र_1}, \frac{1}{र_2}$ ये होंगे। इनका उत्थापन य के मान में देने से

$$अ_1 = जर_1 + थ$$

$$अ_2 = जर_2 + थ$$

$$अ_3 = ज\frac{1}{र_2} + थ$$

$$अ_4 = ज\frac{1}{र_1} + थ$$

इसलिये

$$(\text{अ}_१ - \text{थ})(\text{अ}_४ - \text{थ}) = (\text{अ}_२ - \text{थ})(\text{अ}_३ - \text{थ}) = \text{ज}^२$$

जिससे

$$\text{थ} = \frac{\text{अ}_२\text{अ}_३ - \text{अ}_१\text{अ}_४}{\text{अ}_२ + \text{अ}_३ - \text{अ}_१ - \text{अ}_४}$$

और

$$-\text{ज}^२ = \frac{(\text{अ}_३ - \text{अ}_१)(\text{अ}_२ - \text{अ}_४)(\text{अ}_१ - \text{अ}_२)(\text{अ}_३ - \text{अ}_४)}{(\text{अ}_२ + \text{अ}_३ - \text{अ}_१ - \text{अ}_४)^२}$$

इस प्रकार चतुर्घात समीकरण में अव्यक्त के मान जानने के लिये अनेक कल्पनायें उत्पन्न होती हैं।

१२८—इस प्रक्रम मे चतुर्घात समीकरण के क्रिया समेत कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\text{य}^४ + ८\text{य}^३ - ६६\text{य}^२ - ८८\text{य} + ८० = ०$ इसमें अव्यक्त के मान निकालो।

१२३वें प्रक्रम के (१) प्रकार से

$$\text{अ} = १,\ \text{क} = २,\ \text{ख} = -११,\ \text{ग} = -२२,\ \text{घ} = ८०$$

इनका उत्थापन घनसमीकरण में देने से

$$४\text{अ}^२ = ४।$$

$$\text{अघ} = ७०,\ ४\text{कग} = -१७६,\ ३\text{ख}^२ = ३६३$$

$$\therefore \text{अघ} - ४\text{कग} + ३\text{ख}^२ = ८० + १७६ + ३६३ = ४४३ + १७६ = ६१९$$

$$\text{अखघ} = -८८०,\ २\text{कखग} = ९६८,\ \text{अग}^२ = ४८४,\ \text{घक}^२ = ३२०,$$

$$\text{ख}^३ = -१३३१;$$

$\therefore$ अखघ + २कखग − अग² − घक² − ख² = −८८० + ६६८
− ४८४ − ३२० + १३३१ = ६१५

$\therefore$ ४प² − ६१६प + ६१५ = ०

यहां प = १ यह निकलता है, इसलिये इसका उत्थापन मा² और ना² में देने से

मा² = क² − अख + अ²प = ४ + ११ + १ = १६

ना² = (ख + २अप)² − अघ = (− ११ + २)² − ८० = १

यहां

मा·ना = कख − अग + २अकप = − २२ + २२ + ४ = ४

यह धन आता है, इसलिये मा = + ४, ना = + १ वा मा = − ४,
ना = − १

इनका उत्थापन वर्गसमीकरण रूप खण्डों में देने से

य⁴ + ८य³ − ६६य² − ८८य + ८०

= { अय² + २(क − मा)य + ख + २अप − ना }
{ अय² + २(क + मा)य + ख + २अप + ना }

= { य² + २(२ − ४)य − ११ + २ − १ }
{ य² + २(२ + ४)य − ११ + २ + १ }

= (य² − ४य − १०) (य² + १२य − ८) = ०

इन पर से य² − ४य − १० = ० और य² + १२य − ८ = ०

तब य = २ ± √१४, और य = ६ ± √४४ ।

(२) य⁴ − १०य² − २०य − १६ = ० इसमें अव्यक्त के मान बताओ ।

१२४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$अ = १,\ क = ०,\ ख = -\frac{१०}{६} = -\frac{५}{३},\ ग = -५,\ घ = -१६$$

$$चा = अख - क^{२} = -\frac{५}{३},\ झा = अघ - ४कग + ३ख^{२} = -\frac{२३}{३}$$

$$जा = अ^{२}ग - ३अकख + २क^{३} = -५,$$

$$अ^{२}छा = अ^{२}झाचा - जा^{२} - ४चा^{३} = \frac{११५}{९} - २५ + \frac{५००}{२७} = \frac{१७०}{२७}$$

इनका उत्थापन फि के घनसमीकरण में देने से

$$४अ^{३}फि^{३} - अझाफि + छा = ४फि^{३} + \frac{२३}{३}फि + \frac{१७०}{२७} = ०$$

इसमें यदि ३फि = व तो समीकरण का रूपान्तर

$$\frac{४व^{३}}{२७} + \frac{२३}{९}व + \frac{१७०}{२७} = \frac{४व^{३} + ६९व + १७०}{२७} = ०$$

$$\therefore\ ४व^{३} + ६९व + १७० = ०$$

यहां परिच्छिन्न मूल की युक्ति से व का एक मान −२ आता है।

इस पर से $फि = \frac{व}{३} = -\frac{२}{३}$ । और $अ^{२}फि = प^{२} + चा$

अर्थात् $-\frac{२}{३} = प^{२} - \frac{५}{३}\ \therefore प^{२} = १\ \therefore प = १$ और $त = २,\ त' = -८$

इनका उत्थापन वर्गसमीकरण रूप खण्डों में देने से

$$य^{४} - १०य^{२} - २०य - १६$$

$$= (य^{२} + २य + २)(य^{२} - २य - ८) = ०$$

इन पर से य के $४, -२, -१ + \sqrt{-१}, -१ - \sqrt{-१}$ ये चार मान आते हैं।

(३) $य^{४} + प_{१}य^{३} + प_{२}य^{२} + प_{३}य + प_{४} = ०$ इसमें जानते हैं कि

$प_1^3 - ४प_1प_2 + ८प_3 = ०$ तो य के मान बताओ।

ऊपर के चतुर्घात समीकरण का रूपान्तर

$$\left\{य\left(य+\frac{प_1}{२}\right)\right\}^2 + \left(प_2 - \frac{प_1^2}{४}\right)$$

$$\left\{य\left(य+\frac{प_3}{प_2 - \frac{प_1^2}{४}}\right)\right\} + प_4 = ० \text{ यह हुआ।}$$

परन्तु $प_1^3 - ४प_1प_2 + ८प_3 = ०$

$$\therefore प_3 = \frac{प_1प_2}{२} - \frac{प_1^3}{८} = \frac{प_1}{२}\left(प_2 - \frac{प_1^2}{४}\right)$$

इसका उत्थापन चतुर्घात समीकरण के रूपान्तर में देने से

$$\left\{य\left(य+\frac{प_1}{२}\right)\right\}^2 + \left(प_2 - \frac{प_1^2}{४}\right)$$

$$\left\{य\left(य+\frac{प_1}{२}\right)\right\} + प_4 = ०$$

इसमें यदि $य\left(य+\frac{प_1}{२}\right) = व$ तो इसके उत्थापन से व का एक वर्ग समीकरण बन जाता है जिस पर से य के मान व्यक्त हो जायँगे।

(४) $य^4 + ४य^3 + ३य^2 - २य - ५ = ०$ इसमें य के मान निकालो।

इसमें $४^3 - ४ \times ४ \times ३ + ८ \times (-२) = ६४ - ४८ - १६ = ०$ इसलिये

$$य^4 + ४य^3 + ३य^2 - २य - ५ = \{य(य+२)\}^2$$

$$-\{य(य+२)\} - ५ = ०$$

अब इसमें यदि $य(य+२)=व$ तो

$$व^२-व-५=० \therefore व=\frac{१\pm\sqrt{२१}}{२}$$

और $य^२+२य=व$

$\therefore य=-१\pm\sqrt{व+१}$ ।

(५) $य^४-पय^२+गय+ग\sqrt{प}=०$ इसमें य के मान बताओ।

यहां समीकरण का रूपान्तर

$य^२(य^२-प)+ग(य+\sqrt{प})$

$=य^२(य+\sqrt{प})(य-\sqrt{प})+ग(य+\sqrt{प})$

$=(य+\sqrt{प})\{य^२(य-\sqrt{प})+ग\}=०$ ऐसा हो जाता है।

इस पर से य का एक मान $-\sqrt{प}$ और और मान घन समीकरण रूप दूसरे खण्ड से आ जायँगे।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। $य^४-६य^३+३य^२+२२य-६=०$ इसमें य के मान बताओ।

यहाँ $फि=-\frac{३}{२}$ और समीकरण का रूपान्तर

$(य^२-४य+१)(य^२-२य-६)=०$ (१२३वें प्र० का (२) प्रकार देखो)।

२। $फ(य)=य^४-८य^३-१२य^२+६०य+६३=०$ इसमें य के मान निकालो।

(१२३वें प्रक्रम के (२) प्रकार से) यहां

$४फि^३-१६५फि-४७५=०$ इस पर से फि का एक मान $=-५$

और तब फ $(य)=(य^{२}-२य-३)(य^{२}-६य-२१)$

३। फ $(य)=य^{४}-१७य^{२}-१०य-६=०$ इसमें य के मान बताओ।

(१२३वें प्र० के (२) प्रकार से)

$$४फि^{३}-\frac{२१७}{१२}फि+\frac{३१८५}{२१६}=० \text{ इसमें यदि } ६ट=फि \text{ तो}$$

$४ट^{३}-६५१ट+३१८५=०$ इसमें ट का एक मान $=७$

इसलिये फि $=\frac{७}{६}$ और तब

फ $(य)=(य^{२}+४य+२)(य^{२}-४य-३)$

४। फ $(य)=य^{४}-६य^{३}-६य^{२}+६६य-२२=०$ इसमें य के मान बताओ।

अपवर्त्तित घनसमीकरण

$$४फि^{३}-\frac{३३५}{४}फि-\frac{८६७}{८}=० \text{ ऐसा होता है}$$

इस पर से फि $=-\frac{३}{२}$ तब

फ $(य)=(य^{२}-११)(य^{२}-६य+२)$

५। फ $(य)=य^{४}-८य^{३}+२१य^{२}-२६य+१४=०$ इसके मूल निकालो।

यहां फ $(य)=(य^{२}-२य+२)(य^{२}-६य+७)$

६। $य^{४}+१२य+३=$ फ $(य)=०$ इसमें य के मान बताओ।

यहां फ $(य)=(य^{२}-य\sqrt{६}+३+\sqrt{६})(य^{२}+य\sqrt{६}+३-\sqrt{६})$

७। फ $(य)=य^{४}-८य^{३}-१२य^{२}+८४य-६३=०$ इसके मूल निकालो।

यहां फ $(य) = \{य^२ - २य(२+\sqrt{७}) + ३\sqrt{७}\}$
$\{य^२ - २य(२-\sqrt{७}) - ३\sqrt{७}\}$

८। $य^४ + ४य^३ + ३य^२ - ४४य - ८४ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

९। $य^४ - ६य^२ - ८य - ३ = ०$ इसमें य के मान बताओ।

१०। नीचे लिखे हुए समीकरणों के मूल बताओ:—

(क) $य^४ - १२य^३ + ४९य^२ - ७८य + ४० = ०$

(ख) $य^४ - २अय^३ + (अ^२ - २क^२)य^२ \times २अक^२य$
$- अ^२क^२ = ०$ (१२८वें प्र० का (३) उदाहरण देखो)

११। $य^४ + त_१य^३ + त_२य^२ + त_३य + त_४ = ०$ इसमें यदि $त_३^२ - त_१^२त_४ = ०$ तो सिद्ध करो कि दिए हुए चतुर्घात समीकरण के गुण्य गुणक रूप दो वर्गसमीकरण के खण्ड होंगे।

चतुर्घात समीकरण में दो राशिओं के वर्गान्तर में

$$\left(य^२ + \frac{प_१}{२}य + \sqrt{त_४}\right)^२$$
$$- \left\{य\left(\frac{प_१^२}{४} + २\sqrt{त_४} - प_२\right)\right\}^२$$ ऐसा होगा।

१२। $य^४ + त_२य^२ + त_३य + त_४ = ०$ इसमें यदि अव्यक्त के दो मान $अ \pm क\sqrt{-१}$ ये हों तो सिद्ध करो कि

$$६४अ^६ + ३२त_२अ^४ + (४त_२^२ - १६त_४)अ^२ - त_३^२ = ०$$

और $क^२ = अ^२ + \frac{त_२}{२} + \frac{त_३}{४अ}$

१२—समीकरण के मूलों का पृथक्करण।

१२९—पिछले अध्यायों में समीकरण के मूलों के विषय में और घन और चतुर्घात समीकरण के मूल जानने के विषय मे अनेक सिद्धान्त लिख आये हैं; अब आगे समीकरणों मे स्वरूपान्तर से अव्यक्त के आसन्न मान जानने के लिये अनेक युक्तियां लिखो जायँगी। उनके लिये पहले यह विचार करते हैं कि दो निर्दिष्ट संख्याओं के भीतर किसी दिए हुए समीकरण में अव्यक्त के कितने संभाव्य मान पड़े हैं।

१३०—फ (य) इसमें यदि य = ग ऐसा मानने से फ (ग) = ० हो तो १८वे प्रक्रम से फ (य) = ० इस समीकरण में अव्यक्त का एक मान ग होगा। अब यदि च एक ऐसी छोटी धन संभाव्य संख्या मानी जाय कि ग − च और ग + च इन दो संख्याओं के भीतर ग को छोड़ अव्यक्त का कोई और दूसरा मान न पड़ा हो तो १९वें प्रक्रम से फ (ग − च) और फ (ग + च) ये दोनों विरुद्ध चिन्ह के होंगे और इनके बीच अव्यक्त का एक ही मान ग होगा। परन्तु ११वे प्रक्रम से

$$\text{फ}\,(\text{ग}-\text{च})$$

$$=\text{फ}(\text{ग})-\text{फ}'(\text{ग})\,\text{च}+\text{फ}''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}-\text{फ}'''(\text{ग})\frac{\text{च}^{३}}{३\,!}+\cdots$$

$$=-\text{फ}'(\text{ग})\,\text{च}+\text{फ}''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}-\text{फ}'''(\text{ग})\frac{\text{च}^{३}}{३\,!}+\cdots\cdots\cdots$$

और $\text{फ}(\text{ग}+\text{च})$

$$=\text{फ}(\text{ग})+\text{फ}'(\text{ग})\,\text{च}+\text{फ}''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{२}}{१\cdot२}+\text{फ}'''(\text{ग})\,\frac{\text{च}^{३}}{३\,!}+\cdots$$

$$= फ'(ग)\, च + फ''(ग)\, \frac{च^2}{१\, २} + फ'''(ग)\, \frac{च^3}{३\,!} +$$

अब १३वें प्रक्रम से च का ऐसा छोटा मान मान सकते हैं जिसके वश फ'(ग) च यह और पदों के योग से चाहे जितना बड़ा हो, इसलिये फ(ग − च) यह − फ'(ग) च इस चिन्ह का, और फ(ग + च) यह फ'(ग)च इस चिन्ह का होगा। परन्तु दोनों में च एक ही है इसलिये ग के जिस मान में फ(य) यह शून्य के तुल्य होगा उससे अव्यवहित पूर्व य के मान में फ(य) और फ'(य) ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे और उससे अव्यवहितो-त्तर य के मान में फ(य) और फ'(य) एक चिन्ह के होंगे।

१३१—कल्पना करो कि न घात का एक फल फ(य) है और इसका प्रथमोत्पन्न, द्वितीयोत्पन्न, तृतीयोत्पन्न इत्यादि फल क्रम से $फ_१(य)$, $फ_२(य)$, $फ_३(य)$ इत्यादि हैं (१०वां प्रक्रम देखो) इनमें य के स्थान में अ को रख देने से जो

$$फ(अ),\ फ_१(अ), फ_२(अ), फ_३(अ),\ \cdots\ फ_न(अ)$$

श्रेढी होती है। इसमें जितनी व्यत्यास संख्या होती है उसमें य के स्थान में क को रख देने से

$$फ(क),\ फ_१(क), फ_२(क), फ_३(क),\ \cdots$$

इस श्रेढी की व्यत्यास संख्या घटा देने से जो शेष बचे उससे अधिक फ(य) = ० इसमें अ और क के बीच में अव्यक्त के मान नहीं हो सकते, उसके तुल्य वा उसमें कोई कम संख्या घटा देने से जो शेष बचे उसके तुल्य अव्यक्त के मान होंगे।

$$फ(य),\ फ_१(य),\ \cdots\ फ_न(य)$$

इस श्रेढी में य के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देने से किसी पद का चिन्ह नहीं बदल सकता जब तक कि य का एक मान उस पद को शून्य करने से उत्पन्न हुए समीकरण में अव्यक्त के एक मान के तुल्य होकर आगे न बढ़ेगा। (१६वां प्रक्रम देखो)

फ(य), $फ_{१}$(य), $फ_{२}$(य),·· ··· $फ_{न}$(य) इस श्रेढी में चार स्थिति होगी।

१—कल्पना करो कि जब य = ग तो फ(य) = ० और $फ_{१}$(य) यह शून्य के तुल्य नहीं होता। तब १३०वें प्रक्रम से ग के अव्यवहित पूर्व फ(य) और $फ_{१}$(य) विरुद्ध चिन्ह के और ग के अव्यवहितोत्तर फ(य) और $फ_{१}$(य) एक चिन्ह के होंगे। इसलिये य बढ़ते बढ़ते जब ग से [जो फ(य) = ० इसमें बार बार न आने वाला अव्यक्त का एक मान है] पार पहुँचेगा तब श्रेढी में एक व्यत्यास की संख्या कम हो जायगी।

२—कल्पना करो कि ग यह फ(य) = ० इसमें वह अव्यक्त मान है जो त बार आता है तब ५५वें प्रक्रम की युक्ति से य के स्थान में ग का उत्थापन देने से

फ(य), $फ_{१}$(य), $फ_{२}$(य) $फ_{त-१}$(य) ये सब शून्य के तुल्य होंगे, इसलिये ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में फ(य), $फ_{१}$(य), · $फ_{त-१}$(य), $फ_{त}$(य) ये पास पास के दो दो विरुद्ध चिन्ह के होंगे (देखो १३०वां प्रक्रम)। इसलिये इस स्थिति में त व्यत्यास होंगे और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में फ(य), $फ_{१}$(य),····· $फ_{त-१}$(य), $फ_{त}$(य) ये सब एक चिन्ह के होंगे। इसलिये पहली व्यत्यास संख्या से दूसरी व्यत्यास संख्या त तुल्य कम होगी।

३—कल्पना करो कि य = ग तो एक कोई उत्पन्न फल $फ_{त}(य)$ यह शून्य के तुल्य होता है और $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+१}(य)$ ये शून्य के तुल्य नहीं होते। तब यदि $फ_{त-१}(ग)$ और $फ_{त+१}(ग)$ ये एक ही चिन्ह के हों तो १३०वें प्रक्रम से ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में $फ_{त}(य)$ यह $फ_{त-१}(य)$ इससे अथवा $फ_{त+१}(य)$ इससे विरुद्ध चिन्ह का होने से $फ_{त-१}(य)$, $फ_{त}(य)$, $फ_{त+१}(य)$ इसमें दो व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में $फ_{त-१}(य)$ इससे अथवा $फ_{त-१}(य)$ इससे $फ_{त}(य)$ यह विरुद्ध चिन्ह का न होने से $फ_{त-१}(य)$, $फ_{त}(य)$, $फ_{त+१}(य)$ इसमें एक भी व्यत्यास न होगा, इसलिये पहले की अपेक्षा इसमें दो व्यत्यासों की कमी हुई और यदि $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+१}(य)$ ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में $फ_{त-१}(य)$, $फ_{त}(य)$, $फ_{त+१}(य)$ इसमें एक व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में भी $फ_{त-१}(य)$, $फ_{त}(य)$, $फ_{त+१}(य)$ इसमें एक ही व्यत्यास के होने से इसमें कोई व्यत्यास की हानि न हुई।

४—कल्पना करो कि य = ग तब म उत्पन्न फल

$फ_{त}(य)$, $फ_{त+१}(य)$, $फ_{त+२}(य)$, $\cdots फ_{त+म-१}(य)$, $फ_{त+म}(य)$ इनमें

पहिले—यदि म सम संख्या और $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+म}(य)$ ये एक ही चिन्ह के हों तो ग के अव्यवहित पूर्व य के मान में ऊपर के पदों में म व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में एक भी व्यत्यास न होगा और यदि $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+म}(य)$ ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ऊपर के पदों में ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म + १ व्यत्यास

होंगे और ग के अव्यवहितोत्तर य के मान में १ व्यत्यास होगा इसलिये दोनों स्थितिओं में ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में उन पदों में पहिले की अपेक्षा म व्यत्यासों की हानि हुई।

दूसरे—यदि म विषम संख्या और $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+म}(य)$ ये एक ही चिन्ह के हों तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म + १ व्यत्यास होंगे और ग के अव्यवहितोत्तर य के मान मे एक भी व्यत्यास न होगा और यदि $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+म}(य)$ ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो ग से अव्यवहित पूर्व य के मान में म व्यत्यास और ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में १ व्यत्यास होगा, इसलिये दोनों स्थितिओं में ग से अव्यवहितोत्तर य के मान में क्रम से म + १ और म − १ व्यत्यासों की हानि हुई। अर्थात् सम संख्या तुल्य व्यत्यासों की हानि हुई।

इसलिये फ(य), $फ_{१}(य)$, $फ_{२}(य)$· ····· $फ_{न}(य)$ इस श्रेढी में य के स्थान में अ के रखने से जितने व्यत्यास होंगे उनमें अ के आगे अव्यक्त के प्रति मान के पार जब य चलेगा तब एक एक व्यत्यास की हानि होती जायगी अथवा अ से आगे अव्यक्त के प्रति मान के पार सम संख्या + १ इतने व्यत्यासों की हानि होगी। इस प्रकार से ऊपर कहा हुआ सिद्धान्त उत्पन्न होता है। अङ्गरेज विद्वानों के मत से इस सिद्धान्त का प्रकाशक फोरिअर (Fourier) और फरासीस के विद्वानों के मत से इसका प्रकाशक बुडन (Budan) है।

बुडन ने इस सिद्धान्त को इस तरह से लिखा है:-

कल्पना करो कि फ(य) = ० इस समीकरण पर से एक नया समीकरण ऐसा बनाया जिसमें अव्यक्त मान फ(य) = ०

इसमे के अव्यक्त मान से अ तुल्य न्यून हों और दूसरा ऐसा समीकरण बनाया जिसमें अव्यक्त मान फ(य) = ० इसमें के अव्यक्त मान से क तुल्य न्यून हों (३७वां प्र० देखो) तो पहिले नये समीकरण में जितने व्यत्यास होंगे उसमें दूसरे नये समीकरण के व्यत्यासों को घटा देने से जो शेष बचेगा उससे अधिक अ और क के बीच फ(ग) = ० इसके अव्यक्त मान न होंगे। जहां अ से क को बड़ा माना गया है।

३७वें प्रक्रम से दोनो नये समीकरण क्रम से

$$फ(अ) + फ_1(अ)र + फ_2(अ)\frac{र^2}{1 \cdot 2} + \quad + फ_न(अ)\frac{र^न}{न!} = 0$$

$$फ(क) + फ_1(क)र + फ_2(क)\frac{र^2}{1 \cdot 2} + \cdots + फ_न(क)\frac{र^न}{न!} = 0$$

ऐसे होंगे और जिनमें वे ही व्यत्यास होंगे जो कि

$$फ(अ),\ फ_1(अ),\ फ_2(अ), \cdots \cdot फ_न(अ)$$

$$फ(क),\ फ_1(क),\ फ_2(क), \cdots \quad फ_न(क)$$

इनमें है। इसलिये बुडन के सिद्धान्त और फोरिअर के सिद्धान्त में कुछ भी भेद नहीं केवल वाक्यों में भेद है।

इस सिद्धान्त की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं:—

(१) नीचे के समीकरण में अव्यक्त के मानों की स्थिति जानना चाहिए:—

$$फ(य) = य^5 - 3य^4 - 24य^3 + 95य^2 - 46य - 101 = 0$$

इसमें $फ_1(य) = 5य^4 - 12य^3 - 72य^2 + 190य - 46$

$$फ_२(य) = २०य^३ - ३६य^२ - १४४य + १६०$$
$$फ_३(य) = ६०य^२ - ७२य - १४४$$
$$फ_४(य) = १२०य - ७२$$
$$फ_५(य) = १२०$$

इनमें व के स्थान में −१०, −१, ०, १, १० के उत्थापन से और नीचे के क्रम से केवल फ, $फ_१$, $फ_२$ इत्यादि लिखने से

	$फ_५$	$फ_४$	$फ_३$	$फ_२$	$फ_१$	फ	
(−१०)	+	−	+	−	+	−	
(−१)	+	−	−	+	−	+	
(०)	+	−	−	+	−	−	(जैसा समीकरण है)
(१)	+	+	−	+	+	−	
(१०)	+	+	+	+	+	+	

इनसे ये बातें पाई जाती हैं:—

−१० और −१ के भीतर एक संभाव्य मान है क्योंकि दोनों के व्यत्यासों का अन्तर एक है;

−१ और ० के भीतर भी एक संभाव्य मान है क्योंकि एक व्यत्यास की हानि है; ० और १ के बीच कोई संभाव्य मान नहीं है क्योंकि एक भी व्यत्यास की हानि नहीं है। १ और १० के बीच कम से कम एक संभाव्य मान है क्योंकि तीन व्यत्यासों की हानि है। यहां फोरिअर और बुडन दोनों के सिद्धान्त से यह पता नहीं लगता कि १ और १० के भीतर जो और दो मान हैं वे संभाव्य वा असंभाव्य हैं। इसलिये १ और १० के भीतर और और संख्याओं को य के स्थान में रख कर फिर एक व्यत्यास की हानि पर से संभाव्य मानों का पता

लगाना चाहिए। परन्तु इस कर्म में बड़ा प्रयास करना पड़ेगा और जहां वे दोनों मान बहुत पास पास होंगे तहां तो य के छोटे छोटे अनेक मान मानने से बहुत ही बड़ा प्रयास करना पड़ेगा।

यदि किसी युक्ति से यह पता लगा जाय कि य के दो निर्दिष्ट मानों के भीतर अव्यक्त का कोई संभाव्य मान नहीं है तो व्यत्यासों की दो दो हानि से असंभाव्य मान का पता लग सकता है। जैसे

(२) $फ(य) = य^{४} - ४य^{३} - १य + २३ = ०$

इसमें य के स्थान में ०, १, १० का उत्थापन देने से

	$फ_{४}$	$फ_{३}$	$फ_{२}$	$फ_{१}$	$फ$
(०)	+	−	०	−	+
(१)	+	०	−	−	+
(१०)	+	+	+	+	+

यहां पहले यह पता लगाना चाहिए कि य = ० में $फ_{२} = ०$ और य = १ में $फ_{३} = ०$ इन दोनों शून्यों में कौन चिन्ह समझना चाहिए। इसके लिये ० और १ के पूर्व और अनन्तर य के स्थान में बहुत ही छोटी संख्या च का उत्थापन देने से

		$फ_{४}$	$फ_{३}$	$फ_{२}$	$फ_{१}$	$फ$
(०)	−च	+	−	+	−	+
	+च	+	−	−	−	+
(१)	१−च	+	−	−	−	+
	१+च	+	+	−	−	+
(१०)		+	+	+	+	+

इस उपाय से पता लग जाता है कि जब य = ० होने से फ$_२$ = ० होता है तो य के −च मान में फ$_३$ से विरुद्ध चिन्ह का फ$_२$ होगा और जब य = +च तो फ$_३$ और फ$_२$ दोनों एक ही चिन्ह के होंगे। इसी प्रकार य के १ − च और १ + च मान में भी फ$_३$ का पता लगा सकते हो।

य के स्थान में −च और +च के रखने से दो व्यत्यासों की हानि हुई और च को ऐसा छोटा माना है कि इसके भीतर य का कोई संभाव्य मान नहीं है तो कहेंगे कि अव्यक्त का एक जोड़ा असंभव मान होगा।

१ + च और १० के भीतर अव्यक्त के दो संभाव्य मान हैं वा एक जोड़ा असंभव मान है। यहाँ पर फिर भी संशय ही रहा कि वास्तव में मान संभाव्य वा असंभाव्य है।

(३) यदि अनेक पदों के गुणक समीकरण में शून्य हों तो नीचे लिखी हुई युक्ति से असंभव मानों का पता लग सकता है। जैसे

$$य^६ - १ = ०$$

इसमें जानना है कि य के कितने असंभव मान हैं तो

$$फ(य) = य^६ - १$$

$$फ_१(य) = ६य^५$$

$$फ_२(य) = ३०य^४$$

$$फ_३(य) = १२०य^३$$

$$फ_४(य) = ३६०य^२$$

$$फ_५(य) = ७२०य$$

$$फ_६(य) = ७२०$$

य के स्थान में −च और +च का उत्थापन देने से और च को बहुत ही छोटा मानने से

	$फ_6$	$फ_5$	$फ_4$	$फ_3$	$फ_2$	$फ_1$	फ
(−च)	+	−	+	−	+	−	−
(+च)	+	+	+	+	+	+	−

यहां चार व्यत्यासों की हानि है और जानते हैं कि च ऐसा छोटा है कि −च और +च के बीच में कोई संभाव्य मान नहीं है इसलिये चार व्यत्यास के होने से इसमें चार असंभाव्य मान हुए और २२वें प्रक्रम से दो संभाव्य मान होंगे।

इस प्रकार से किसी द्वियुक्पद समीकरण में असंभाव्य और संभाव्य मानों की संख्या जान सकते हैं।

(४) $फ(य) = य^{८} + १०य^{३} + य - ४ = ०$ इसके संभाव्य और असंभाव्य मूलों की संख्या जाननी है।

यहाँ $फ\,(य) = य^{८} + १०य^{३} + य - ४ = ०$

$फ_{१}(य) = ८य^{७} + ३०य^{२} + १$

$फ_{२}(य) = ५६य^{६} + ६०य$

$फ_{३}(य) = ३३६य^{५} + ६०$

$फ_{४}(य) = १६८०य^{४}$

$फ_{५}(य) = ६७२०य^{३}$

$फ_{६}(य) = २०१६०य^{२}$

$फ_{७}(य) = ४०३२०य$

$फ_{८}(य) = ४०३२०$

यहां य के स्थान में $-$च, ०, $+$च के उत्थापन से

	$फ_८$	$फ_७$	$फ_६$	$फ_५$	$फ_४$	$फ_३$	$फ_२$	$फ_१$	फ
($-$च)	+	−	+	−	+	+	−	+	−
(०)	+	०	०	०	०	+	०	+	−
($+$च)	+	+	+	+	+	+	+	+	−

यहां $-$च और $+$च के बीच में ६ व्यत्यासों की हानि हुई और च को बहुत छोटा मानने से $-$च और $+$च इनके बीच में कोई संभाव्य मूल नहीं है इसलिये यहां ६ असंभव मूल होंगे और २२वें प्रक्रम से दो संभव मूल होंगे जिनमें एक धन और दूसरा ऋण होगा।

(५) $य^६ - ३य^२ - य + १ = ०$ इसके मूलों का पूरा पूरा पता लगाना है।

$$यहां \quad फ(य) = य^६ - ३य^२ - य + १$$

$$फ_१(य) = ६य^५ - ६य - १$$

$$फ_२(य) = ३०य^४ - ६$$

$$फ_३(य) = १२०य^३$$

$$फ_४(य) = ३६०य^२$$

$$फ_५(य) = ७२०य$$

$$फ_६(य) = ७२०$$

य के स्थान में $-$१, ०, १, २ का उत्थापन देने से

	$फ_{६}$	$फ_{५}$	$फ_{४}$	$फ_{३}$	$फ_{२}$	$फ_{१}$	फ	
(−१)	+	−	+	−	+	०	०	[(−१) य का
(०)	+	०	०	०	−	−	+	एक मान हुआ]
(१)	+	+	+	+	+	−	−	
(२)	+	+	+	+	+	+	+	
(०) −च	+	−	+	−	−	−	+	
(०) +च	+	+	+	+	−	−	+	
(−१) −१−च	+	−	+	−	+	−	+	
(−१) −१+च	+	−	+	−	+	−	−	

−१ इसके उत्थापन से फ (य) = ० इसलिये −१ यह य का एक मान हुआ। च के अत्यन्त छोटे होने से शून्य के आगे पीछे −च और +च इनके बीच संभाव्य मान नहीं है परन्तु दो व्यत्यासों की हानि है इसलिये य के दो असंभाव्य मान हैं।

+च और १ के बीच एक व्यत्यास की हानि है इसलिये +च वा शून्य और १ के बीच य का एक संभाव्य मान और है।

−१+च और −च के बीच एक व्यत्यास की हानि है इसलिये −१+च और −च के बीच में वा −१ और शून्य के बीच में य का एक संभाव्य ऋण मान और है।

१ और २ के बीच में भी एक व्यत्यास की हानि है इस-लिये १ और दो के बीच में य का एक धन संभाव्य मान हुआ।

इस प्रकार से चार संभाव्य और दो असंभाव्य मूल फ (य) = ० इसके आए। इस प्रकार प्रति समीकरणों में य के स्थान में ऐसी दो संख्याओं का उत्थापन देना चाहिए जिसमें

एक ही व्यत्यास की हानि हो तब निःसंशय उन दोनों संख्याओं के बीच य का एक मान रहेगा। यदि एक से अधिक व्यत्यासों की हानि होगी तो निःसंशय यह नहीं कह सकते कि उन दोनों संख्याओं के बीच अव्यक्त का एक ही अथवा अधिक मान है। इसी प्रकार जिन दो संख्याओं के बीच जानते हैं कि अव्यक्त का कोई संभाव्य मान नही है उनमें व्यत्यासों की हानि से असंभाव्य मानो का भी पता लगा सकते हो।

१३२—फ (य), $फ_1$(य), $फ_2$(य), ‥ ‥ $फ_न$(य) इस श्रेढी में यदि य के स्थान में शून्य का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि $प_1$, $प_2$, $प_3$,⋯ ‥$प_न$ ये ही जो फ (य) में क्रम से द्वितीय, तृतीय इत्यादि पदों के गुणक हैं होंगे जहां फ (य) मे य के सब से बड़े घात का गुणक धन रूप तुल्य है और उसी श्रेढी में यदि य के स्थान में $+\infty$ का उत्थापन दो तो १२वें प्रक्रम से सब पद धन होंगे। इसलिये $प_1$, $प_2$, $प_3$, ‥$प_न$ इसमें जितने व्यत्यास होंगे उतने ही व्यत्यासों की हानि होगी इसलिये फोरिअर के सिद्धान्त से फ (य) = ० इसमें उन व्यत्यासों की सख्या से अधिक ० और $+\infty$ के बीच अव्यक्त के धन संभाव्य मान नही हो सकते। यही बात डिकार्टिस की चिन्ह रीति से भी सिद्ध होती है (४४वां प्र० देखो)। इसलिये कह सकते हो कि फोरिअर और बुडन के सिद्धान्त के अन्तर्गत ही डिकार्टिस की चिन्ह रीति है।

१३३—फोरिअर और बुडन के सिद्धान्त से सहज में सर्वत्र पूरा पूरा समीकरण के संभाव्य मूलों का पता नही लगता जैसा कि १३१वें प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट है इसलिये अब

स्टर्म (Sturm) साहब का एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जिसके बल से निःसंशय संभाव्य मूल इत्यादि का पता लग जाता है।

१३४—फ (य) का प्रथमोत्पन्न फल फ$_1$(य) मान लो और कल्पना करो कि फ (य) = ० इसमें अव्यक्त का कोई समान मान नहीं है। इसलिये ५३वें प्रक्रम से फ (य) और फ$_1$(य) का महत्तमापवर्त्तन अव्यक्तात्मक कोई न होगा। इसलिये बीजगणित की युक्ति से यदि फ (य) और फ$_1$(य) का महत्तमापवर्त्तन निकाला जाय तो क्रिया करने से अन्त में व्यक्ताङ्क शेष बचेगा।

फ (य) और फ$_1$(य) में अव्यक्त के एकापचित घात क्रम से पदों को रख लो। जो पद न हों उनमे शून्य गुणक लगा कर ३ प्रक्रम की युक्ति से पूरा करलो।

फ (य) में जो सब से बड़ा य का न घात है उससे एक कम अर्थात् न — १ यह य का सब से बड़ा घात फ$_1$(य) में होगा।

फ (य) को भाज्य, फ$_1$(य) को हर मान कर महत्तमापवर्त्तन निकालने की युक्ति से लब्धि और शेष को निकालो। शेष के धन, ऋण चिन्ह का व्यत्यय कर फिर इसे हार और पहिले हार को भाज्य मान कर भाग देकर दूसरा शेष निकालो फिर धन ऋण चिन्ह का व्यत्यय कर इस शेष को हार मानो और पहिले हार को भाज्य, यों धन ऋण का व्यत्यय कर प्रति शेष को हार मान और उसके पहिले हार को भाज्य मान कर क्रिया करते जाओ जब अन्त में व्यक्ताङ्क शेष हो तब छोड़ दो। इस अन्तिम व्यक्ताङ्क शेष के भी चिन्ह का व्यत्यय कर अन्तिम शेष समझो।

कल्पना करो कि चिन्ह व्यत्यय किए हुए शेषों के मान क्रम से

$$फ_{२}(य), फ_{३}(य), फ_{४}(य), \cdots\cdots फ_{न}(य) \text{ ये हैं।}$$

महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से इनसे नीचे लिखे हुए समीकरण बनते हैं:—

$$\left.\begin{array}{l} गु\cdot फ(य) = ल_{१} फ_{१}(य) - म_{२} फ_{२}(य) \\ गु_{१} फ_{१}(य) = ल_{२} फ_{२}(य) - म_{३} फ_{३}(य) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ गु_{त-१} फ_{त-१}(य) = ल_{त} फ_{त}(य) - म_{त+१} फ_{त+१}(य) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ गु_{न-१} फ_{न-२}(य) = ल_{न-१} फ_{न-१}(य) - म_{न} फ_{न}(य) \end{array}\right\} \cdot (१)$$

जहां $गु, गु_{१}, गु_{२} \cdots\cdots गु_{न-२}, म_{२}, म_{३}, \cdots म_{त+१}$ ये धनात्मक व्यक्त संख्या हैं और $ल_{१}, ल_{२}, ल_{३} \cdots ल_{न-१}$ ये य के एक घात के खण्ड आ·य+का इस रूप के हैं।

(१) समीकरण से स्पष्ट है कि य के स्थान में चाहे जिस संभाव्य संख्या का उत्थापन दो परन्तु य के पास पास के दो फल एक ही काल में शून्य के तुल्य नही हो सकते क्योंकि ऐसा मानने से आगे सब शून्य होते होते $फ_{न}(य)$ जो व्यक्ताङ्क और य से स्वतन्त्र है शून्य के समान होगा जो कि असंभव है।

य के स्थान में किसी ग संख्या के उत्थापन से यदि $फ_{त}(य) = ०$ तो $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+१}(य)$ ये विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये य के स्थान में ग − च और ग + च के उत्थापन से (जहां च ऐसा छोटा है कि ग − च और ग + च के बीच बीच $फ_{त-१}(य) = ०$ और $फ_{त+१}(य) = ०$ इसके कोई मूल नहीं है) $फ_{त+१}(य)$ और $फ_{त-१}(य)$ अपने अपने चिन्ह को नहीं बदल सकते। इसलिये $फ_{त-१}(य)$ और $फ_{त+१}(य)$ यदि ग से अव्यव-

हित पूर्व और उत्तर य के मान में + और − चिन्ह के होंगे तो $फ_त(य)$ यह चाहे पूर्व में + और उत्तर में − वा पूर्व में −, उत्तर में + हो, $फ_{त-१}(य)$, $फ_त(य)$, $फ_{त+१}(य)$ इन तीनों पदों के आगे पीछे व्यत्यास की संख्या न घटेगी, न बढ़ेगी, ज्यों कि त्यों रहेगी।

यदि य = ग और $फ(य) = ०$ तो ग से अव्यवहित पूर्व और उत्तर य के मान में $फ(य)$ और $फ_१(य)$ क्रम से भिन्न चिन्ह और एक चिन्ह के होंगे। (१३० वां प्र०) इसलिये य के स्थान में अधिक अधिक संख्या का उत्थापन देने से जब य के एक मान से आगे संख्या चलेगी तब

$$फ(य), फ_१(य), फ_२(य), \cdot \qquad फ_न(य)$$

इस श्रेढी में एक व्यत्यास की हानि होगी। इस प्रकार य के प्रति एक एक मान में एक एक व्यत्यास की हानि होती चली जायगी। इसलिये य के स्थान में अ का उत्थापन देने से जो

$$फ(अ), फ_१(अ), फ_२(अ) \cdot \qquad \cdots फ_न(अ)$$

इस श्रेढी में व्यत्यास संख्या होगी और य के स्थान में अ से अधिक क का उत्थापन देने से जो

$$फ(क), फ_१(क), फ_२(क) \quad \cdots \quad फ_न(क)$$

इस श्रेढी में व्यत्यास संख्या होगी वह पहिली व्यत्यास संख्या से जितनी न्यून होगी अर्थात् इस पिछली श्रेढी में जितनी व्यत्यास हानि होगी उतने ही अ और क के बीच $फ(य) = ०$ इसके संभाव्य मूल होंगे।

१३५—व्यत्यास की संख्या के गणना करने में य के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से यदि फ₁(य), फ₂(य), ... इत्यादि में कोई शून्य हो जाय तो उसके पूर्व धन वा ऋण चिन्ह लगा देने से कोई भेद न पड़ेगा क्योंकि जो फल शून्य होगा उसके पूर्व और आगे के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये शून्य के साथ चाहे धन वा ऋण चिन्ह हो व्यत्यास की संख्या में भेद नहीं पड़ेगा।

१३६—ऊपर सिद्ध हो चुका है कि य के स्थान में चाहे जिस संभाव्य संख्या का उत्थापन दो परन्तु पास के दो फल एक ही काल में शून्य नहीं हो सकते। इसलिये य के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से यदि पास के दो छोड़ अन्य फल शून्य के तुल्य हों तो उनमें यदि फ (य) = ० तो स्पष्ट ही है कि वह सच्चा फ(य) = ० इसका एक मूल ही है। इसलिये इसके आगे फ(य), फ₁(य), ... फ$_न$(य) इस श्रेढी में एक व्यत्यास की हानि होगी। और यदि फ(य) को छोड़ और फल शून्य होंगे तो ऊपर की युक्ति से उनके आगे और पीछे के फलों में विरुद्ध चिन्ह होने से व्यत्यास की संख्या में कुछ भेद ही न पड़ेगा।

१३७—यदि फ (य), फ₁(य), फ₂(य), ... फ$_न$(य) इनमें प्रथम पद के गुणक सब धन वा सब ऋण हों तो फ (य) = ० इसमें अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे।

१३४वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि फ (य) = ० यह यदि न घात का समीकरण होगा तो स्टर्म के फल भी फ₁(य), फ₂(य)·

ये न होंगे। फ (य) = ० इसमें सर्वदा समझो कि य के सब से बड़े घात का गुणक धन संख्या है।

यदि फ (य) = ० इसमें अव्यक्त के समग्र संभाव्य मान कितने हैं यह जानना हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में पहले $-\infty$ इसका उत्थापन देने से स्टर्म की रीति से श्रेणी में जो व्यत्यास होंगे और $+\infty$ इसका उत्थापन देने से श्रेणी में जो व्यत्यास होंगे उनके अन्तर तुल्य अर्थात् य के स्थान में $+\infty$ इसका उत्थापन देने से जितने व्यत्यास की हानि होगी उतने ही फ (य) = ० इसमें अव्यक्त के संभाव्य मान होंगे। इसलिये यदि स्टर्म के सब फलों के आदि पद के गुणक धन वा सब ऋण आवें तो $-\infty$ इसके उत्थापन से श्रेणी में एक धन एक ऋण वा एक ऋण एक धन इस क्रम से पदों के होने से न व्यत्यास होंगे और $+\infty$ इसके उत्थापन से एक भी व्यत्यास न होने से न व्यत्यासों की हानि होगी। इसलिये फ (य) = ० इस न घात समीकरण में अव्यक्त के न संभाव्य मान अर्थात् सब मान संभाव्य होंगे।

१३८—यदि फ(य), फ$_{१}$(य), फ$_{२}$(य), ·· ··फ$_{न}$(य) इस श्रेढी में प्रत्येक फल के प्रथम पद के गुणक सब धन न हों तो उनको धन ऋण के क्रम से लिखने से जितने व्यत्यास होंगे उतने जोड़े फ(य) = ० इसके मूल असंभाव्य होंगे।

कल्पना करो कि फ(य), फ$_{१}$(य), फ$_{२}$(य) ·· ··· फ$_{न}$(य) इनके आदि पद को लेने से म व्यत्यास हुए तो स्पष्ट है कि उनकी संख्या न + १ होने से न − म इतने सर होंगे। इसलिये

य के स्थान में + इसके उत्थापन से म व्यत्यास और न — म सर होंगे (४३वां प्र० देखो)। इसलिये + ∞ इसके उत्थापन में व्यत्यासों की हानि न − म — म = न − २म इतनी होने से अव्यक्त के संभाव्य मान न − २म और असंभव मान न − (न — २म) = २ म होंगे, इसलिये $फ(य) = ०$ इसके म जोड़े असंभव मूल हुए।

१३९—यदि स्टर्म के सिद्धान्त में $फ_त(य)$ यह एक फल ऐसा आवे कि य के स्थान में किसी संभाव्य संख्या का उत्थापन देने से अपने चिन्ह को न बदले तो स्टर्म के सिद्धान्त में $फ_{त-१}(य)$, $फ_{त+२}(य)$,.........$फ_न(य)$ इन पदों को छोड़ कर लाघव से $फ(य)$, $फ_१(य)$, $फ_२(य)$,.........$फ_त(य)$ इतने ही पदों को लेकर विचार करो क्योंकि $फ_त(य)$ इसमें य के स्थान में किसी संभाव्य संख्या के उत्थापन से एक ही चिन्ह होने से $फ_त(य)$, $फ_{त+१}(य)$.........$फ_न(य)$ इसमें सर्वत्र एक ही व्यत्यास की संख्या होने से किसी संख्या के उत्थापन से श्रेढी में उतने ही व्यत्यासों की हानि होगी जितने व्यत्यासों की हानि $फ(य)$, $फ_१(य)$,......$फ_त(य)$ इतने ही पदों के वश से होती है। इसलिये और पदों को व्यर्थ रख परिश्रम बढ़ाना उचित नहीं।

१४०—यदि फा (य) यह ऐसा फल हो कि फ (य) = ० इसमें जितने अव्यक्त के संभाव्य मान हों य के स्थान में सभों के उत्थापन से $फ_१(य)$ और फा (य) ये दोनों एक ही चिन्ह के हों तो $फ_१(य)$ को छोड़ यदि कुछ लाघव जान पड़े तो उसके स्थान में फा (य) को लेकर पूर्व युक्ति से फ (य) और फा (य) को ले स्टर्म के सब फलों को बना सकते हो।

१४१—स्टर्म के सिद्धान्त में अभी तक तो यह माना गया था कि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त के समान मान नहीं हैं। अब कल्पना करो कि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त का एक मान अ, त वार और दूसरा मान क, थ वार है तो

$$\text{फ}(\text{य}) = (\text{य}-\text{अ})^{\text{त}} (\text{य}-\text{क})^{\text{थ}} (\text{य}-\text{ख})(\text{य}-\text{ग}) \cdots\cdots$$

$$\text{और फ}_1(\text{य}) = (\text{य}-\text{अ})^{\text{त}-1} (\text{य}-\text{क})^{\text{थ}-1} \{\text{त}(\text{य}-\text{क})(\text{य}-\text{ख})(\text{य}-\text{ग}) \cdots\cdots + \text{थ}(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{ख}) + \cdots\cdots\}$$

इसलिये फ(य) और फ$_1$(य) का महत्तमापवर्त्तन $(\text{म}-\text{अ})^{\text{त}-1} (\text{य}-\text{क})^{\text{थ}-1}$ होगा। स्टर्म की क्रिया में यहां जितने फ(व), फ$_1$(य)⋯⋯⋯इत्यादि पद होंगे सब को पृथक् पृथक् $(\text{य}-\text{अ})^{\text{त}-1} (\text{य}-\text{क})^{\text{थ}-1}$ यह निःशेष करैगा।

$$\text{अब मान लो कि फि}(\text{य}) = (\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{क})(\text{य}-\text{ख})(\text{य}-\text{ग}) \cdots$$

$$\text{और फा}(\text{य}) = \text{त}(\text{य}-\text{क})(\text{य}-\text{ख})(\text{य}-\text{ग}) \cdots\cdots + \text{थ}(\text{य}-\text{अ})(\text{य}-\text{ख})(\text{य}-\text{ग}) \cdots\cdots + \cdots\cdots$$

तो यहां स्पष्ट है कि फि(य) का प्रथमोत्पन्न फल फा(य) नहीं है परन्तु यदि त = १ = थ तो फा(य) यह अवश्य फि(य) इसका प्रत्थमोत्पन्न फल होता। यदि य = अ क, ख, ग,⋯⋯ तो फि(य) के प्रथमोत्पन्न फल का जो चिन्ह होगा वही फा(य) का भी होगा। इसलिये १४०वें प्रक्रम से फि(य) इसमें अव्यक्त के संभाव्य मान जानने के लिये फि(य) के प्रथमोत्पन्न फल के स्थान में फा(य) को रख कर स्टर्म की क्रिया कर सकते हैं।

परन्तु फ(य) और फ$_1$(य) से स्टर्म के फलों से जो श्रेणी बनेगी वह वही श्रेणी होगी जो फि(य) और फा(य)

के वश से उत्पन्न स्टर्म के प्रत्येक को फल महत्तमापवर्त्तन $(य-अ)^{त-१}$ $(य-क)^{थ-१}$ इससे गुण देने से होगी। इसलिये फि (य) और फा (य) से जो श्रेणी बनेगी उसमें के प्रत्येक पद के जो चिन्ह होंगे वही वा उनसे उलटे $(य-अ)^{त-१}$ $(य-क)^{थ-१}$ इससे गुण देने से चिन्ह होंगे। इसलिये दोनों श्रेणियों में व्यत्यास की संख्या एक ही आवेगी। इसलिये फ (य) = ० इसके समान मूल हैं वा नहीं इसका बिना विचार किए फ (य) और $फ_१$(य) से फि (य) और फा (य) को जान कर स्टर्म की युक्ति से श्रेणी बनाओ और उससे फि (य) = ० इसके जो संभाव्य मूल होंगे वही फ (य) = ० इसके भी होंगे। इस प्रकार बनाई हुई श्रेणी में अन्त का पद शून्य हो तो समझ लेना चाहिए कि फ (य) = ० इसके तुल्य मूल आवेंगे।

इस प्रकार अ और क इन दो संख्याओं के भीतर फ (य) = ० इसमें य के कितने संभाव्य मान पड़े हैं इनका पता स्टर्म के सिद्धान्त से लग जायगा। फिर अ और क के भीतर की अनेक संख्याओं के उत्थापन से यह भी जान सकते हो कि किस संख्या के बहुत ही पास कौन संभाव्य मान है। जैसे

उदाहरण—(१) फ (य) = $य^३ - २य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त के संभाव्य मानों की संख्या और स्थिति को बताओ।

यहां महत्तमापवर्त्तन और १३४वें प्रक्रम की युक्तियों से

$$फ_१(य) = ३य^२ - २$$
$$फ_२(य) = ४य + १५$$
$$फ_३(य) = -६४३$$

य के स्थान में $-\infty, ०, +\infty$ इनका उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$	$फ_3$
$(-\infty)$	−	+	−	−
(०)	−	−	+	−
$(+\infty)$	+	+	+	−

$-\infty$ इसकी अपेक्षा $+\infty$ इसमें एक व्यत्यास की हानि हुई और ० की अपेक्षा भी $+\infty$ इसमें एक ही व्यत्यास की हानि है इसलिये अव्यक्त का एक ही धन संभाव्य मान होगा।

फिर य के स्थान में क्रम से १, २, ३ का उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$	$फ_3$
(१)	−	+	+	−
(२)	−	+	+	−
(३)	+	+	+	−

इसलिये अव्यक्त का धन संभाव्य मान २ और ३ के बीच मे है।

(२) $य^3 - ७य + ७ = ०$ इसके संभाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बताओ।

यहां $फ(य) = य^3 - ७य + ७$

$फ_1(य) = ३य^2 - ७$

$फ_2(य) = २य - ३$

$फ_3(य) = १$

यहां प्रत्येक फल के आदि पद के गुणक १, ३, २ और १ धन है इसलिए १३७वें प्रक्रम से इसके सब मूल संभाव्य होंगे।

य के स्थान में −४, −३, −२, −१, १ और २ के उत्थापन से

	फ	$फ_1$	$फ_2$	$फ_3$
(−४)	−	+	−	+
(−३)	+	+	−	+
(−२)	+	+	−	+
(−१)	+	−	−	+
(१)	+	−	−	+
(२)	+	+	+	+

यहां −४ और −३ के बीच एक ऋण मूल है और १ और २ के बीच दो धन मूल हैं।

इस उदाहरण में यदि फोरिअर के सिद्धान्त को लगाओ तो उसका फ(य), $फ_1$(य) इत्यादि लेने से और य के स्थान में १ और २ का उत्थापन देने से

	फ	$फ_1$	$फ_2$	$फ_3$
(१)	+	−	+	+
(२)	+	+	+	+

यहाँ दो व्यत्यासों की हानि से फोरिअर के सिद्धान्त से यह सिद्ध होता है कि १ और २ के बीच दो से अधिक संभाव्य मूल नहीं हैं परन्तु स्टर्म के सिद्धान्त से निश्चय हो गया कि १ और २ के बीच निःसंशय अव्यक्त के दो ही मान हैं। य के स्थान में १ और २ के बीच के अनेक भिन्नों का उत्थापन देने से स्वल्पान्तर से उन दो मूलों की संख्या भी जान सकते हो।

(३) $फ(य) = य^४ - २य^३ - ३य^२ + १०य - ४ = ०$ इसके संभाव्य मूलों की संख्या और स्थिति को बताओ।

$फ_१(य)$ में २ का भाग देने से

$$फ_१(य) = २य^३ - ३य^२ - ३य + ५$$

$$फ_२(य) = ६य^२ - २७य + ११$$

$$फ_३(य) = - ८य - ३$$

$$फ_४(य) = - १४३३$$

यहां सब फलों के आदि पद के गुणकों के चिन्हों को ले लेने से

+ + − − इसमें एक व्यत्यास है इसलिये १३८ वें प्रक्रम से $फ(य) = ०$ इसका एक जोड़ा असंभाव्य मूल होगा। स्टर्म की युक्ति से य के स्थान में − ∞, ०, + ∞ इनका उत्थापन देने से वा २२वें प्रक्रम से यहां य का एक संभाव्य मान धन और एक ऋण होगा। इसलिये यहां केवल $फ(य)$ में धन और ऋण अभिन्न संख्या का उत्थापन देने से पता लगा सकते हो कि ऋण मूल −३ और −२ के भीतर और धन मूल ० और १ के भीतर है।

(४) $य^४ - ५य^३ + ६य^२ - ७य + २ = ०$ इसके मूलों की क्या दशा है।

यहाँ $फ_१(य) = ४य^३ - १५य^२ + १८य - ७$

$$फ_२(य) = य^२ - २य + १$$

$फ_१(य)$ में $फ_२(य)$ का पूरा पूरा भाग लग जाता है इसलिये अब यहां पर स्टर्म की श्रेढी को रोक दो और $फ_२(य)$ से समझ लो कि $फ(य) = ०$ इसके तुल्य मूल हैं।

य के स्थान में $-\infty$ और $+\infty$ इनका उत्थापन देने से

	फ	$फ_१$	$फ_२$
$(-\infty)$	+	−	+
$(+\infty)$	+	+	+

दो व्यात्यासों की हानि से ज्ञान पड़ा कि फ(य) = ० इसमें अव्यक्त के अतुल्य दो मान हैं जिनमें से एक तीन वार आया है।

(५) $फ(य) = २य^४ - १३य^२ + १०य - १६ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानो की विवेचना करो।

यहाँ $फ_१(य) = ४य^३ - १३य + ५$ (२ के अपवर्त्तन से)

$फ_२(य) = १३य^२ - १५य + ३८$

यहाँ $फ_२(य) = ०$ इसके असंभव मूल होने से $फ_२(य)$ यह य के किसी संभाव्य मान में सर्वदा धन ही रहेगा। इसलिये आगे स्टर्म की श्रेढी को रोक देने से (१३६वें प्रक्रम से) और य के स्थान में $-\infty$, ० और $+\infty$ इनका उत्थापन देने से

	फ	$फ_१$	$फ_२$
$(-\infty)$	+	−	+
(०)	−	+	+
$(+\infty)$	+	+	+

यहां पर अव्यक्त के दो संभाव्य मान हैं जिनमें एक ऋण और दूसरा धन है।

१४२—किसी धन अभिन्न संख्या से फ(य) को गुण कर यदि $फ_१(य)$ का भाग दें तो अव्यक्तात्मक

लब्धि अभिन्न आती है और शेष भी अभिन्न बच जाता है।

कल्पना करो कि $फ(य) = प_0 य^न + य_1 य^{न-1} + \cdots + प_न$

और इसका प्रथमोत्पन्न फल संभव रहते कोई व्यक्त धन संख्या से पूरा पूरा भाग दे देने पर $फ_1(य) = ब_0 य^{न-1} + ब_1 य^{न-2} + \cdots$ ऐसा है। $फ(य)$ और $फ_1(य)$ का महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये कल्पना करो कि एक ऐसी छोटी धन अभिन्न संख्या इ है जिससे $फ(य)$ को गुण कर यदि $फ_1(य)$ का भाग दें तो अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष दोनों अभिन्न रहते हैं।

$इ\,फ(य)$ में $फ_1(य)$ का भाग देने से मान लो कि $इ\,फ(य)$ के प्रथम पद के गुणक में $फ_1(य)$ के प्रथम पद के गुणक से भाग देने से अभिन्न व्यक्ताङ्क ल आया तो

$इप_0 = ब_0 ल$, $प_0$ और $ब_0$ का महत्तमापवर्त्तन म से भाग देनेसे

$$इप'_0 = ब'_0 ल \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

जहां $मप'_0 = प_0$ और $मब'_0 = ब_0$।

बीजगणित की साधारण रीति से $इ \cdot फ(य)$ में $लम\,फ_1(य)$ को घटा देने से शेष में य के बड़े घात का गुणक $इप_1 - लब_1$ यह होगा। इसमें भी $फ_1(य)$ के प्रथम पद के गुणक का पूरा भाग लग जाय तब लब्धि और शेष दोनों अभिन्न होंगे ऐसा कह सकते हैं।

कल्पना करो कि $इप_1 - लब_1$ में $ब_0$ का भाग देने से लब्धि $ल'$ तो

$$इप_1 - लब_1 = ब_0 ल'$$

दोनों पक्षों को $प_०$ इससे गुण देने से

$$इप_० प_१ - लप_० व_१ = प_० व_० ल'$$

वा $$इप'_० प_१ - लप'_० व_१ = प'_० व_० ल'$$

वा (१) समीकरण से

$$लव'_० प_१ - लप'_० व_१ = प'_० व_० ल'$$

$$\therefore\ ल' = \frac{ल(व'_० प_१ - प'_० व_१)}{प'_० व_०} = \frac{ल भा}{हा}$$

यदि $व'_० प_१ - प'_० व_१ = भा$, $प'_० व_० = हा$।

फिर यदि $भा = म_१ भा'$ और $हा = म_१ हा'$ जहां $म_१$ यह भा और हा का महत्तमापवर्त्तन है तब

$$ल' = ल \frac{भा'}{हा'}$$

हर का भाग देने से

$$ल' = ल \left(\frac{प_१}{प_०} - \frac{व_१}{व_०} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

अब यहां यदि $\frac{प_१}{प_०}, \frac{व_१}{व_०}$ भिन्नों के हरों के इ गुणित लघुत्तमापवर्त्य तुल्य ल कल्पना करें तो $ल'$ अभिन्न आता है। इसका उत्थापन (१) में देने से

$$इ प'_० = व'_० ल \quad \therefore\ इ = \frac{व'_०}{प'_०} ल \cdot इ_१$$

अब इस में $\frac{व'_० ल}{प'_०}$ जो दृढ़ हर हो उसके तुल्य $इ_१$ को मानने से इ का मान व्यक्त हो जायगा।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है।

फ (य) और फ$_1$(य) के आदि दो पदों को क्रम से हार और अंश कल्पना कर $\frac{प_1}{प_0}, \frac{ब_1}{ब_0}$ ऐसे दो भिन्नों को बना कर अपवर्त्तन की युक्ति से उनका लघुतम रूप कर लो तब इनके हारों का जो लघुतमापवर्त्य आवे उससे फ$_1$(य) के प्रथम पद के गुणक को गुण कर अंश और फ (य) के प्रथम पद के गुणक को हर कल्पना कर अपवर्त्तन की युक्ति से इस भिन्न का भी लघुतम रूप कर लो। इसमें जो अंश का मान आवे वही इष्टाङ्क का मान आवेगा जिससे फ (य) को गुण कर यदि फ$_1$(य) का भाग दिया जाय तो अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष दोनों अभिन्न होंगे। क्रिया करने में सर्वत्र गुणकों का संख्यात्मक धन मान ग्रहण करना चाहिए।

जैसे यदि फ (र) = र^3 + ३चा र + जा = ०

तो फ$_1$(र) = र^2 + चा (३ का भाग दे देने से)

अब फ (र) में फ$_1$(र) का भाग देने से अव्यक्तात्मक लब्धि और शेष अभिन्न होते ही हैं तो भी ऊपर की युक्ति से

$$प_0 = १, प_1 = ०, ब_0 = १, ब_1 = ०$$

$\frac{प_1}{प_0} = \frac{०}{१}, \frac{ब_1}{ब_0} = \frac{०}{१}$ इनका लघुतम रूप भी $\frac{०}{१}, \frac{०}{१}$ यही हुआ और हरों का लघुतमापवर्त्य भी १ हुआ। इसे $\frac{ब_0}{प_0} = \frac{१}{१}$ इससे गुण कर लघुतम रूप करने से अंश १ हुआ। इसलिये १ से फ (र) को गुणने से लब्धि और शेष दोनों अभिन्न आते हैं।

फिर $फ_1(र)$ से $फ(र)$ में भाग देने से शेष

$$२चा र + जा$$

इसलिये स्टर्म का $फ_2(र) = -२चा र - जा$ ।

फिर यहां ऊपर की युक्ति से

$फ_1(र) = र^2 + चा$ और $फ_2(र) = -२चा र - जा$ में $प_0 = १$, $प_1 = ०$ $ब_0 = २चा$, $ब_1 = जा$ ।

इसलिये $\frac{प_1}{प_0} = \frac{०}{१}$, $\frac{ब_1}{ब_0} = \frac{जा}{२चा}$, दोनों लघुतम भिन्नों के हारों का लघुतमापवर्त्य = २चा इसे $\frac{ब_0}{प_0} = \frac{२चा}{१}$ इससे गुण कर लघुतम रूप करने से अंश $४चा^2$ यह इष्ट का मान आया ।

इससे $फ_1(र)$ को गुण कर $फ_2(र)$ का भाग देने से, चिन्ह को उलट देने से $फ_3(र) = -(जा^2 + ४चा^3)$ ।

यहां यदि $फ(र) = ०$ इसमें यह विचार करना हो कि य के तीनों मान कब संभाव्य होंगे तो १३७वें प्रक्रम से

$$फ(र) = र^3 + ३चा र + जा$$

$$फ_1(र) = र^2 + चा$$

$$फ_2(र) = -२चा र - जा$$

$$फ_3(र) = -(जा^2 + ४चा^3)$$

इनमें प्रत्येक आदि पद के गुणकों को धनात्मक होना चाहिए इसलिये यदि चा और $जा^2 + ४चा^3$ ये दोनों ऋण संख्या हों तो $फ(र) = ०$ इसमें अव्यक्त के सब मान संभाव्य

होगे। यदि चा और जा को ११२वें प्रक्रम के घनसमीकरण के साथ तुलना करो तो यही बात ११३वे प्रक्रम से भी सिद्ध होती है। इसी प्रकार

$$\text{फ}(र) = र^४ + ६चार^२ + ४जार + अ^२झा - ३चा^२ = ०$$

इसके प्रथमोत्पन्न फल में ४ का भाग दे देने से

$$\text{फ}_१ = र^३ + ३चार + जा$$

$$र^३ + ३चार + जा \,)\, र^४ + ६चर^२ + ४जार + अ^२झा - ३चा^२$$

$$-र^४ \pm ३चार^२ \pm जार$$

$$३चार^२ + ३जार + अ^२झा - ३चा^२$$

चिन्ह बदल देने से

$$\text{फ}_२(र) = -३चार^२ - ३जार - (अ^२झा - ३चा^२)$$

१४२वें प्रक्रम की युक्ति से

$\text{फ}_१(र)$ में $प_० = १$, $प_१ = ०$, $\text{फ}_२(र)$ मे $व_० = ३चा$, $व_१ = ३जा$

इसलिये $\frac{प_१}{प_०} = \frac{०}{१}$, $\frac{व_१}{व_०} = \frac{३जा}{३चा} = \frac{जा}{चा}$। इन भिन्नों के हरों का लघुतमापवर्त्य चा हुआ। इसे $\frac{व_०}{प_०} = \frac{३चा}{१}$ इससे गुण देने से $\frac{३चा^२}{१}$ यह हुआ। इसका लघुतम रूप भी यही है इसलिये इसका अंश ३चा^{२} यह इष्ट का मान हुआ। इससे $\text{फ}_१(र)$ को गुण कर $\text{फ}_२(र)$ का भाग देने से

−३चार^{२} − ३जार − (अ^{२}झा − ३चा^{२})) ३चा^{२}र^{३} + ६चा^{३}र + ३चा^{२}जा (−चार + जा

३चा^{२}र^{३} + ३चाजार^{२} + र(अ^{२}चाझा − ३चा^{३})

− ३चाजार^{२} + (६चा^{३} + ३चा^{३} − अ^{२}चाझा)र + ३चा^{२}जा

− ३चाजार^{२} − ३जा^{२}र − अ^{२}जाझा + ३चा^{२}जा

शेष = (१२चा^{३} + ३जा^{२} − अ^{२}चाझा)र + अ^{२}जाझा

शे = {३(४चा^{३} + जा^{२} − अ^{२}चाझा) + २अ^{२}चाझा}र + अ^{२}जाझा

= (− ३अ^{४}छा + २अ^{२}चाझा)र + अ^{२}जाझा (१२२वें प्रक्रम से)

इसमें +अ^{२} का भाग देकर चिन्ह उलट देने से

फ$_{३}$(र) = −(२चाझा − ३अछा)र − जाझा (१४२वें प्रक्रम की युक्ति से) फ$_{२}$(र) में प$_{०}$ = ३चा, प$_{१}$ = ३जा; फ$_{३}$(र) में ब$_{०}$ = २चाझा − ३अछा, ब$_{१}$ = जाझा, $\frac{\text{प}_{१}}{\text{प}_{०}} = \frac{\text{जा}}{\text{चा}}$, $\frac{\text{ब}_{१}}{\text{ब}_{०}} = \frac{\text{जाझा}}{\text{२चाझा − ३अछा}}$

इनके लघुत्तम रूप के हरों का लघुतमापवर्त्य चा(२चाझा − ३अछा) इसे $\frac{\text{ब}_{०}}{\text{प}_{०}} = \frac{\text{२चाझा − ३अछा}}{\text{३चा}}$ इससे गुण देने से

भिन्न $\frac{(\text{२चाझा − ३अछा})^{२}}{\text{३}}$ इसका लघुत्तम रूप भी यही हुआ। इसलिये इसका अंश (२चाझा − ३अछा)^{२} यही इष्ट का मान हुआ।

इससे फ$_{२}$(र) को गुणा कर फ$_{३}$(र) का भाग देने से

$$शेष = ३जा^२चाझा^२ + ३जा^२झा(२चाझा - ३अछा)$$
$$- (अ^२झा - ३चा^२)(२चाझा - ३अछा)(२चाझा - ३अछा)$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + (२चाझा - ३अछा)(३जा^२झा - २अ^२चाझा^२$$
$$+ ३अ^३छाझा + ६चा^३झा - ९अचा^२छा)$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + (२चाझा - ३अछा)\{३झा(जा^२ + अ^३छा)$$
$$- २अ^२चाझा^२ + ६चा^३झा - ९अचा^२छा\}$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + (२चाझा - ३अछा)\{३झा(अ^२चाझा - ४चा^३)$$
$$- २अ^२चाझा^२ + ६चा^३झा - ९अचा^२छा\}$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + (२चाझा - ३अछा)(३अ^२चाझा^२$$
$$- १२चा^३झा - २अ^२चाझा^२ + ६चा^३झा - ९अचा^२छा)$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + (२चाझा - ३अछा)(अ^२चाझा^२$$
$$- ६चा^३झा - ९अचा^२छा)$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + २अ^२चा^२झा^३ - १२चा^४झा^२$$
$$- १८अचा^३छाझा - ३अ^३चाछाझा^२ + १८अचा^३छाझा$$
$$+ २७अ^२चा^२छा^२$$
$$= -३चाजा^२झा^२ + २अ^२चा^२झा^३ - १२चा^४झा^२$$
$$- ३अ^३चाछाझा^२ + २७अ^२चा^२छा^२$$
$$= २अ^२चा^२झा^३ - ३चाझा^२(जा^२ + ४चा^३ + अ^३छा)$$
$$+ २७अ^२चा^२छा^२$$
$$= २अ^२चा^२झा^३ - ३अ^२चा^२झा^३ + २७अ^२चा^२छा^२$$
$$= -अ^२चा^२झा^३ + २७अ^२चा^२छा^२$$

इसमें $अ^२चा^२$ का भाग देने से और चिन्ह को बदल देने से

$$फ_४(र) = झा^३ - २७छा^२$$ (१२२ वां प्र० देखो)

अब यदि चतुर्घातसमीकरण में अव्यक्त के सब मान संभाव्य होंगे तो

$$\text{फ}(\text{र}) = \text{र}^{४} + ६\text{चार}^{२} + ४\text{जार} + \text{अ}^{२}\text{भा} - ३\text{चा}^{२}\ ।$$

$$\text{फ}_{१}(\text{र}) = \text{र}^{३} + ३\text{चार} + \text{जा}\ ।$$

$$\text{फ}_{२}(\text{र}) = -३\text{चार}^{२} - ३\text{जार} - (\text{अ}^{२}\text{भा} - ३\text{चा}^{२})\ ।$$

$$\text{फ}_{३}(\text{र}) = -(२\text{चाभा} - ३\text{अछा})\text{र} - \text{जाभा}\ ।$$

$$\text{फ}_{४}(\text{र}) = \text{भा}^{३} - २७\text{छा}^{२}$$

इनमें के आदि पद १३७वें प्रक्रम से धन होंगे। इसलिये यदि चा, २चाभा − ३अछा ऋण और भा³ − २७छा² धन हो तो सब मान संभाव्य होंगे।

१४३—फ(य) और इसके प्रथमोत्पन्न फल फ₁(य) से महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से स्टर्म साहब के फलों के निकालने में बहुत प्रयास करना पड़ता है, इसलिये लाघव से फलों को निकालने के लिये एक युक्ति दिखलाते हैंः—

कल्पना करो कि $\text{फ}(\text{य}) = \text{प}_{०}\text{य}^{\text{न}} + \text{प}_{१}\text{य}^{\text{न}-१} + \text{प}_{२}\text{य}^{\text{न}-१} + \cdots\cdots + \text{प}_{\text{त}}\text{य}^{\text{न}-\text{त}} + \cdots\cdots + \text{प}^{\text{न}}$ और इसका प्रथमोत्पन्न फल $\text{फ}_{१}(\text{य}) = \text{व}_{१}\text{य}^{\text{न}-१} + \text{व}_{२}\text{य}^{\text{न}-२} + \cdots\cdots + \text{व}_{\text{त}}\text{य}^{\text{न}-\text{त}} + \cdots + \text{व}_{\text{न}}$

$\text{फ}(\text{य})$ को $\text{व}_{१}^{२}$ से गुण कर $\text{फ}_{१}(\text{य})$ का भाग देने से

$$\text{शेष} = \{\text{व}_{२}(-\text{व}_{१}\text{प}_{१} + \text{प}_{०}\text{व}_{२}) + \text{व}_{१}^{२}\text{प}_{२} - \text{व}_{१}\text{प}_{०}\text{व}_{३}\}\text{य}^{\text{न}-२}$$

$$+ \{\text{व}_{३}(-\text{व}_{१}\text{प}_{१} + \text{प}_{०}\text{व}_{२}) + \text{व}_{१}^{२}\text{प}_{३} - \text{व}_{१}\text{प}_{०}\text{व}_{४}\}\text{य}^{\text{न}-३}$$

$$+ \{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}\cdots\cdots$$

$$+ \{\text{व}_{\text{त}}(-\text{व}_{१}\text{प}_{१} + \text{प}_{०}\text{व}_{२}) + \text{व}_{१}^{२}\text{प}_{\text{त}} - \text{व}_{१}\text{प}_{०}\text{व}_{\text{त}+१}\}\text{य}^{\text{न}-\text{त}}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

चिन्ह को बदल देने से स्टर्म का पहला शेष

$$फ_2(य) = \{ब_2(ब_1प_1 - प_0ब_2) + ब_1प_0ब_3 - ब^2प_2\}य^{न-2}$$
$$+ \{ब_3(ब_1प_1 - प_0ब_2) + ब_1प_0ब_4 - ब^2प_3\}य^{न-3}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \{ब_त(ब_1प_1 - प_0ब_2) + ब_1प_0ब_{त+1} - ब^2प_त\}य^{न-त}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है:—

फ(य) और फ₁(य) राशि में य के एकापचित घात क्रम से ३ प्रक्रम की युक्ति से सब पदों को बना लो।

फ₁(य) के प्रथम पद के गुणक से फ(य) के द्वितीय पद के गुणक को गुण कर उसमें फ(य) के प्रथम पद के गुणक से गुणित फ₁(य) के द्वितीय पद का गुणक घटा कर शेष संख्या को पहली संख्या समझो। फ(य) और फ₁(य) के प्रथम पद के गुणकों का घात दूसरी संख्या और फ₁(य) के प्रथम पद के गुणक का वर्ग तीसरी संख्या समझो। तीनों संख्याओं में यदि संभव हो तो समान ही धन संख्या का अपवर्त्तन देकर और तीसरे का चिन्ह बदल कर क्रम से पहिला, दूसरा और तीसरा स्थिर गुणक समझो।

फ₁(य) के द्वितीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को पहिले स्थिर गुणक से गुण कर एक पंक्ति में रक्खो। इसके नीचे एक के नीचे एक इस क्रम से फ₁(य) के तृतीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को दूसरे स्थिर गुणक से गुण कर रक्खो। इसके नीचे एक के नीचे एक इस क्रम से फ(य)

के तृतीय पद के आरंभ से सब पदों के गुणकों को तीसरे स्थिर गुणक से गुण कर रक्खो। इस प्रकार ऊर्ध्वाधर पंक्ति में जो जो संख्या होंगी उनको जोड़ लेने से और संभव रहते किसी समान धन संख्या का अपवर्त्तन दे देने से ये सब क्रम से $फ_२(य)$ के सब पदों के गुणक आ जायँगे। इनमें $य^{न-२}$, $य^{न-३}$ इत्यादि लगा देने से $फ_२(य)$ का मान निकल आवेगा। $फ(य)$ और $फ_१(य)$ इनके स्थान में $फ_१(य)$ और $फ_२(य)$ को लेने से ऊपर ही की युक्ति से $फ_३(य)$ निकल आवेगा फिर $फ_२(य)$ और $फ_३(य)$ को लेने से $फ_४(य)$ आवेगा। इस प्रकार सब आ जायँगे। जैसे

उदाहरण—(१) $फ(य) = य^६ - ७य^५ + १५य^४ - ४०य^२ + ४८य - १६$

इसमें $फ_१(य) = ६य^५ - ३५य^४ + ६०य^३ - ८०य + ४८$

$फ(य)$ और $फ_१(य)$ को पूरा करने से क्रम से दोनों के गुणक

+ १, − ७, + १५, ०, − ४०, + ४८, − १६

+ ६, − ३५ + ६०, ०, − ८० + ४८

पहिली संख्या $= ६ \times -७ - १ \times -३५ = -७$

दूसरी " $= १ \times ६ \qquad = ६$

तीसरी " $= ६ \times ६ \qquad = ३६$

इन तीनों में किसी धन संख्या का अपवर्त्तन न लगने से प्रथम स्थिर गुणक = − ७, दूसरा = ६, तीसरा = − ३६।

क्रम से स्थिर गुणकों से गुणित $फ_१(य)$ के द्वितीय पदादि, तथा तृतीय पदादि गुणक और $फ(य)$ के तृतीय पदादि गुणक क्रम से

− ७ × = + २४५, − ४२०, ०, + ५६०, − ३३६

६ × = + ३६०, ०, − ४८०, + २८८

− ३६ × = − ५४०, ०, + १४४०, − १७२८, + ५७६

योग = + ६५, − ४२० + ९६०, − ८८० + २४०

१३, − ८४, + १९२, + १७६, + ४८,

५ के अपवर्त्तन से

इसलिये $फ_२(य) =$

$$१३य^४ − ८४य^३ + १९२य^२ − १७६य + ४८$$

इसी प्रकार $फ_१(य)$ और $फ_२(य)$ को लेने से

प्रथम संख्या = १३ × − ३५ − ६ × − ८४ = ४९

दूसरी " = १३ × ६ = ७८

तीसरी " = १३ × १३ = १६९

अपवर्त्तन न लगने से प्रथम गुणक = ४९, दूसरा = ७८, तीसरा = १६९ ।

४९ × = − ४११६, + ९४०८, − ८६२४, + २३५२

७८ × = + १४९७६, − १३७२८, + ३७४४

− १६९ × = − १०१४०, ०, + १३५२०, − ८११२

योग = + ७२०, − ४३२०, + ८६४०, − ५७६०

७२० कें अपवर्त्तन से और य के घातों को लगा देने से

$$फ_३(य) = य^३ − ६य^२ + १२य − ८ = (य − २)^३$$

इसी प्रकार आगे भी सब निकाल सकते हो ।

(२) $फ(य) = य^४ − ६य^३ + ५य^२ + १४य − ४ = ०$

यहां फ(य) का प्रथमोत्पन्न फल

$फ_1(य) = ४य^3 - १८य^2 + १०य + १४$

२ के अपवर्त्तन से

$फ_1(य) = २य^3 - ६य^2 + ५य + ७$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{प्रथम संख्या} & = २ \times -६ - १ \times -६ = & -३ \\ \text{दूसरी } " & = २ \times १ = & २ \\ \text{तीसरी } " & = २ \times २ = & ४ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{प्र. गु} = -३ \\ \text{द्वि. गु} = २ \\ \text{तृ. गु} = -४ \end{array}$$

$-३ \times \ = +२७, -१५, -२१$

$२ \times \ = +१०, +१४$

$-४ \times \ = -२०, -५६ + १६$

$\text{योग} \ = +१७, -५७, -५$

किसी धन संख्या का अपवर्त्तन न लगने से और य के घात लगा देने से

$फ_2(य) = १७य^2 - ५७य - ५$

फिर $फ_1(य)$ और $फ_2(य)$ को लेने से

$$\left.\begin{array}{lll} \text{प्र. सं.} & = १७ \times -६ - २ \times -५७ = & -३६ \\ \text{द्वि. सं.} & = २ \times १७ = & ३४ \\ \text{तृ. सं.} & = १७ \times १७ = & २८९ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{प्र. गु} = -३६ \\ \text{द्वि. गु} = ३४ \\ \text{तृ. गु} = -२८९ \end{array}$$

$-३६ \times = +२२२३, १९५$

$३४ \times = -१७०$

$-२८९ \times = -१४४५, -२०२३$

$\text{योग} \ = +६०८, -१८२८$

४ का अपवर्त्तन दे देने से और य का घात लगा देने से

$$फ_१(य) = १५२य - ४५७$$

फिर $फ_२(य)$ और $फ_१(य)$ को लेने से

$$फ_२(य) = १७य^२ - ५७य - ५$$

$$फ_१(य) = १५२य - ४५७$$

$$प्र\ सं. = १५२ \times -५७ - १७ \times -४५७ = -८९५$$

$फ_१(य)$ में तीसरे इत्यादि पदों के न होने से दूसरी संख्या का कुछ प्रयोजन नहीं और

तीसरी संख्या $= १५२ \times १५२$

इसलिये $प्र\ गु = -८९५$

$$तृ.\ गु = -१५२ \times १५२$$

दोनों गुणक ऋण हुए इसलिये

$$फ_०(य) = -८९५ \times -४५७ + (-१५२ \times १५२ \times -५)$$

$$= ८९५ \times ४५७ + १५२ \times १५२ \times ५$$

अर्थात् $फ_०(य)$ का मान धन हुआ।

ऐसे स्थानों में गुणन करने का परिश्रम बचाने के लिये केवल गुणन के सांकेतिक चिन्ह से इतना समझ लेना चाहिए कि अन्त में जो फल य से स्वतन्त्र आता है अर्थात् व्यक्त संख्यात्मक है वह धन है वा ऋण।

यहां प्रथम संख्या का भी संख्यात्मक मान निकालने का कुछ प्रयोजन नहीं केवल अटकल से मालूम पड़ जाता है कि वह प्रथम संख्या ऋण होगी इसलिये प्रथम गुणक भी ऋण

होगा। इसलिये $फ_४(य)$ का प्रथम खण्ड धन और दूसरा भी धन होने से $फ_४(य)$ का मान धन व्यक्त संख्या होगी। इस प्रकार से स्टर्म के शेषों के निकालने में बहुत ही लाघव है। मेरी समझ में जितने परिश्रम से महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से स्टर्म के शेष निकलेंगे उसके आधे परिश्रम में मेरी युक्ति से निकलेंगे और महत्तमापवर्त्तन की युक्ति से क्रिया जितने स्थान को व्याप्त करेगी उससे आधे ही स्थान में मेरी युक्ति से क्रिया पूरी हो जायगी। बुद्धिमानों को चाहिए कि इस पर विशेष ध्यान दें।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $य^४ + ३य^३ + ७य^२ + १०य + १ = ०$ स्टर्म की युक्ति से इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य मूल (−२, −१) और (−१, ०) इनके बीच में हैं और दो असंभाव्य मूल होंगे।

२। $य^४ - ४य^३ - ३य + २३ = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य और दो असंभाव्य मूल होंगे। एक संभाव्य २,३ और दूसरा ३,४ के बीच में होगा।

३। $य^५ + २य^४ + य^३ - ४य^२ - ३य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

इसमें अव्यक्त का एक ही संभाव्य मान होगा।

४। $य^४ - २य^३ - ७य^२ + १०य + १० = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो।

इसके सब मूल संभाव्य हैं और −३ और ३ के बीच में हैं।

५ । $य^{५} + ३य^{४} + २य^{३} - ३य^{२} - २य - २ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो ।

यहां एक ही संभाव्य मान है जो १ और २ के बीच में है ।

६ । $य^{३} + ११य^{२} - १०२य + १८१ = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो ।

यहां तीनों मूल संभाव्य हैं । दो मूल ३·२ और ३·३ के बीच होने से बहुत ही पास पास हैं । इसलिये उनके सीमाओं को अलगाने में बहुत प्रयास करने की आवश्यकता है ।

७ । $य^{५} + य^{४} + य^{३} - २य^{२} + २य - १ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो ।

यहां एक ही संभाव्य मान ० और १ के बीच में है ।

८ । $य^{४} - ६य^{३} + ५य^{२} + १४य - ४ = ०$ इसके मूलों की विवेचना करो ।

यहां सब मूल संभाव्य हैं । एक −२ और −१ के बीच, एक ० और १ के बीच, दो ३ और ४ के बीच हैं ।

९ । सिद्ध करो कि न्यूटन की प्रधान धन सीमा जानने की युक्ति फोरिअर के सिद्धान्त के अन्तर्गत ही है (६३वां प्रक्रम देखो)

१० । $य^{६} - ६य^{५} - ३०य^{२} + १२य - ९ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो ।

यहां केवल दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से −२ और −१, और ६ और ७ के बीच में हैं ।

११ । $२य^{६} - १८य^{५} + ६०य^{४} - १२०य^{३} - ३०य^{२} + १८य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो ।

यहां केवल दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से −१ और ०, और ५ और ६ के बीच में हैं।

१२। $२य^३ + १५य^२ - ८४य - १६० = ०$ इसके मूलों की परीक्षा करो।

यहां सब संभाव्य मूल हैं। एक −∞ और −७ के बीच और दो −७ और ६ के बीच हैं।

१३। $३य^४ - ६य^२ - ८य - ३ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों की विवेचना करो।

यहां दो संभाव्य मान हैं जो क्रम से −१ और ०, और १ और २ के बीच में हैं। यहां $फ_२(य) = (य+१)^२$ ऐसा होगा, इसलिये स्टर्म की युक्ति से $फ_२(य)$ ही तक फलों को लेकर मानों की विवेचना करो। (१३९ वां प्र० देखो)।

१४। नीचे लिखे हुए समीकरणों में स्टर्म के सिद्धान्त से दिखलाओ कि अव्यक्त का एक ही संभाव्य मान हैः—

(१) $य^३ + ६य^२ + १०य - १ = ०$

(२) $य^३ - ६य^२ + ८य + ४० = ०$

(३) $य^३ - ४य + ४० = ०$

(४) $य^३ + २य^२ - ३य - १० = ०$

१५। सिद्ध करो कि "को राशिर्द्विशतीक्षुण्णो राशिवर्गयुतो हतः" इत्यादि भास्कराचार्य के चतुर्घात समीकरण में जो

$फ(य) = य^४ - २य^२ - ४००य - ९९९९ = ०$ यह सिद्ध होता है इसमें अव्यक्त के दो ही संभाव्य मान होते हैं जिनके क्रम से मान ११ और −९ है।

१६। $य^{४} - ११य^{३} + ६६य^{२} - ७०य - ४२ = ०$ इसके मूलों को बुडन की रीति से अलगाओ।

उ० मूल, (−१,०), (२,३), (४,५) और (६,१०)
इनके बीच में सब संभाव्य हैं।

१७। स्टर्म की रीति से किसी चतुर्घात समीकरण के उत्पन्न सब फलों के आदि पदों के चिन्ह + + − + − ऐसा नहीं हो सकते यह सिद्ध करो।

१८। यदि किसी चतुर्घात समीकरण में चा और भा दोनों धन हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त के सब मान असंभाव्य होंगे (१४२वें प्रक्रम के चतुर्घात समीकरण के उदाहरण से और १२२वें प्रक्रम से चा, जा इत्यादि के मानों से सिद्ध होगा कि स्टर्म के फलों के आदि चिन्ह + + − + + वा + + − − + ऐसे होंगे)।

१३—आसन्नमानानयन

१४४—फ (य) = ० इसमें स्वल्पान्तर से य का जो मान आता है उसे अव्यक्त का आसन्न मान कहते हैं। ये आसन्न मान संभाव्य सख्यात्मक ही जाने जा सकते हैं।

भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञों ने $य^{२} = अ$ इस समीकरण में य का आसन्न मान इस प्रकार से निकाला है:—

कल्पना करो कि अ का मूल म् से बड़ा और म्+१ से छोटा है तो स्पष्ट है कि य का मान म् से बड़ा और म्+१ से छोटा होगा। मान लो कि य = म्+र जहां र रूा से अल्प है तो

$$य^२ = (मू + र)^२ = मू^२ + २मू·र + र^२ = अ$$

$$\therefore \; २मू र + र^२ = अ - मू^२ = शे$$

दोनों पक्षों में $र^२$ के जोड़ने से

$$२मूर + २र^२ = शे + र^२$$

$$\therefore \; र = \frac{शे + र^२}{२मू + २र} = \frac{शे + १ + र^२ - १}{२मू + २ + २र - २} = \frac{शे + १ - (१ - र^२)}{२मू + २ - २(१ - र)}$$

$$= \frac{शे + १}{२मू + २} + \frac{शे + १ - (१ - र^२)}{२मू + २ - २(१ - र)} - \frac{शे + १}{२मू + २}$$

$$= \frac{शे + १}{२मू + २} + \frac{(१ - र)\left\{\frac{शे - मू}{(मू + १)^२} - \frac{र}{मू + १}\right\}}{२\left(\frac{मू + र}{मू + १}\right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(मू + १)} + \frac{(१ - र)\left\{\frac{अ + मू^२ - मू}{(मू + १)^२} - \frac{र}{मू + १}\right\}}{२\left(\frac{मू + र}{मू + १}\right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(मू + १)} + \frac{(१ - र)\left\{\frac{अ}{(मू + १)^२} - \frac{मू + र}{मू + १}\right\}}{२\left(\frac{मू + र}{मू + १}\right)}$$

$$= \frac{शे + १}{२(मू + १)} + \frac{(१ - र)}{२}\left\{\frac{अ}{(मू + १)(मू + र)} - १\right\}$$

दूसरे खण्ड का मान सब से अधिक होगा जब $र = ०$

तब दूसरा खण्ड $= \frac{१}{२}\left(\frac{अ}{मू^२ + मू} - १\right) = \frac{१}{२}\left(\frac{अ - मू^२ - मू}{मू^२ + मू}\right)$

$$= \frac{शे - मू}{२मू(मू + १)}$$

इसमें यदि शेष का महत्तम मान जो कि २मू तुल्य होता है मान लो तो दूसरे खण्ड का महत्तम मान $= \frac{१}{२(मू + १)}$ यह रूपाल्य होता है। इसे प्राचीनों ने छोड़ दिया है। इसलिये स्वल्पान्तर से र का मान $\frac{शे + १}{२(मू + १)}$ यह हुआ और तब $य = \sqrt{अ} = मू + \frac{शे + १}{२मू + २}$। दूसरे खण्ड को नीची जाति बनाने के लिये ६० से गुण देने से $य = मू + \frac{६०(शे + १)}{२मू + २}$।

इस पर प्राचीनों का यह सूत्र है:—

'मूलावशेषकं सैकं षष्टिघ्नं विकलान्वितम्।
द्विगुणेन द्वियुक्तेन मूलेनाप्तं स्फुटं भवेत्॥'

यह सूत्र परम्परा से सब करणग्रन्थों में प्रसिद्ध है।

जिस संख्या का निरवयव मूल नहीं मिलता उसके सूक्ष्म मूलानयन के लिये कमलाकर इत्यादिकों ने पहले उस संख्या को साठ के वर्ग से गुण कर तब ऊपर की युक्ति से मूल लेकर मूल में साठ का भाग दे दिया है। उन लोगों का यह सूत्र है—

'षष्टिवर्गगुणादङ्कान्मूलं ग्राह्यं यादृगतम्।
सैकशेषं षष्टिगुणं द्वियुक्-द्विघ्नपदोद्धृतम्॥'

कमलाकर ने अपने स्पष्टाधिकार में ज्या पर से पञ्चमांश ज्या के साधन के लिये यह विधि लिखा है कि समीकरण में अव्यक्त के एक घात को एक तरफ और और अव्यक्त के घात और व्यक्ताङ्क को दूसरी तरफ ले जाकर अव्यक्त के एक घात के गुणक से दूसरे पक्ष में भाग देकर अव्यक्त का अव्यक्तात्मक मान जान लो। अब इस मान में अटकल से जो व्यक्त, अव्यक्त का आसन्न मान आवे उसका उत्थापन देकर दूसरा आसन्न मान निकालो फिर इसके उत्थापन से तीसरा मान निकालो; यों बार बार क्रिया करने से एक ही मान आने लगे तब उसी को अव्यक्त का सूक्ष्म आसन्न मान कहो। जैसे

उदाहरण—(१) $य^{३} - २य - ५ = ०$ इसमें अव्यक्त का मान जानना है।

ऊपर की क्रिया से अव्यक्त के एक घात को एक ओर ले जाने से

$$२य = य^{३} - ५ \quad \therefore \quad य = \frac{य^{३} - ५}{२}$$

इसमें पहले $य = २$ ऐसा मानने से $य$ का दूसरा आसन्न मान

$य = \frac{य^{३} - ५}{२} = \frac{८ - ५}{२} = \frac{३}{२}$ । $य$ के स्थान में फिर इसका उत्थापन देने से

$$य = \frac{\left(\frac{३}{२}\right)^{३} - ५}{२} = \frac{२७ - ४०}{८ \times २} = -\frac{१३}{१६}$$

इस प्रकार से आसन्न मान आते जाँयगे परन्तु यहां यह कुछ नियम नहीं कि उत्तरोत्तर सूक्ष्म आसन्न मान ही आता जायगा, हां यदि $य$ के वास्तव मान के बहुत ही पास वाली

संख्या का उत्थापन य के स्थान में दिया जाय तो इनके मत से आसन्न मान आ सकता है।

इसी उदाहरण में ऊपर मूलानयन की युक्ति से पहिले यह समझ लिया कि

$फ(य) = य^३ - २य - ५ = -१$ यदि $य = २$, और $फ(य) = +१६$ यदि $य = ३$। इसलिये चिन्ह के व्यत्यास से जान पड़ा कि २ और ३ के भीतर य का एक मान है। कल्पना करो कि $य = २ + च$ तो

$$फ(२+च) = फ(२) + फ'(२)च + फ''(२)\frac{च^२}{१\cdot२} + फ'''(२)\frac{च^३}{३!}$$

परन्तु $फ(य) = य^३ - २य - ५ \quad \therefore फ(२) = -१$

$फ'(य) = ३य^२ - २ \quad \therefore फ'(२) = १०$

$फ''(य) = ६य \quad \therefore फ''(२) = १२$

$फ'''(य) = ६ \quad \therefore फ'''(२) = ६$

इसलिये

$$फ(२+च) = -१ + १०च + \frac{१२च^२}{२} + \frac{६च^३}{६}$$

$$= च^३ + ६च^२ + १०च - १ = ०$$

अब कमलाकर की युक्ति से

$$च = \frac{१ - ६च^२ - च^३}{१०}$$

अब इसमें स्पष्ट है कि च सर्वदा रूपाल्प है; इसलिये पहिले च के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से $च = \frac{१}{१०}$। अब च के स्थान में $\frac{१}{१०}$ के उत्थापन से तीसरा च का आसन्न मान

$$= \frac{१ - \frac{९}{१००} - \frac{१}{१०००}}{१०} = \frac{१००० - ९० - १}{१००००} = \frac{९१९}{१००००}$$

फिर इसके उत्थापन से उत्तरोत्तर च के अनेक मान आवेंगे। इनसे य के आसन्न मान $= २ + च$

$$२ + ०, २\frac{१}{१०}, २\frac{९१९}{१००००}, \cdots\cdots \text{इत्यादि आवेंगे।}$$

इससे सिद्ध होता है कि जहां अव्यक्त का मान रूपाल्प होगा वहाँ कमलाकर की युक्ति से उत्तरोत्तर आसन्न मान सूक्ष्म होंगे।

ऊपर २ के स्थान में यदि ग रक्खें तो

$$फ(ग + च) = फ(ग) + फ'(ग)च + फ''(ग)\frac{च^२}{१.२} + \cdots\cdots = ०$$

$$\text{इसलिये } च = \frac{-फ(ग) - फ''(ग)\frac{च^२}{२} - \cdots\cdots}{फ'(ग)}$$

इसमें यदि पहिले च के स्थान में शून्य का उत्थापन दो तो

$$च = -\frac{फ(ग)}{फ'(ग)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{इसलिये } य = ग + च = ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}।$$

ग के स्थान में $ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = ग_१$, इसके उत्थापन से (१) समीकरण से च का दूसरा मान निकलेगा जिसे

$ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = ग_१$, इसमें जोड़ देने से य का दूसरा आसन्न मान आवेगा। यों बार बार क्रिया करने से (१) से य का बहुत ही सूक्ष्म मान आ जायगा।

(१) समीकरण से जो आसन्नमान ले आने की युक्ति उत्पन्न होती है उसे न्यूटन सहाब ने निकाला है इसलिये इसे आसन्नमान जानने के लिये न्यूटन की रीति कहते हैं।

ऊपर जो $य^३ - २य - ५ = ०$ यह उदाहरण दिखाया है इसी उदाहरण को न्यूटन ने भी ग्रहण कर अपनी रीति को दिखलाया है।

यदि ध्यान से देखो तो कमलाकर ही की रीति का विशद रूपान्तर न्यूटन की रीति है।

१४५—न्यूटन की रीति से जो बार बार आसन्नमान आता वह उत्तरोत्तर सूक्ष्म होता है वा नहीं यह उनकी रीति से स्पष्ट नहीं होता। इसके लिये फोरिअर ने यह रीति निकाली है—

कल्पना करो कि $फ(य) = ०$ इस समीकरण में अ और क के बीच एक ही अव्यक्त का मान पड़ा है और $फ'(य) = ०$, $फ''(य) = ०$ इनके अ और क के बीच कोई अव्यक्त मान नहीं है तो न्यूटन की रीति से उत्तरोत्तर सूक्ष्म आसन्नमान आते जायँगे यदि क्रिया का आरम्भ अ और क की भीतर की संख्या से की जायगी जिन दोनों संख्याओं के भीतर य के स्थान में किसी संख्या का उत्थापन देने से $फ(य)$ और $फ''(य)$ दोनों एक चिन्ह के होंगे।

ऊपर की कल्पना से स्पष्ट है कि अ और क के बीच य के मान में फ(य) एक बेर चिन्ह बदलेगा परन्तु फ'(य) और फ''(य) दोनों एक ही चिन्ह के रहेंगे। यहां यह समझ लेना चाहिए कि क − अ यह कोई धन संख्या है।

१४६—ऊपर की युक्ति से सिद्धि के लिये पहिले कल्पना करो कि $फा(य) = फ(य) - फ(अ) - \frac{य - अ}{क - अ}\{फ(क) - फ(अ)\}$

यह एक समीकरण है। इसमें यदि य = अ वा य = क तो स्पष्ट है कि फा(य) = ० होता है इसलिये ६८वें प्रक्रम की युक्ति से फा(य) = ० इसमें एक अव्यक्त मान अ और क के बीच अवश्य होगा। मान लो कि यह मान आ के तुल्य है तो (१०वें प्रक्रम से)

$फा'(य) = फ'(य) - \frac{फ(क) - फ(अ)}{क - अ}$ इसमें य के स्थान में आ के उत्थापन से

$$फ'(आ) - \frac{फ(क) - फ(अ)}{क - अ} = ०$$

$$\therefore फ(क) - फ(अ) \qquad = (क - अ)\, फ'(आ)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि अ और क के बीच में एक आ ऐसी संख्या अवश्य होगी जिससे

फ(क) − फ(अ) = (क − अ) फ'(आ) ऐसा एक समीकरण बनेगा।

१४७—कल्पना करो कि अ से क बड़ा है तो यदि फ'(आ) यह धन होगा तो फ(क), फ(अ) से बड़ा होगा। और यदि फ'(आ) यह ऋण होगा तो फ(क) से फ(अ) बड़ा होगा। यदि

अ और क के बीच प्रत्येक य के मान में फ′(य) हो तो स्पष्ट है कि फ′(आ) भी धन होगा और अ और क के बीच प्रत्येक य के मान में यदि फ′(य) ऋण हो तो फ′(आ) भी ऋण होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि किसी दो संख्याओं के बीच प्रत्येक य के मान में फ′(य) धन हो तो उन दोनों संख्याओं के बीच य के मान में फ(य) बढ़ता जायगा और यदि फ′(य) ऋण हो तो फ(य) घटता जायगा। अर्थात् उन दो संख्याओं के भीतर यदि फ′(य) एक ही चिन्ह का रहेगा और फ(य) और फ′(य) एक ही चिन्ह के होंगे तो उन दोनों संख्याओं के भीतर य जैसा जैसा बढ़ता जायगा तैसा तैसा फ(य) का संख्यात्मक मान बढ़ता जायगा। और यदि फ(य) और फ′(य) विरुद्ध चिन्ह के होंगे तो फ(य) का संख्यात्मक मान घटता जायगा।

१४८—अब फोरियर की रीति की उत्पत्ति ऐसे करो—

पहले—कल्पना करो कि य = अ तो फ(य) और फ″(य) एक ही चिन्ह के हैं। मान लो कि पहिला आसन्न मान अ है

तो न्यूटन की रीति से दूसरा आसन्न मान $अ_1 = अ - \frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$

कल्पना करो कि य का वास्तव मान = अ + च तो फ(अ + च) = ०

अब १४६वें प्रक्रम से फ(अ + च) − फ(अ) = च फ′(आ)
(जहाँ अ और अ + च के बीच में कोई संख्या आ है।)

इसलिये $च = -\frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ और य का वास्तव मान

$अ - \frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ हुआ और न्यूटन की रीति से दूसरा आसन्न मान

$अ - \frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$ यह हुआ जिसको सिद्ध करना है कि अ की अपेक्षा वास्तव मान के निकट है। च के धन होनेसे $\frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ इसमें भाज्य और भाजक विरुद्ध चिन्ह के होंगे और कल्पना से फ(अ) और फ''(अ) एक ही चिन्ह के हैं; इसलिये फ'(आ) और फ''(अ) भी विरुद्ध चिन्ह के होंगे। इसलिये य के अ और क के बीच के मानों में फ'(य), जैसा जैसा य बढ़ेगा, तैसा तैसा घटता जायगा (१४७वां प्रक्रम देखो) इसलिये फ'(अ) के संख्यात्मक मान से फ'(आ) का संख्यात्मक मान अल्प होगा; इसलिये $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$ यह धनात्मक संख्या $-\frac{फ(अ)}{फ'(आ)}$ इस धनात्मक संख्या से कम होगी; इसलिये न्यूटन का दूसरा आसन्न मान पहिले की अपेक्षा वास्तव मान के पास वास्तव मान से अल्प है। अब दूसरे आसन्न मान को $अ_१$ कहो तो ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध हो जायगा कि $अ_१ - \frac{फ(अ_१)}{फ'(अ_१)} = अ_२$ यह तीसरा आसन्न मान दूसरे आसन्न मान की अपेक्षा वास्तव मान से कुछ अल्प वास्तव के पास है। इस तरह से सब आसन्न मान एक से दूसरा सूक्ष्म होता जायगा।

दूसरे—कल्पना करो कि फ(य) और फ''(य) एक ही चिन्ह के हैं। और पहिले य को क के तुल्य मान लिया जो कि अ से और वास्तव य के मान से भी बड़ा है तो न्यूटन का दूसरा आसन्न मान $क - \frac{फ(क)}{फ'(क)}$ यह होगा। मान लो कि

य का वास्तव मान = क + च है जहां च ऋणात्मक संख्या है तो फ (क + च) = ० और १४६वें प्रक्रम से फ (क + च) − फ (क) = चफ′(का) जहां का, क + च और क के बीच में है।

इसलिये $च = -\frac{फ(क)}{फ'(का)}$ यहां च के ऋण होने से फ (क) और फ′(का) एक ही चिन्ह के होंगे और कल्पना से फ (क) और फ″(क) भी एक ही चिन्ह के हैं; इसलिये फ′(का) और फ″(क) एक ही चिन्ह के होंगे; इसलिये अ और क के बीच जैसा जैसा य बढ़ता जायगा तैसा तैसा फ′(य) भी बढ़ता जायगा। (१४७वां प्रक्रम देखो)। इसलिये फ′(क) का संख्यात्मक मान फ′(का) के संख्यात्मक मान से बड़ा होगा; इसलिये $\frac{फ(क)}{फ'(क)}$ यह धनात्मक संख्या $\frac{फ(क)}{फ'(का)}$ इससे छोटी होगी। इसलिये पहिले आसन्नमान की अपेक्षा न्यूटन का दूसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास है। इसी युक्ति से दूसरे की अपेक्षा तीसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास होगा। इस तरह से एक की अपेक्षा दूसरा आसन्न मान वास्तव मान के पास पास होता जायगा। इसलिये फोरियर का विशेष इस स्थान में बड़ा ही उपयोगी है। अर्थात् जिन दो संख्याओं के बीच य के बढ़ने वा घटने से जब फ(य) और फ″(य) एक ही चिन्ह के होंगे तब उन दोनों संख्याओं मे से चाहे जिसको प्रथम आसन्न मान यदि न्यूटन की क्रिया कराओगे तो आसन्न मान उत्तरोत्तर सूक्ष्म आते जायेंगे और यदि यह स्थिति न होगी तो न्यूटन की रीति से निश्चय नहीं कि उत्तरोत्तर आसन्न मान सूक्ष्म होंगे।

१४९—कल्पना करो कि न्यूटन की रीति से किसी बार का आसन्न मान ग है तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से वास्तव मान $= ग - \frac{फ(ग)}{फ'(गा)}$ यह होगा; इसलिये न्यूटन के आसन्न मान ग और वास्तव मान में अन्तर $\frac{फ(ग)}{फ'(गा)} = त$ यह होगा। और न्यूटन का ग से आगे का आसन्न मान $ग - \frac{फ(ग)}{फ'(ग)}$ यह होगा, इसलिये इसका और वास्तव मान का अन्तर $= \frac{फ(ग)}{फ'(गा)}$ $- \frac{फ(ग)}{फ'(ग)} = त \frac{फ'(ग) - फ'(गा)}{फ'(ग)}$ परन्तु १४६ वें प्रक्रम से

$फ'(ग) - फ'(गा) = (ग - गा)फ''(घा)$ जहां ग और गा के बीच में कोई संख्या घा है। इसलिये इसके उत्थापन से अन्तर $= \frac{त(ग - गा)फ''(घा)}{फ'(ग)}$ परन्तु ग और ग + च = वास्तव मान के बीच में कोई संख्या गा है। इसलिये ग — गा यह त से अल्प होगा; इसलिये यह अन्तर $\frac{त^2 फ''(घा)}{फ'(ग)}$ इससे अल्प होगा। यदि उन दोनों संख्याओं के बीच य को बढ़ाने वा घटाने से $फ''(य)$ का महत्तम मान $फ'(य)$ के न्यूनतम मान से विभक्त किया जाय और लब्धि को ल कहो तो अन्तर सर्वदा $लत^2$ इससे अल्प रहेगा। जैसे १४४वें प्रक्रम के $य^3 - २य - ५ = ०$ इस उदाहरण में सिद्ध है कि वास्तव मान २ और २·१ के बीच में है तो

$फ(य) = य^3 - २य - ५$, $फ'(य) = ३य^2 - २$, $फ''(य) = ६य$, इसमें य के स्थान में २·१ का उत्थापन देने से २ और २·१ के

बीच फ″(य) = ६य का महत्तम मान = १२·६ और फ(य) = ३य^२ − २ का न्यूनतम मान य के स्थान में २ के उत्थापन से १० इसका भाग फ″(य) के महत्तम मान में देने से ल = १ २६ इसमें यदि स्वल्पान्तर से दशमलव को छोड़ दें तो ल = १; इस लिये स्वल्पान्तर से पहिले अन्तर त से दूसरे अन्तर लत^२ = त^२ इसमें दूना दशमलव स्थान होगा।

१५०—ल्याग्रांज (Lagrange) की रीति—

आसन्न मान जानने के लिये ल्यग्रांज ने यह रीति निकाली है। कल्पना करो कि अटकल से यह जान लिया कि फ(य) = ० इसमें य का एक मान अ और अ + १ के बीच में पड़ा है। स्टर्म के सिद्धान्त से यह भी पक्का कर लिया है कि अव्यक्त का एक ही मान अ और अ + १ के बीच में है। मान लो कि य = अ + $\frac{१}{र}$, इसका उत्थापन फ(य) में देने से दिए हुए समीकरण का रूप फ$\left(अ + \frac{१}{र}\right)$ = ० ऐसा होगा, इसमें छेदगम से स्पष्ट है कि फा(र) = ० ऐसा एक समीकरण होगा जिसमें र का धनात्मक मान एक ही होगा क्योंकि दिए हुए समीकरण में य का एक ही मान अ और अ + १ के बीच में है।

इस फा(र) = ० में अब र के स्थान में १, २, ३ .... के उत्थापन से समझ लो कि कौन दो पास की अभिन्न संख्याओं के बीच में र का मान पड़ा है।

कल्पना करो कि क और क + १ के बीच में जान पड़ा कि र का मान पड़ा है। मान लो कि र = क + $\frac{१}{ल}$, इसका उत्थापन फा(र) में देने से और छेदगम से फि (ल) = ० एक ऐसा समी-

करण होगा जिसमें ऊपर की युक्ति से ल का एक ही धनात्मक मान होगा। फिर इस फि(ल) में ल के स्थान में १, २, ३...... के उत्थापन से जान सकते हो कि किन दो पास की संख्याओं के भीतर ल का मान है।

कल्पना करो कि ग और ग + १ के भीतर ल का मान है। फिर $ल = ग + \frac{१}{व}$ कल्पना कर व इत्यादि के मान जानने से लगातार क्रिया करने से य का मान $= अ + \cfrac{१}{क + \cfrac{१}{ग + \cfrac{१}{\cdots\cdots}}}$ इस वितत भिन्न के रूप में जान सकते हो जिसे य के अनेक आसन्न मान उत्तरोत्तर सूक्ष्म बनेंगे।

उदाहरण—(१) $य^३ - २य - ५ = ०$ इसमें य का आसन्न मान जानना है।

यहां ७३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि संभाव्य मान एक ही है वह भी २१वें प्रक्रम से धन होगा।

परीक्षा से जान पड़ा कि वह धनात्मक मान २ और ३ के बीच में है। मानो $य = २ + \frac{१}{र}$ तो

$$फ(२) = २^३ - २.२ - ५ = - १$$

$$फ'(२) = ३.२^२ - २ = १०$$

$$\frac{१}{२}फ''(२) = ३.२ = ६$$

इसलिये र के रूप में $-र^३ + १०र^२ + ६र + १ = ०$

चिन्हों के बदलने से $र^३ - १०र^२ - ६र - १ = ०$ ऐसा समीकरण हुआ जिसे फा(र) कहो।

यदि र=१० तो फा(र) ऋण और र=११ तो फा(र) धन होता है; इसलिये १० और ११ के बीच में र हुआ।

मानो कि $र = १० + \frac{१}{ल}$ तो

$$फा(१०) = १०^३ - १०\ १०^२ - ६\ १० - १ = -६१$$
$$फा'(१०) = ३\cdot१०^२ - २०\cdot१० - ६ = ९४$$
$$\tfrac{१}{२}फा''(१०) = ३\ १० - १० = २०$$

इसलिये ल के रूप में समीकरण $-६१ल^३ + ९४ल^२ + २०ल + १ = ०$, चिन्हों के बदलने से $६१ल^३ - ९४ल^२ - २०ल - १ = ० = फि(ल)$

यहां यदि ल=२ तो फि (ल) धन और ल=१ तो फि (ल) ऋण; इसलिये ल का मान १ और २ के बीच में हुआ।

मानो कि $ल = १ + \frac{१}{व}$ तो

$$फि(१) = ६१\ १^३ - ९४\ १^२ - २०\ १ - १ = -५४$$
$$फि'(१) = १८३\cdot१^२ - १८८\ १ - २० = -२५$$
$$\tfrac{१}{२}फि''(१) = १८३\ १ - ९४ = ८९$$

इसलिये व के रूप में समीकरण

$-५४व^३ - २५व^२ + ८९व + ६१ = ०$ ऐसा हुआ, चिन्हों के बदलने से $५४व^३ + २५व^२ - ८९व - ६१ = ० = फि(व)$, इसमें भी परीक्षा से जानेंगे कि व का मान १ और २ के बीच में है। इस तरह लगातार क्रिया करने से

$$य = २ + \cfrac{१}{१० + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cdots}}}$$

इस पर से आसन्नमान (हमारी शोधी भास्करीय बीज-गणित की टिप्पणी ४३—५२ पृष्ठ तक देखो)

$$\frac{२}{१}, \frac{२१}{१०}, \frac{२३}{११}, \frac{४४}{२१} \cdots\cdots\cdots$$

य का वास्तव मान और $\frac{४४}{२१}$ का अन्तर $\frac{१}{२१ (२१ + ११)}$

$= \frac{१}{६७२}$ इससे कम होगा।

फ(२), फ′(२), $\frac{१}{२}$फ″(२) इत्यादि के मान लाघव से जानने के लिये हार्नर साहेब की क्रिया करनी चाहिए (३७वें प्रक्रम का विशेष देखो)

१५१—यदि अ और अ+१ इनके बीच फ(य)=० इसका एक से अधिक अव्यक्त मान हो तो स्टर्म के सिद्धान्त से वा किसी युक्ति से समझ लो कि अ और अ+१ के बीच कितने अव्यक्त के मान हैं और अ से आगे किन किन भिन्नाङ्कों का एक एक मान पड़ा है। फ(य)=० इस पर से ३६वे प्रक्रम से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान, दिए हुए समीकरण के अव्यक्त मान से उस भिन्नाङ्क के हरगुणित तुल्य हो जिस भिन्न और अ के बीच में य का एक मान हो। यदि दो भिन्नों के बीच में एक य का मान पड़ा हो तो उन भिन्नों के

हरों के लघुतमापवर्त्य गुणित य के मान तुल्य जिसमें अव्यक्त के मान हों ऐसा नया समीकरण बनालो।

अब इस नये समीकरण में स्पष्ट है कि एक एक अव्यक्त का मान अवश्य दो पास की अभिन्न संख्याओं के भीतर होगा। अब १५०वें प्रक्रम से इस नये समीकरण में अव्यक्त का आसन्न मान निकालो। पहिले समीकरण के अव्यक्त मान से जै गुणित नये समीकरण के अव्यक्त मान हों उससे नये समीकरण के आसन्न मान में भाग दे देने से पहिले समीकरण में अव्यक्त के आसन्न मान आवेंगे। जैसे

उदाहरण—(१) $य^३ - ७य + ७ = ०$ इसमें ७३वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि सब मान संभाव्य है और स्टर्म के सिद्धान्त से जान पड़ेगा कि एक मान १ और $\frac{३}{२}$ के बीच, दूसरा मान $\frac{३}{२}$ और २ के बीच में है; इसलिये ३६ वें प्रक्रम से $य = \frac{य'}{२}$ ऐसा मानने से नया समीकरण $\left(\frac{य'}{२}\right)^३ - ७\frac{य'}{२} + ७ = ०$ छेदगम से $य'^३ - २८य' + ५६ = ०$ ऐसा होगा, इसमें अब एक मान २ और ३ के बीच, दूसरा ३ और ४ के बीच होगा।

दो और तीन के बीच जो मान पड़ा है उसके जानने के लिये मान लो कि $य = २ + \frac{१}{र}$ तो

$$फ(य') = य'^३ - २८य' + ५६,\ फ'(य') = ३य'^२ - २८,\ \tfrac{१}{२}फ''(य') = ३य'$$

$$\therefore\ फ(२) = २^३ - २८\cdot२ + ५६ = ८$$

$$फ'(२) = ३\cdot२^२ - २८ \quad = -१६$$

$$\frac{१}{२} फ''(२) = ३\cdot२ \quad = ६$$

इसलिये र के रूप में समीकरण $८र^३ - १६र^२ + ६र + १ = ० = फा(र)$, यहां यदि र = १ तो फा (र) ऋण और र = २ तो फा (र) धन होता है; इसलिये र, १ और २ के बीच में पड़ा।

मान लो कि $र = १ + \frac{१}{ल}$ तो

$$फा(र) = ८र^३ - १६र^२ + ६र + १$$
$$फा'(र) = २४र^२ - ३२र + ६$$
$$\frac{१}{२} फा''(र) = २४र - १६$$
$$\frac{१}{३!} फा'''(र) = ८$$

इसलिये

$$फा(१) = ८\cdot१^३ - १६\cdot१^२ + ६\cdot१ + १ = -१$$
$$फा'(१) = २४\cdot१^२ - ३२\cdot१ + ६ \quad = -२$$
$$\frac{१}{२} फा''(१) = २४\cdot१ - १६ \quad = ८$$
$$\frac{१}{३!} फा'''(१) = ८ \quad = ८$$

इसलिये र के रूप में समीकरण

$$-ल^३ - २ल^२ + ८ल + ८ = ०$$

चिन्हों के बदलने से $ल^३ + २ल^२ - ८ल - ८ = ० = फि(ल)$ यहां यदि ल = २ तो फि (ल) ऋण और ल = ३ तो फि (ल) धन होता है; इसलिये दो और तीन के बीच में ल हुआ। मान लो कि

$$ल = २ + \frac{१}{व} \text{ तो}$$

$$\text{फि}\,(ल) = ल^३ + २ल^२ - ८ल - ८$$

$$\text{फि}'(ल) = ३ल^२ + ४ल - ८$$

$$\frac{१}{२}\,\text{फि}''\,(ल) = ३ल + २$$

$$\frac{१}{३!}\,\text{फि}'''\,(ल) = १$$

इसलिये

$$\text{फि}\,(२) = २^३ + २\cdot२ - ८\,२ - ८ = -८$$

$$\text{फि}'\,(२) = ३\,२^२ + ४\cdot२ - ८ \quad = १२$$

$$\frac{१}{२}\,\text{फि}''\,(२) = ३\cdot२ + २ \quad = ८$$

$$\frac{१}{३!}\,\text{फि}'''\,(२) = १ \quad = १$$

इसलिये व के रूप में समीकरण

$-८व^३ + १२व^२ + ८व + १$, चिन्हों के बदल देने से

$८व^३ - १२व^२ - ८व - १ =$ फी (व)।

यहां यदि व = २ तो फी (व) ऋण और व = ३ तो फी (व) धन होता है; इसलिये २ और ३ के बीच में व हुआ। इस प्रकार लगातार करने से

$$प' = २ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{२ + \cdots\cdots}}}$$

इससे आसन्न मान

$$\frac{२}{१}, \frac{३}{१}, \frac{८}{३}, \frac{१९}{७} \dots\dots$$

इनमें २ का भाग देने से य के आसन्न मान

$$\frac{१}{१}, \frac{३}{२}, \frac{४}{३}, \frac{१९}{१४}$$

यहां वास्तव मान और $\frac{१९}{१४}$ इसका अन्तर $\frac{१}{१४(७+३)} = \frac{१}{१४०}$ इससे अल्प होगा।

३ और ४ के बीच में जो य' का मान है उसके जानने के लिये मान लो कि $य = ३ + \frac{१}{र}$ तो

$$फ(३) = ३^३ - २८\cdot३ + ५६ = -१$$

$$फ'(३) = ३\cdot३^२ - २८ \qquad = -१$$

$$\frac{१}{२} फ''(३) = ३\cdot३ \qquad = ९$$

$$\frac{१}{३!} फ'''(३) = १ \qquad = १$$

इसलिये र के रूप में समीकरण

$$-र^३ - र^२ + ९र + १ \qquad = ०,$$ चिन्हों के बदलनेसे

$$र^३ + र^२ - ९र - १ \qquad = ० = फा(र)$$

यहां र = २ तो फा (र) ऋण और र = ३ तो फा (र) धन होता है; इसलिये र, २ और ३ के बीच में हुआ।

मान लो कि $र = २ + \frac{१}{ल}$ तो

$$\text{फा}(\text{र}) = \text{र}^{३} + \text{र}^{२} - ६\text{र} - १$$
$$\text{फा}'(\text{र}) = ३\text{र}^{२} + २\text{र} - ६$$
$$\tfrac{१}{२}\,\text{फा}''(\text{र}) = ३\text{र} + १$$
$$\tfrac{१}{३!}\,\text{फा}'''(\text{र}) = १$$

इसलिये

$$\text{फा}(२) = २^{३} + २^{२} - ६\cdot२ - १ = -७$$
$$\text{फा}'(२) = ३\,२^{२} + २\cdot२ - ६ = ७$$
$$\tfrac{१}{२}\,\text{फा}''(२) = ३\,२ + १ = ७$$

इसलिये ल के रूप में समीकरण

$-७\text{ल}^{३} + ७\text{ल}^{२} + ७\text{ल} + १ = ०$, चिन्हों के बदल देने से

$७\text{ल}^{३} - ७\text{ल}^{२} - ७\text{ल} - १ = ० = \text{फि}(\text{ल})$, यहां $\text{ल} = १$

तो फि (ल) ऋण और ल = २ तो फि (ल) धन होता है इसलिये ल, १ और २ के बीच में हुआ।

मानो कि $\text{ल} = १ + \frac{१}{\text{व}}$ तो

$$\text{फि}(\text{ल}) = ७\text{ल}^{३} - ७\text{ल}^{२} - ७\text{ल} - १$$
$$\text{फि}'(\text{ल}) = २१\text{ल}^{२} - १४\text{ल} - ७$$
$$\tfrac{१}{२}\,\text{फि}''(\text{ल}) = २१\text{ल} - ७$$
$$\tfrac{१}{३!}\,\text{फि}'''(\text{ल}) = ७$$

इसलिये

$$\text{फि}(१) = ७\cdot१^{३} - ७\cdot१^{२} - ७\cdot१ - १ = -८$$
$$\text{फि}'(१) = २१\cdot१\cdot१^{२} - १४\cdot१ - ७ = ०$$
$$\tfrac{१}{२}\,\text{फि}''(१) = २१\,१ - ७ = १४$$

इसलिये व के रूप में समीकरण-

$- ८व^{२} + १४व + ७ = ०$। चिन्हों के बदलने से

$८व^{२} - १४व - ७ = ० = $ फी (व)

यहां व = १ तो फी (व) ऋण और व = २ तो फी (व) धन होता है; इसलिये १ और २ के बीच में व हुआ।

इस तरह लगातार क्रिया करने से

$$य' = ३ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cdots\cdots}}}$$

इस पर से आसन्न मान $\frac{३}{१}, \frac{७}{२}, \frac{१०}{३}, \frac{१७}{५} \cdots$ इनमें २ का भाग देने से

य के आसन्न मान

$$\frac{३}{२}, \frac{७}{४}, \frac{५}{३}, \frac{१७}{१०}$$ ।

यहां वास्तव मान और $\frac{१७}{१०}$ का अन्तर $\frac{१}{१० (५ + ३)} = \frac{१}{८०}$ इससे अल्प होगा।

$य^{२} - ७य - ७ = ०$ इस समीकरण में ७३वें प्रक्रम से सिद्ध है कि एक अव्यक्त मान ऋण होगा। इसलिये य के स्थान में $-य$ के उत्थापन से जो नया समीकरण बनेगा उसमें धन अव्यक्त मान के जो आसन्न मान ल्याग्रांज की क्रिया से आवेंगे वे आदि समीकरण य के ऋणात्मक मान के आसन्न मान होंगे।

अथवा यहां द्वितीय पद $य^{२}$ के गुणक के शून्य होने से स्पष्ट है कि तीनों मानों का योग शून्य है; इसलिये ऊपर के दो

धनात्मक आसन्न मानों के योग को शून्य में घटा देने से शेष ऋणात्मक मान के आसन्न मान होंगे। इस प्रकार यदि पहिले धनात्मक मान के आसन्न मान $मा_1$ और दूसरे धनात्मक मान के आसन्न मान $मा_2$ तुल्य बनाए गए हों तो इन पर से अङ्कपाश की युक्ति से ऋणात्मक मान के आसन्न मान $मा_1 मा_2$ इतने बनेंगे।

१५२—ल्याग्रांज की क्रिया को लगातार करने से कभी ऐसा भी होगा कि कहीं पर बने हुए समीकरण का अव्यक्त मान कोई अभिन्न धनात्मक संख्या हो। ऐसी स्थिति में उसी स्थान पर क्रिया रुक जायगी और अव्यक्त का मान एक भिन्न परिच्छिन्न मान के तुल्य होगा। परन्तु पहिले ही परिच्छिन्न मानानयन की युक्ति से यदि परिच्छिन्न मान जान कर दिए हुए समीकरण में उस मान सम्बन्धी जो अव्यक्त खण्ड का गुण्य गुणक रूप अवयव हो उसे अलग कर ऐसा समीकरण बना लिया जाय जिसमें परिच्छिन्न मान न हो तब इस समीकरण में आसन्न मान के लिये ल्याग्रांज की क्रिया में ऐसा कोई समीकरण न बनेगा जिसमें कोई परिच्छिन्न मान आवे।

१५३—ल्याग्रांज की क्रिया करने में ऐसा भी संभव है कि क्रिया करते करते कहीं पर एक ऐसा समीकरण बन जाय जो कि पीछे बने हुए समीकरणों में से किसी एक के स्वरूप के तुल्य हो जाय, केवल अव्यक्त का कोई भेद हो तब स्पष्ट है कि वितत भिन्न की लब्धि फिर फिर वही आवेंगी और आसन्न मान करणी रूप होगा। ऐसे वितत भिन्न का मान एक वर्ग समीकरण से द्विविध वर्गात्मक करणी के रूप में आवेगा।

और ये द्विविध मान दिए हुए समीकरण में भी अव्यक्त के मान होंगे। (मेरी शोधी भास्करीय बीजगणित के ६०—६५ पृष्ठों को देखो)

१५४—आसन्न मान जानने के लिए हार्नर साहेब की युक्ति—कल्पना करो कि फ(य) = ० यह एक समीकरण है तो फ (अ + य) = ० यह एक ऐसा समीकरण होगा जिसमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे पहिले समीकरण के अव्यक्त मानों से अतुल्य संख्या में न्यून होंगे। और फ (अ + य) = ० का रूप ३७वें प्रक्रम से

$$फ(अ) + य फ'(अ) + य^{२}\frac{फ''(अ)}{२!} + य^{३}\frac{फ'''(अ)}{३!} + \cdots\cdots$$

$$+ य^{न}\frac{फ^{न}(अ)}{न!} = ०$$ ऐसा होगा।

इस पर से हार्नर ने यह रीति निकाली है कि पहिले दिए हुए समीकरण में जान लो कि किन दो संख्याओं के बीच में अव्यक्त का एक धनात्मक मान है, जैसे मान लो कि अ से अधिक अव्यक्त का मान जान पड़ा तब अ और दिए हुए समीकरण से ऐसा एक समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान पहिले के अव्यक्त मान से अतुल्य न्यून हो फिर इस समीकरण में जान लो कि किस संख्या से अधिक अव्यक्त का धनात्मक मान है। फिर इस संख्या का और नये बने समीकरण पर से दूसरा एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें के अव्यक्त मान पिछले समीकरणों के अव्यक्त मानों से तुल्य न्यून हों

फिर इस दूसरे समीकरण में भी पूर्ववत् वास्तव अव्यक्तमान का पता लगाओ फिर उस मान से तीसरा नया समीकरण बनाओ इस तरह अन्त में सब संख्याओं के तुल्य फ (य) = ० इसमें य का धनात्मक मान होगा।

इस क्रिया में लाघव से फ (अ), फ′(अ), $\frac{\text{फ}''(\text{अ})}{2!}$, $\frac{\text{फ}'''(\text{अ})}{3!}$ इत्यादि के मान जानने ही के लिये हार्नर ने सुगम रीति निकाली है जो ३७ प्रक्रम में विशेष लिख आये हैं।

फ (य) = ० इसमें पहिले यदि इसका पता लगाओ कि अ$10^{\text{म}}$ (अ + १) $10^{\text{म}}$ के बीच मे मान है तो वास्तव मान के अन्तिम स्थानीय अङ्क का मान अ होगा। और पहिले नये समीकरण में अव्यक्त का मान ० और $10^{\text{म}}$ होगा। मान लो कि $10^{\text{न}-1}$ और $10^{\text{म}}$ के भीतर इसका अव्यक्त मान है तो मुख्य समीकरण में वास्तव अव्यक्तमान की उपान्तिम स्थानीय संख्या क हुई और दूसरे नये समीकरण में अव्यक्त मान ० और $10^{\text{म}} - \text{क}10^{\text{म}-1} = 10^{\text{म}-1}(10 - \text{क})$ के बीच मे होगा फिर इसमें जानो कि अव्यक्तमान ग$10^{\text{म}-2}$ और $10^{\text{म}-1}(10 - \text{क})$ के बीच में है। इस तरह से लगातार क्रिया करने से वर्गमूल वा घनमूल के आनयन के ऐसा अन्त स्थान से वास्तव अव्यक्त मान के सब अंक विदित होते जायेंगे। जैसे

उदाहरण—(१) $2\text{य}^3 - 89\text{य}^2 + 245\text{य} + 266 = 0$

इसमें परीक्षा से जान पड़ा कि अव्यक्त का एक मान ४० और ५० के बीच में है तो हार्नर की रीति से फ (अ), फ′ (अ) इत्यादि के मान जो कि नये समीकरण में पदों के गुणक होंगे।

२.	−८९	२५४	१६६	(४१·५
	८०	−३६०	−४६००	
	−९	−११५	−४४३४	
	८०	२८४०	२८७८	
	७१	२७२५	−१५५६	
	८०	१५३	१५५६	
	१५१	२८७८	०	
	॰	१५५		
	१५३	३०३३		
	२	७८		
	१५७	३११२		
	१			
	१५८			

सीढ़ी के ऐसी जो जो रेखायें हैं उनके नीचे प्रत्येक नये समीकरण के द्वितीयादि पदों के गुणक हैं। प्रथम पद का गुणक प्रत्येक समीकरण में वही होता है जो मुख्य समीकरण में प्रथम पद का गुणक है। जैसे यहां पहिला नया समीकरण २य^{३} + १५१य^{२} + २७२५य − १५५६ = ० यह होगा जिसमें १ और २ के बीच में अव्यक्तमान है फिर इससे दूसरा नया समीकरण २य^{३} + १५७य^{२} + ३०३३य − १५५६ यह होगा जिसमें ठीक ठीक य = ·५ है।

यदि यहां दूसरे नये समीकरण में य का मान ठीक ठीक ·५ न होता तो फिर ·५ पर से और इस दूसरे नये समीकरण से तीसरा नया समीकरण बनाया जाता है और फिर इसमें पता लगाना होता कि किन किन दो दशमलवों के बीच में इसका अव्यक्तमान पड़ा है।

(२) $२०य^{३} - ६७य^{२} - १५४य - ३२१ = ०$ इसमें अव्यक्त के धन मान को बताओ।

इसमें परीक्षा से जान पड़ता है कि धन अव्यक्तमान ५ और ६ के बीच में है। इसलिये हार्नर की रीति से।

−६७	−१५४	−३२१	(५·३५
१००	१६५	−५५	
३३	११	−२६६	
१००	६६५	२२४ ३१	
१३३	६७६	−४१ ६९	
१००	७१·७	४१·६९	
२३३	७४७ ७	०	
६	७३ ५		
२३९	८२१·२		
६	१२·६		
२४५	८३३·८		
६			
२५१			
१			
२५२			

यहां पर पहिला नया समीकरण $२०य^{३} + २३३य^{२} + ६७६य - २६६ = ०$ जिसमें अव्यक्तमान ·३ और ·४ के बीच में है फिर दूसरा नया समीकरण $२०य^{३} + २५१य^{२} + ८२१·२य - ४१ ६९ = ०$ जिसमें ठीक ठीक य = ·०५ ;

ऊपर के कर्म में दशमलव को यदि हटाना हो तो जिस नये समीकरण में दशमलव का संभव हो उसके अव्यक्त मानों को दशगुणित कर कर्म करना आरंभ करो अर्थात् ऊर्ध्वाधर

पंक्तिओं में जो नये समीकरण के पदों के गुणक आते हैं उनमें प्रथम पंक्ति वालों को १०, दूसरी पंक्ति वालों को १००, तीसरी पंक्ति वालों को १००० इत्यादि से गुण कर कर्म करना चाहिए। जैसे

(३) ४य³ − १३य² − ३१य − २७५ = ० इसमें ऊपर की युक्ति से यदि क्रिया की जाय और पहिले जान लिया जाय कि य का वास्तव मान ६ और ७ के बीच में है तो हार्नर की रीति से फ (अ), फ′ (अ) इत्यादि के मानानयन के लिये और नये समीकरण के बनाने के लिये ३७ प्रक्रम की युक्ति से पहिले दशमलव लेकर कर्म

यह हुआ

और दशमलव हटाने की युक्ति से

यह लाघव से कर्म हुआ।

१५५—हार्नर की रीति से जो फ(अ), फ'(अ) इत्यादि के मान आते हैं वे ही प्रत्येक सीढ़ी वाली रेखा की अन्त वाली सीढ़ी के उलटे क्रम से संख्यायें हैं। इसलिये अन्त वाली सीढ़ी के नीचे की संख्या फ(अ) और इसके पीछे वाली सीढ़ी के अन्त की संख्या फ'(अ) होगी। इसलिये जहां पर कर्म करते करते फ (अ) यह फ'(अ) से संख्यात्मक मान से छोटा हो

तहां न्यूटन की रति से $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)}$ यह बड़े लाघव से आगे के, समीकरणों में अव्यक्त का आसन्नमान वा मुख्य समीकरण में अव्यक्त मान का और अवयव आ जायँगे; जैसे पिछले प्रक्रम के (३) उदाहरण में पहिले वार कर्म करने से फ(अ) = −६५ और फ'(अ) = २४५ इसलिये $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)} = \frac{६५}{२४५}$ = .२ स्वल्पान्तर से यह पहिले नये समीकरण में अव्यक्त का आसन्नमान और मुख्य समीकरण में अव्यक्त मान का दूसरा अवयव आ जाता है। इसी प्रकार दूसरी वार क्रिया करने में जो फ(अ) = −१३·६०८ और फ'(अ) = २६६·०८ ये आते हैं इनसे $-\frac{फ(अ)}{फ'(अ)} = \frac{१३·६०८}{२६६·०८}$ = ·०५ स्वल्पान्तर से यह दूसरे नये समीकरण के अव्यक्त के आसन्नमान और मुख्य समीकरण के अव्यक्तमान का तीसरा अवयव आता है। इस प्रकार से दो तीन बार कर्म करने के अनन्तर (कभी कभी एक ही वार के अनन्तर) न्यूटन की रीति से सहज में नये समीकरणों के अव्यक्त के आसन्नमान का पता लग जायगा, व्यर्थ ढूढने में समय न नष्ट होगा।

१५६—यदि अव्यक्त का मान किसी नियत दशमलव स्थान तक अपेक्षित हो तो आधे दशमलव स्थान से एकाधिक स्थान तक तो हार्नर की क्रिया पूरी करो फिर प्रत्येक नये

समीकरण के पदों के जो सीढी के नीचे गुणक हैं उनमें उपान्तिम सीढी के नीचे जो गुणक है उसकी एक स्थानीय संख्या काट कर अवशिष्ट संख्या को गुणक समझो। उसके पीछे वाले गुणक में एक और दश स्थानीय दोनों संख्याओं को काट कर अवशिष्ट को गुणक समझो। इसके पीछे वाले गुणक में एक, दश और शत स्थानवाली तीन संख्याओं को काट कर अवशिष्ट को गुणक समझो। ऐसे ही एक एक अधिक स्थानवाली संख्याओं को काट काट कर गुणकों को बनाकर क्रिया करो। क्रिया करने में इसके अनन्तर जो दूसरे समीकरण के गुणक हों उनमें भी ऊपर की युक्ति से संख्याओं को काट काट कर छोटे गुणक बनाकर क्रिया करते जाओ। क्रिया करने में जहां गुणना हो तहां अन्तिम काटी हुई संख्या को भी अभिष्ट संख्या से गुण कर दशमलव के संक्षेप गुणन की युक्ति से केवल हाथ लेकर उसे एक स्थानीय सम्बन्धि गुणनफल में मिला कर आगे पूर्ववत् गुणन करते जाओ। जैसे—

उदाहरण—(१) $य^{३} + ३य^{२} - ७य - ५ = ०$ इसमें आठ दशमलव स्थान तक अव्यक्त का आसन्नमान जानना है तो पहिले पांच दशमलव तक हार्नर की पूरी क्रिया करने से

१	३	−२	−५	(१·३३००३
	१	४	२	
	४	२	−३०००	
	१	५	२६६७	
	५	७००	−३३३०००	
	१	१८९	३३२३३७	
	६०	८८९	−६६३०००००००००	
	३	१८९	५६४३५२४७५१२५	
	६३	१०८७००	−९८६४७५२४८७५	
	३	२०७९		
	६६	११०७७९		
	३	२०८८		
	६९०	११२८६७००००००		
	३	३४९५०२५		
	६९३	११२८७०४९५०२५		
	३	३४९५०५०		
	६९६	११२८७३९९००७५		
	३			
	६९९०००			
	५			
	६९९००५			
	५			
	६९९०१०			
	५			
	६९९०१५			

यहां तक तो शून्य बढ़ाते क्रिया करने से अन्त के गुणकों से—

य^{3} + ६६६०१५ य^{2} + ११२८७३६६००७५ य − ९८३४७५२४८७५ = ० ऐसा समीकरण होगा। इसमें स्पष्ट है कि य के स्थान में कोई एक स्थानीय दशमलव क के उत्थापन से और दशमलव को भिन्न बनाने से

$$\frac{१}{१०००}\text{क}^{3} + \frac{६६६०१५}{१००}\text{क}^{2} + \frac{१२८७३६६००७५}{१०}\text{क} - ९८६४७५२४८७५$$

ऐसा होगा जहां हरों के भाग दे देने से स्वल्पान्तर से

६६६० क^{2} + ११२८७३६६००७ क − ९८६४७५२४८७५

ऐसा होगा इस पर से गुणकों में स्थानीय अङ्क काटने की युक्ति उपपन्न हो जाती है। अब गुणकों के स्थानीय अंकों को नियमानुसार काट काट कर क्रिया करने से।

११२८७३६६००७५	− ९८६४७५२४८७५	(१ ३३००५८७३
५५९७१	९०२९९६३९५३२	
११२८७४५४९२९	− ८३४७८८५४४३	
५५९२१	७९०१२६१०१८	
११२८७५१०८५ ०	− ४४६६२४४७५	
४८९	३३८६७५६२४	
११२८७५१५७४	− १०७९९८८०१	
४८९		
११२८७५२०६ ३		
२		
११२८७५२०८		
२		
११२८७५२१०		

अब यहां अन्त का समीकरण ११२८७५२१०य − १०७९९८८०१ = ० यह हुआ जिसमें य = $\frac{१०७९९८८०१}{११२८७५२१०}$

यहां दशमलव के संक्षेप भागाहार की विधि से लब्धि ·९५६७८२५ आती है। इसे ऊपर के मान के आगे रख देने से मुख्य समीकरण में अव्यक्त का एक धन मान १ ३३००५८७३९५६७९८२५ यह आता है।

इस प्रकार हार्नर की रीति से बड़े लाघव से बहुत दशमलव स्थानों तक आसन्नमान आता है।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $य^{३} - ४य - १० = ०$ इसमें जो धन अव्यक्तमान २ और ३ के बीच में है उसका आसन्नमान न्यूटन वा कमलाकर की रीति से निकालो।

२। $य^{३} - ४य^{२} - ७य + २४ = ०$ इसका २ और ३ के बीच का आसन्नमान न्यूटन की रीति से निकालो।

३। $य^{४} - ८य^{३} + १२य^{२} + ८य - ३ = ०$ इसमें जो धन मान ० और १ के बीच में है उसका आसन्नमान न्यूटन की रीति से निकालो।

४। नीचे लिखे हुए समीकरणों में न्यूटन की रीति से एक धन अव्यक्तमान का आसन्नमान निकालो।

(१) $य^{३} + ३य - ४ = ०$।

(२) $य^{३} + ३य^{२} - ३य + १६ = ०$।

५। नीचे लिखे हुए समीकरणों में ल्यांगराज की रीति से धनाव्यक्त का आसन्नमान निकालो

(१) $३य^{३} - २य^{२} - ३य - २ = ०$।

(२) $य^{३} - १५य - ५ = ०$।

(३) $य^{३} - ६य - १२ = ०$, यहां $य = ३ + \cfrac{१}{५ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cdots}}}$

६। हार्नर की रीति से नीचे लिखे हुए समीकरणों में अव्यक्त के मान निकालो।

(१) $२य^{३} - ६५० ८य^{२} + ५य - १६२७ = ०$,

य = ३२५ ४।

(२) $य^{३} - १२य^{२} + १२य - ३ = ०$, य = २ ८५८०८३।

(३) $४य^{३} - १८०य^{२} + १८६६य - ४५७ = ०$,

य = २८ ५२१२०७३८।

(४) $य^{३} - ८६य^{२} + ६५८य - १३७६ = ०$,

य = २ ५५७०५१।

(५) $य^{३} + २य^{२} - २३य - ७० = ०$, य = ५ १४४५७८७२५२८।

(६) $य^{३} + य^{२} - २य - १ = ०$, य = −१ ८०१९४ वा

−·४४५०४ वा

१ २४६९८

७। हार्नर की रीति से ६७३३७३०९७१२५ इसका घनमूल निकालो। उ० ८७६५।

८। हार्नर की रीति से ५३७८२४ इसका पञ्चघात मूल निकालो। उ० १४।

९। $य^{५} + य^{४} - ४य^{३} - ३य^{२} + ३य + १ = ०$, इसमें जो मान −१ और ० के बीच में है उसका आसन्नमान पांच दशमलव स्थान तक निकालो। उ० −·२८४६३।

१० । $य^४ - ११७७७य + ४०३८५ = ०$ इसमें दो संभाव्यमान निकालो । उ० ३·४५५९२, २१·४३०६७ ।

११ । $१४य^३ + १२य^२ - ९य - १० = ०$ इसमें धन अव्यक्त मान का आसन्नमान बताओ । उ० ०·८५९०६ ।

१२ । $७य^४ + २०य^३ + ३य^२ - १६य - ८ = ०$ इसमें धन अव्यक्तमान क्या है । उ० ० ९१३३६ ।

१३ । $य^५ + १२य^४ + ५९य^३ + १५०य^२ + २०१य - २०७ = ०$ इसमें दश दशमलव स्थान तक धनाव्यक्त का आसन्नमान निकालो । उ० ६३८६०५८०३३ ।

१४ । $य^३ + ३०य^२ - ४००य + १००० = ०$ इसमें धनाव्यक्त के आसन्नमान बताओ । उ० ३ ५६८९५८४, ६·९२०२१४७ ।

१४—मानों के तद्रूपफल

१५७—दो वा अधिक वर्णों का फल यदि ऐसा हो कि किसी दो वर्णों के परस्पर बदल देने से भी फल के मान में विकार न हो तो ऐसे फल को उन वर्णों का तद्रूपफल कहते हैं ।

जैसे यदि $फ(य,र) = य^म + र^म$ तो यहां य के स्थान में र और र के स्थान में य के बदलने से भी $फ(य,र) = र^म + य^म = य^म + र^म$ ऐसा होता है; इसलिये ऐसे य और र के फल को उनका तद्रूपफल कहते हैं । इसी प्रकार $फ(य,र,ल) = य^म + र^म + ल^म$ इसमें किसी दो को परस्पर बदलने से फल के मान में विकार

नहीं होता। इसलिये इसे और $फ (य, र, ल) = यर + यल + रल$ इसमें भी किसी दो वर्णों को परस्पर बदलने से फल में विकार नहीं होता। इसलिये इसे भी उन वर्णों के तद्रूपफल कहते हैं। इस प्रकार और भी तद्रूपफलों का उदाहरण जान लेना चाहिए।

१५८—किसी समीकरण के पदों के गुणक अव्यक्तमानों के तद्रूपफल होते हैं।

क्योंकि २५वें प्रक्रम के ५वें प्रसिद्धार्थ से

$य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots + प_{न} = ०$ इसमें

$-प_{१} =$ सब मानों का योग।

$प_{२} =$ दो दो मानों के घात का योग।

$-प_{३} =$ तीन तीन मानों के घात का योग।

... .

इनमें किसी दो मानों को परस्पर बदलने से भी स्पष्ट है कि फलों के मान में भी विकार नहीं होगा। इसलिये ये सब गुणक मानों के तद्रूपफल हैं।

इस अध्याय मे यह दिखाया जायगा कि समीकरण मे जो अव्यक्त के मान हैं उनके किसी करणीगत तद्रूपफल को समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं। इसके पहिले नीचे लिखे हुए संकेतों से परिचय करना आवश्यक है।

१५९—$फ (य) = य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdot \cdot प_{न} = ०$ इसमें यदि अव्यक्त के मान अ, क, ख, ग $\cdots$ इत्यादि हों तो

$$
\left.\begin{aligned}
(१)\ स_१ &= अ + क + ख + ग \cdots\cdots \\
स_२ &= अ^२ + क^२ + ख^२ + ग^२ \cdots\cdots \\
स_३ &= अ^३ + क^३ + ख^३ + ग^३ \cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
स^म &= अ^म + क^म + ख^म + ग^म \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}
$$

(२) यदि फ (अ, क, ख, ग, $\cdots$) $= अ^म + क^म + ख^म + ग^म + \cdots$ तो (जिनमें प्रत्येक पद में एक ही अव्यक्त का घात है) ऐसे फल को प्रथम क्रम का फल कहते हैं।

(३) यदि प्रत्येक पद में दो दो मान के घातों के गुणन फल हों तो उसे दूसरे क्रम का फल कहते हैं। जैसे

फ (अ, क, ख, ग, $\cdots$) $= अ^म क^प + अ^म ख^प + क^म ख^प +$

इसे दूसरे या द्वितीय क्रम का फल कहते हैं। इसे लाघव से यौ $अ^म क^प$ ऐसा लिखते हैं। इसका यह अर्थ है कि अ, क, ख, $\cdots$ मानों से दो दो मानों के लेने से एक का म घात और दूसरे का प घात कर परस्पर गुण देने से भिन्न भिन्न जितनी संख्यायें होंगी उनका योग = यौ $अ^म क^प$

(४) तृतीय क्रम का फल वह है जिसमें प्रत्येक पद में तीन मानों के घातों का गुणनफल हो। जैसे

फ(अ, क, ख, ग, $\cdots$) $= अ^म क^प ख^ब + अ^म ख^प ग^ब + अ^म क^प ग^ब +$

इसे तृतीय क्रम का फल कहते हैं और लाघव से इसे यौ $अ^म क^प ख^ब$ ऐसा लिखते हैं। इसका भी (३) के ऐसा यह अर्थ है कि मानों से $अ^म क^प ख^ब$ ऐसे जितने पद बने हैं उनका योग = यौ $अ^म क^प ख^ब$। इसी प्रकार चतुर्थ क्रम इत्यादि फल और उनके लाघव से संकेतों को समझो।

द्वितीय क्रम, तृतीय क्रम इत्यादि के फलों में यह भी जानना चाहिए कि प्रत्येक पद में मानों के घात संख्याओं का योग स्थिर है। जैसे द्वितीय क्रम के फल में सर्वत्र हेर फेर से म और प के होने से म+प स्थिर है और तृतीय क्रम के फलों में सर्वत्र हेर फेर से म, प और व के होने से म+प+व स्थिर है। इसी प्रकार चतुर्थ क्रम इत्यादि के फलों में भी जानो।

१६०—५४वें प्रक्रम में त, थ, द··· को एक के समान मान लेने से

$$फ'(य) = \frac{फ(य)}{य-अ} + \frac{फ(य)}{य-क} + \frac{फ(य)}{य-ख} + \cdots$$ प्रत्येक हर से फ(य) में ८ प्रक्रम से भाग लेने पर लब्धि (जहां $प_0 = १$ मान लेना चाहिए) अर्थात्

$$\frac{फ(य)}{य-अ} = य^{न-१} + (अ + प_१)\, य^{न-२} + (अ^२ + प_१ अ + प_२) य^{न-३} + \cdots$$
$$+ (अ^म + प_१ अ^{म-१} + प_२ अ^{म-२} + \cdots + प_म) य^{न-म-१} + \cdots$$

इसी चाल की लब्धि फ(य) में य−क, य−ख, इत्यादि के भाग देने से आवेगी। इसलिये सब लब्धिओं के जोड़ने से

$$फ'(य) = नय^{न-१} + (स_१ + नप_१) य^{न-२} + (स_२ + प_१ स_१ + नप_२) य^{न-३} + \cdots$$
$$(स_म + प_१ स_{म-१} + प_२ स_{म-२} + \cdots + नप_म) य^{न-म-१} + \cdots$$

परन्तु $फ'(य) = नय^{न-१} + (न-१)प_१ य^{न-२}$
$$+ (न-२) प_२ य^{न-३} + \cdots + (न-म) प_म य^{न-म-१} + \cdots$$

दोनों समीकरणों में य के समान घातों के गुणक समान करने से

$स_1 + न_1 प_1 + = (न - १)प_1$ वा $स_1 + प_1 = ०$

$स_2 + प_1 स_1 + नप_2 = (न - २)प_2$ वा $स_2 + प_1 स_1 + २प_2 = ०$

साधारण से—

$स_म + प_1 स_{म-1} + प_2 स_{म-2} + \cdots\cdots + नप_म = (न - म)प_म$

वा $स_म + प_1 स_{म-1} + प_2 स_{म-2} + \cdots\cdots + मप_म = ०$

इसमें यह मान लिया गया है कि $म < न$।

इसमें पिछले का उत्थापन देने से $स_2, स_3$, इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आजायगे। जैसे

$स_1 + प_1 = ० \therefore स_1 = -प_1$ यह २५वें प्रक्रम के ५ वें प्र० सि० से भी सिद्ध है।

$स_2 + प_1 स_1 + २प_2 = स_2 - प^2_1 + २प_2 = ० \therefore स_2 = प^2_1 - २प_2$ यह ३३वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।

$$स_3 + प_1 स_2 + प_2 स_1 + ३प_3 = स_3 + प^3_1 - २प_1 प_2 - प_1 प_2 + ३प_3$$
$$= स_3 + प^3_1 - ३प_1 प_2 + ३प_3 = ०$$

$\therefore स_3 = ३प_1 प_2 - प^3_1 - ३प_3$, यही दूसरे अध्याय के अभ्यास के लिये जो प्रश्न हैं उनमें ८वें प्रश्न का उत्तर है। इस प्रकार आगे के समीकरण में पिछले $स_1, स_2$ इत्यादि के उत्थापन से स्पष्ट है कि $स_1, स_2, स_3$ इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आवेंगे।

यदि $म > न$ तो $फ(य) = ०$ इसे $य^{म-न}$ इससे गुण देने से

$य^म + प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \cdots \cdots + प_न य^{म-न} = ०$ ऐसा होगा इसमें य के स्थान में क्रम से य के मान अ, क, ख इत्यादि के उत्थापन से

$$\text{अ}^{\text{म}} + \text{प}_{१}\text{अ}^{\text{म}-१} + \text{प}_{२}\text{अ}^{\text{म}-२} + \cdots + \text{प}_{\text{न}}\text{अ}^{\text{म}-\text{न}} = ०$$

$$\text{क}^{\text{म}} + \text{प}_{१}\text{क}^{\text{म}-१} + \text{प}_{२}\text{क}^{\text{म}-२} + \cdots + \text{प}_{\text{न}}\text{क}^{\text{म}-\text{न}} = ०$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

सब को जोड़ देने से

$$\text{स}_{\text{म}} + \text{प}_{१}\text{स}_{\text{म}-१} + \text{प}_{२}\text{स}_{\text{म}-२} + \cdots + \text{प}_{\text{न}}\text{स}_{\text{म}-\text{न}} = ०$$

अब इस पर से म के स्थान में न + १, न + २, इत्यादि के उत्थापन से और $\text{स}_{\text{न}}$, $\text{स}_{\text{न}-१}$ इत्यादि के मानों से $\text{स}_{\text{न}+१}$, $\text{स}_{\text{न}+२}$ इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आजायँगे, ऊपर जो रीति मानों के घातयोग जानने के लिये दिखलाई गई है उसे न्यूटन ने निकाला है इसलिये इसे न्यूटन की रीति कहते हैं।

व्यवहार में नीचे की युक्ति से सुभीता पड़ेगा।

यह सिद्ध है कि

$$\text{फ}'(\text{य}) = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}} + \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{क}} + \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{ख}} + \cdots\cdots$$

इसलिये

$$\frac{\text{य}\,\text{फ}'(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{य}}{\text{य}-\text{अ}} + \frac{\text{य}}{\text{य}-\text{क}} + \frac{\text{य}}{\text{य}-\text{ख}} + \cdots\cdots$$

$$= \left(१-\frac{\text{अ}}{\text{य}}\right)^{-१} + \left(१-\frac{\text{क}}{\text{य}}\right)^{-१} + \left(१-\frac{\text{ख}}{\text{य}}\right)^{-१} + \cdots$$

$$= \text{न} + \frac{\text{स}_{१}}{\text{य}} + \frac{\text{स}_{२}}{\text{य}^{२}} + \frac{\text{स}_{३}}{\text{य}^{३}} + \cdots\cdots$$

इसलिये य फ′(य) इसमें बीजगणित की साधारण रीति से फ(य) का भाग देने से लब्धि में जो $\frac{१}{\text{य}}$, $\frac{१}{\text{य}^{२}}$, इत्यादि के गुणक होंगे वे $\text{स}_{१}$, $\text{स}_{२}$ इत्यादि के मान आ जायँगे।

१६१—$फ(य) = ०$ इसमें मानों के ऋणात्मक घातों का योग जानना हो तो $फ(य)$ में $य = \frac{१}{र}$ ऐसा मानने से जो र के रूप में समीकरण बनेगा उसमें र के मानों के वही धनात्मक घातों के योग का जो मान होगा वही य के मानों के ऋणात्मक घातों का योग होगा क्योंकि $य = \frac{१}{र} \therefore र = \frac{१}{य}$ और

$र^{म} = \frac{१}{य^{म}} = य^{-म}$। अथवा ऊपर के प्रक्रम में जो

$$स_{म} + प_{१}स_{म-१} + प_{२}स_{म-२} + \cdots\cdots + प_{न}स_{म-न} = ०$$

यह सिद्ध हुआ है इसमें म के स्थान में $न-१, न-२, न-३,$ इत्यादि के उत्थापन से पूर्वयुक्ति से $स_{-१}, स_{-२}$ इत्यादि के मान आ जायँगे।

१६२—$यौ\ अ^{म}क^{प}$ इसका मान जानने के लिये उपाय पूर्वसिद्ध है कि

$$स_{म} = अ^{म} + क^{म} + ख^{म} + \cdots\cdots$$

$$स_{प}' = अ^{प} + क^{प} + ख^{प} + \cdots\cdots$$

दोनों के गुणन से

$$स_{म}स_{प} = अ^{म+प} + क^{म+प} + ख^{म+प} + \cdots\cdots$$

$$+ अ^{म}क^{प} + अ^{म}ख^{प} + क^{म}अ^{प} + \cdots\cdots$$

$$= स_{म+प} + यौ\ अ^{म}क^{प}$$

$$इसलिये\ यौ\ अ^{म}क^{प} = स_{म}स_{प} - स_{म+प} \cdots\cdots \cdots (१)$$

इसमें यह मान लिया गया है कि म और प परस्पर अतुल्य हैं। यदि $म = प$ तो $यौ\ अ^{म}क^{प}$ इसमें दो दो तुल्य होंगे। इसलिये

$$\text{यौ } अ^{म}क^{प} = २ \text{ यौ } (अक)^{म} \text{ और तब } (१) \text{ से } २\text{यौ } (अक)^{म} = स_{म}^{२} - स_{२म} ।$$

१६३—इसी प्रकार तृतीय क्रम फल यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ इसका मान जानना हो तो

$$\text{यौ } अ^{म}क^{प} = अ^{म}क^{प} + क^{म}ख^{प} + अ^{म}ख^{प} + \cdots\cdots$$

$$स_{व} = अ^{व} + क^{व} + ख^{व} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

दोनों के गुणन से

$$स_{व} \text{ यौ } अ^{म}क^{प} = अ^{म+व}क^{प} + क^{म-व}ख^{प} + ख^{म+व}अ^{प} + \cdots\cdots$$
$$+ अ^{म}क^{प+व} + क^{म}ख^{प-व} + ख^{म}अ^{प+व} + \cdots\cdots$$
$$+ अ^{म}क^{प}ख^{व} + \cdots$$

दक्षिण पक्ष में तीन प्रकार के समूह हैं जिन्हें १५९वें प्रक्रम की संकेत युक्ति से क्रम से यौ $अ^{म+व}क^{प}$, यौ $अ^{म}क^{प+व}$ और यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ इन संकेतों से प्रकाश कर सकते हैं। इसलिये

$$स_{व} \text{ यौ } अ^{म}क^{प} = \text{यौ } अ^{म+व}क^{प} + \text{यौ } अ^{म}क^{प+व} + \text{यौ } अ^{म}क^{प}ख^{व}$$

१६२वें प्रक्रम के (१) से यौ $अ^{म}क^{प}$, यौ $अ^{म+व}क^{प}$ और यौ $अ^{म}क^{प+व}$ = यौ $अ^{प+व}क^{म}$ के मान रखने से और समशोधन से

$$\text{यौ } अ^{म}क^{प}ख^{व} = स_{म}स_{प}स_{व} - स_{व}स_{म+प} - स_{म+व}स_{प} + स_{म-प+व}$$
$$- स_{म}स_{प+व} + स_{म+प+व}$$

$$= स_{म}स_{प}स_{व} - स_{व}स_{म+प} - स_{म+व}स_{प} - स_{म}स_{प+व} + २स_{म+प+व} \cdot (१)$$

यहां भी यह मान लिया है कि म, प और व अतुल्य हैं। यदि म = प तो १६२वें प्रक्रम से

$$२ \text{ यौ } (अक)^{म}ख^{प} = स_{म}^{२}स_{व} - स_{२म}स_{व} - स_{म+व}स_{म} - स_{म+व}स_{म} + २स_{२म+व}$$

$$= स_{म}^{२}स_{व} - स_{२म}स_{व} - २स_{म+व}स_{म} + २स_{२म+व}, \cdots (२)$$

यदि म = प = व तो यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ इसमें ६,६ पद समान होंगे; इसलिये यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}$ = १·२ ३ यौ $(अ\ क\ ख)^{म}$

तब ६ यौ $(अ\ क\ ख)^{म} = स^{३}_{म} - ३स_{२म}स_{म} + २स_{३म}$ ......(३)

इसी प्रकार यौ $अ^{म}क^{प}ख^{ब}$ के मान से ऊपर ही की युक्ति से यौ $अ^{म}क^{प}ख^{फ}ग^{भ}$ इत्यादि के मान भी जान सकते हो।

यदि म = प = व = भ,....... इत्यादि त संख्यायें परस्पर समान हों तो अङ्कपाश की युक्ति से १·२ ३......त, इतने पदों में समान ही होंगे। इसलिये तब यौ $अ^{म}क^{प}ख^{व}ग^{भ}$... = १·२·३ ......त यौ $(अ\ क\ ख\ ग......)^{म}$ ऐसा होगा।

इस प्रकार से सिद्ध हो गया कि मानों के द्वितीय, तृतीय इत्यादि क्रम के फलों के मानों का योग समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में आता है।

१६४—१६०वें प्रक्रम में मानों के वर्गादि योग के लिये जो न्यूटन की रीति दिखलाई गई है उसमें पिछले-योगों के वश से तब अगले योग का मान निकलता है; इस प्रक्रम में बिना पिछले योगों के जाने इष्टघात संबन्धि योग जानने के लिये रीति दिखलाते हैं।

मान लो कि फ (य) = ० इसमें य के मान अ, क, ख, ग, हैं। और समीकरण न घात का है तो

$$फ\,(य) = (य - अ)\,(य - क)\,(य - ख)\,(य - ग) \cdots\cdots$$

दोनों में $य^{न}$ का भाग देने से

$$\frac{फ\,(य)}{य^{न}} = \left(१ - \frac{अ}{य}\right)\left(१ - \frac{क}{य}\right)\left(१ - \frac{ख}{य}\right)\left(१ - \frac{ग}{य}\right)\cdots\cdots$$

दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से

$$\text{ला}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}} = -\frac{१}{\text{य}}(\text{अ}+\text{क}+\text{ख}+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{१}{२\text{य}^{२}}(\text{अ}^{२}+\text{क}^{२}+\text{ख}^{२}+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{१}{३\text{य}^{३}}(\text{अ}^{३}+\text{क}^{३}+\text{ख}^{३}+\cdots\cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

$$= -\frac{\text{स}_{१}}{\text{य}} - \frac{\text{स}_{२}}{२\text{य}^{२}} - \frac{\text{स}_{३}}{३\text{य}^{३}} - \cdots - \frac{\text{स}^{\text{म}}}{\text{म}\text{य}^{\text{म}}}$$

इसलिये ला $\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}}$ इसमें य के म घात का जो गुणक $\text{गु}_{\text{म}}$

हो तो $-\text{गु}_{\text{म}} = \frac{\text{स}_{\text{म}}}{\text{म}}$ $\therefore$ $\text{स}_{\text{म}} = -\text{म}\text{गु}_{\text{म}}$ ।

जैसे उदाहरण—(१) $\text{य}^{२} - \text{प}\text{य} + \text{व} = ०$ इसमें

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}} = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{२}} = १ - \left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{व}}{\text{य}^{२}}\right) \text{ इसलिये}$$

$$-\text{ला}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}} = -\text{ला}\left\{१ - \left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{व}}{\text{य}^{२}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{व}}{\text{य}^{२}} + \frac{१}{२}\left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{व}}{\text{य}^{२}}\right)^{२} + \frac{१}{३}\left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{व}}{\text{य}^{२}}\right)^{३}$$

$$+\cdots\cdots + \frac{१}{\text{म}}\left(\frac{\text{प}}{\text{य}} - \frac{\text{व}}{\text{य}^{२}}\right)^{\text{म}}$$

सब पदों में से चुन लेने से $\frac{१}{\text{य}_{\text{म}}}$ का गुणक अब जान सकते हो। ऊपर के मान को उलटे क्रम से लिखने से

$$\frac{१}{म}\left(\frac{प}{य}-\frac{ब}{य^२}\right)^म+\frac{१}{म-१}\left(\frac{प}{य}-\frac{ब}{य^२}\right)^{म-१}$$
$$+\frac{१}{म-२}\left(\frac{प}{य}-\frac{ब}{य^२}\right)^{म-२}+\cdots\cdots$$

इसमें $\frac{१}{य^म}$ गुणकों को इकट्ठा करने से $\frac{१}{य^म}$ का गुणक

$$गु_म=\frac{१}{म}प^म-\frac{१}{म-१}प^{म-२}ब$$
$$+\frac{१}{म-२}\frac{(म-२)(म-३)}{२!}प^{म-४}ब^२\quad\cdots\cdots$$ इसलिये

$$स_म=प^म-मप^{म-२}ब+\frac{म(म+३)}{२!}प^{म-४}ब^२-\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{त(-१)म(म-त-१)\cdots(म-२त-१)}{त!}प^{म-२त}ब^त+\cdots$$

१६५—$फ(य)=य^न+प_१य^{न-१}+प_२य^{न-२}+प_३य^{न-३}$
$$+\cdots\cdots\cdots+प_न$$
$$\equiv(य-अ)(य-क)(य-ख)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

जहां फ (य) = ० इसमें अव्यक्त के मान अ, क, ख,·· हैं। ऊपर के सरूप समीकरण में य के स्थान में $\frac{१}{र}$ का उत्थापन देने से $१+प_१र+प_२र^२+प_३र^३+\cdots\cdots\cdots\cdots+प_नर^न$ $\equiv(१-अर)(१-कर)(१-खर)\cdots\cdots$ (सरूप समीकरणों की समता दिखाने के लिये $\equiv$ चिन्ह लिखते हैं। जिन दो अव्यक्त-राशिओं के बीच ऐसा चिन्ह देखो समझो कि सरूप समीकरण हैं जहां दोनों पक्षों के अव्यक्त के स्थान में चाहे जिस संख्या का

ो सर्वदा दोनों पक्ष सम रहेंगे।) ऊपर के सरूपसमीकरण में उत्थापन दोनों पक्षों का लघुरिक्थ लेने से और

$$(च+छ+ज+\quad\cdots\cdots)र = \left.\begin{array}{l}च\\+छ\\+ज\end{array}\right| र$$ ऐसे संकेत से लिखने से

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
प_1 र + प_2 & र^2 + प_3 & र^3 + प_4 & र^4 + प_5 & र^5 + \cdot + पा_त र^त \\
\quad -\tfrac{1}{2}प_1^2 & -प_1 प_2 & -प_1 प_3 & -प_2 प_3 & +\cdots\cdots \\
 & +\tfrac{1}{2}प^3 & -\tfrac{1}{2}प_1^2 & +प_1 प_2^2 & \\
 & & +प_1^2 प_2 & +प_1^2 प_3 & \\
 & & -\tfrac{1}{4}प_1^4 & -प_1 प_4 & \\
 & & & -प_1^3 प_2 & \\
 & & & +\tfrac{1}{5}प_1^5 &
\end{array}$$

$$\equiv -स_1 र - \tfrac{1}{2}स_2 र^2 - \tfrac{1}{3}स_3 र^3 - \cdots\cdots - \tfrac{1}{त}स_त र^त - \cdots\cdots$$

दोनों पक्षों के $र^त$ का गुणक समान करने से

$स_त = -तपा_त$ जहां $पा_त$, लार^न $\left(\frac{1}{र}\right)$ इसमें $र^त$ का गुणक है। न के स्थान में म को रख देने से इस युक्ति से भी $स_म$ का मान जान सकते हो।

१६६—समीकरण में पदों के गुणकों के मान अव्यक्त-मानों के एक द्वि-त्र्यादि घातों के रूप में ले आने के लिये युक्ति। ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध है कि ला $(1 + प_1 र + प_2 र^2 + प_3 र^3 + \cdots\cdots + प_न र^न) \equiv -स_1 र - \tfrac{1}{2}स_2 र^2 - \tfrac{1}{3}स_3 र^3 - \cdots\cdots\cdots\cdots$

इसलिये

$$1 + प_1 र + प_2 र^2 + प_3 र^3 + \cdots\cdots + प_त र^त =$$

$$इ^{-स_1 र - \frac{1}{2}स_2 र^2 - \frac{1}{3}स_3 र^3 - \cdots\cdots\cdots}$$

जिसका विस्तृत रूप दीर्घवृत्त लक्षण से

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
१ - स_१ र - \frac{१}{२} स_२ & र^२ - \frac{१}{३} स_३ & र^३ - \frac{१}{४} स_४ & र^४ - \cdots\cdots \\
+ \frac{१}{२!} स_१^२ & + \frac{स_१ स_२}{२!} & + \frac{१}{३} स_१ स_३ & \\
 & - \frac{स_१^३}{३!} & - \frac{१}{४} स_१^२ स_२ & \\
 & & + \frac{१}{२\ ४} स_२^२ & \\
 & & + \frac{स_१^४}{४!} &
\end{array}
$$

अब दोनों पक्षों में र के समान घातों के गुणक समान करने से $प_१, प_२$ इत्यादि के मान $स_१, स_२$ इत्यादि के रूप में आजायंगे।

१६७—इस प्रक्रम में इस अध्याय में दिखाए हुए प्रकारों की व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

उदाहरण—(१) $फा(अ_१) + फा(अ_२) + फा(अ_३) + \cdots + फा(अ_न)$ इसका मान निकालो। जहां $फ(य) = ०$ इस न घात समीकरण में अव्यक्त के मान क्रम से $अ_१, अ_२, अ_३ \cdots अ_न$ हैं।

सिद्ध है कि

$$\frac{फ'(य)}{फ(य)} = \frac{१}{य - अ_१} + \frac{१}{य - अ_२} + \frac{१}{य - अ_३} + \cdots\cdots + \frac{१}{य - अ_न}$$

$$\text{और } \frac{फ'(य) फा(य)}{फ(य)} = \frac{फा(य)}{य - अ_१} + \frac{फा(य)}{य - अ_२} + \frac{फा(य)}{य - अ_३} + \cdots\cdots + \frac{फा(य)}{य - अ_न}$$

हरों से तष्ट कर देने से

$$\frac{\text{ता}_0\text{य}^{\text{न}-1}+\text{ता}_1\text{य}^{\text{न}-2}+\cdots+\text{ता}_{\text{न}-1}}{\text{फ}(\text{य})}=\frac{\text{फा}(\text{अ}_1)}{\text{य}-\text{अ}_1}+\frac{\text{फा}(\text{अ}_2)}{\text{य}-\text{अ}_2}+\cdots+\frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{न})}{\text{य}-\text{अ}_\text{न}}$$

छेदगम से

$\text{ता}_0\text{य}^{\text{न}-1}+\text{ता}_1\text{य}^{\text{न}-2}+\cdots+\text{ता}_{\text{न}-1}=$
यौ $\text{फा}(\text{अ}_1)(\text{य}-\text{अ}_2)(\text{य}-\text{अ}_3)\cdots(\text{य}-\text{अ}_\text{न})$ $\text{य}^{\text{न}-1}$ के गुणक को दोनों पक्षों में समान करने से

$$\text{ता}_0=\text{फा}(\text{अ}_1)+\text{फा}(\text{अ}_2)+\cdots+\text{फा}(\text{अ}_\text{न})=\text{यौ फा}(\text{अ}_1)$$

(२) सिद्ध करो कि $\underset{\text{त}=1}{\overset{\text{त}=\text{न}}{\text{यौ}}}\frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{त})}{\text{फ}'(\text{अ}_\text{त})}=0$ यदि $\underset{\text{त}}{\text{यौ}}\,{}^{=\text{न}}_{=1}$ इससे यह समझा जाय कि त के स्थान में, १, २, ३, · · · न उत्थापन देने से जितने पद होंगे सब का योग है। और फा (य) ऊपर के उदा० में अकरणी गत अभिन्न य का फल है जिसमें य का सब से बड़ा घात < न है।

यहां चलराशिकलन के १५वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{फा}(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})}=\frac{\text{आ}_1}{\text{य}-\text{अ}_1}+\frac{\text{आ}_2}{\text{य}-\text{अ}_2}+\cdots+\frac{\text{आ}_\text{न}}{\text{य}-\text{अ}_\text{न}}$$

$$=\frac{\text{फा}(\text{अ}_1)}{\text{फ}'(\text{अ}_1)}\cdot\frac{1}{\text{य}-\text{अ}_1}+\frac{\text{फा}(\text{अ}_2)}{\text{फ}'(\text{अ}_2)}\cdot\frac{1}{\text{य}-\text{अ}_2}+\cdots\cdots+\frac{\text{फा}(\text{अ}_\text{न})}{\text{फ}'(\text{अ}_\text{न})}\cdot\frac{1}{\text{य}-\text{अ}_\text{न}}$$

$$\therefore \frac{य\,फा(य)}{फ(य)} = {}_{त}^{त}यौ^{=न}_{=१} \frac{फा(अ_त)}{फ'(अ_त)}\left(१+\frac{अ_त}{य}+\frac{अ_त^२}{य^२}+\cdots\cdots\right)$$

जब फा (य) में य का सब से बड़ा घात न – २ होगा तो य से गुणने से य फा (य) इसमें सबसे बड़ा घात न – १ होगा; इसलिये $\frac{य\,फा(य)}{फ(य)} = \frac{का_१}{य} + \frac{का_२}{य^२} + \cdots\cdots\cdots$ इस रूप का होगा और यदि सब से बड़ा घात $<$न – २ तो $\frac{य\,फा(य)}{फ(य)}$ इसका विस्तृत रूप जो $\frac{१}{य}$ इसके घात वृद्धि में होगा उसमें $\frac{१}{य}$ इसके वर्गादि रहेंगे। व्यक्ताङ्क वा $\frac{१}{य}$ नहीं रहेंगे। ∴दहिने पक्ष में जो व्यक्ताङ्क ${}_{त}^{त}यौ^{=न}_{=१} \frac{फा(अ_त)}{फ'(अ_त)}$ यह है; वह अवश्य सर्वदा शून्य के तुल्य होगा।

फा, यह अकरणी गत अभिन्न, न – २ घात से अल्प य का फल है; इसलिये फा $(अ_१) = अ_१^{न-२}, अ_१^{न-३}, अ_१^{न-४}, \ldots\ldots अ_१^०$ मानने से ऊपर की युक्ति से

$$यौ\,\frac{अ_१^{न-२}}{फ'(अ_१)} = ०,\; यौ\,\frac{अ_१^{न-३}}{फ'(अ_१)} = ०\cdots\cdots,\; यौ\,\frac{अ_१}{फ'(अ_१)} = ०,$$

$$यौ\,\frac{१}{फ'(अ_१)} = ०\,।$$

(३) जिन वर्णों के घातों के गुणनफल में घात संख्याओं का योग स्थिर रहता है ऐसे गुणनफल को ध्रुवशक्तिक कहते हैं। और इनसे बने हुए समीकरण को ध्रुवशक्तिक समीकरण

कहते हैं। जैसे, $य^४$, $य^३र$, $य^२र^२$, $यर^३$, $र^४$ इन सब को दो वर्णों का ध्रुवशक्तिक गुणनफल कहते हैं। और $य^४+य^३र+य^२र^२+यर^३+र^४+क=०$ इसे दो वर्णों का ध्रुवशक्तिक समीकरण कहते हैं जहां ध्रुवशक्ति का प्रमाण ४ है।

$फ(य)=०$ इसमें जितने अव्यक्तमान हैं उनके ध्रुवशक्तिक गुणनफलों के योग $श_त$ को बताओ जहां त ध्रुवशक्ति का प्रमाण है अर्थात् घात संख्याओं का योग है। मान लो कि $अ_१$, $अ_२ \cdots अ_न$ अव्यक्तमान हैं तो $र=\frac{१}{य}$ मानने से

$$\frac{य^न}{फ(य)}=\frac{१}{(१-अ_१र)(१-अ_२र)\cdots(१-अ_नर)}$$

$$=(१+अ_१र+अ_१^२र^२+\cdots)(१+अ_२र+अ_२^२र^२+\cdots)\cdots\cdots(१+अ_नर+अ_न^२र^२+\cdots\cdots)$$

$$=१+श_१र+श_२र^२+श_३र^३+\cdots+श_तर^त+\cdots\cdots$$

और $\frac{य^{न-१}}{फ(य)}=यौ\frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)}\cdot\frac{१}{य-अ_१}$ (२) उदाहरण से;

$$\text{इसलिये } \frac{य^न}{फ(य)}=यौ\frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)}\cdot\frac{य}{य-अ_१}$$

$$=यौ\frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)}\cdot\frac{१}{१-अ_१र}$$

$$=यौ\frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)}(१+अ_१र+अ_१^२र^२+\cdots\cdots+अ_१^तर^त+\cdots\cdots)$$

$$=यौ\frac{अ_१^{न+त-१}}{फ'(अ_१)}र^त$$

दोनों सरूप समीकरणों में $र^{त}$ का गुणक समान करने से

$$श_{त} = यो \frac{अ_{१}^{न+त-१}}{फ'(अ_{१})} ।$$

(४) मानों के ध्रुवशक्तिक गुणनफल के रूप में समीकरण के पदों का गुणक बतावो। और इसका विपरीत गुणकों के रूप में मानों के ध्रुवशक्तिक गुणनफलों को बतावो। पिछले उदाहरण से

$$(१-अ_{१}र)(१-अ_{२}र)\cdots\cdots(१-अ_{न}र) = १+प_{१}र + प_{२}र^{२}+\cdots\cdots प_{न}र^{न}$$

और $$\frac{१}{(१-अ_{१}र)(१-अ_{२}र)} = १+श_{१}र+श_{२}र^{२}+\cdots\cdots$$

$$\therefore १ = (१+प_{१}र+प_{२}र^{२}+\cdots\cdots+प_{न}र^{न})(१+श_{१}र + श_{२}र^{२}+\cdots\cdots)$$

गुणन करने से सरूप समीकरण की युक्ति से

$$प_{१}+श_{१} = ०$$

$$प_{२}+श_{२}+प_{१}श_{१} = ०$$

$$प_{३}+श_{३}+प_{१}श_{२}+प_{२}श_{१} = ० \quad \text{इत्यादि}$$

इनसे $श_{१}, श_{२}$ इत्यादि के रूप में $प_{१}, प_{२},$ इत्यादि और $प_{१}, प_{२},$ इत्यादि के रूप में $श_{१}, श_{२}$ इत्यादि आवेंगे। इनमें यदि $त < न$ तो $प_{१}, प_{२}\cdots\cdots$ और $श_{१}, श_{२}$ इत्यादि को परस्पर बदल देने से भी समीकरण ज्यों के त्यों बने रहेंगे। इससे और पिछले उदाहरण से समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में

यौ $\frac{अ_१^{न-१}}{फ'(अ_१)}$, यौ $\frac{अ_१^{न}}{फ'(अ_१)}$, यौ $\frac{अ_१^{न+१}}{फ'(अ_१)}$,........इन तद्रूपफलों के मान निकल आवेंगे।

(५) $श_न$ को अव्यक्तमानों के वर्गादिकों के योग के रूप में ले आवो।

यदि $(१-अ_१र)(१-अ_२र)\cdots\cdots(१-अ_नर) = \frac{१}{स}$

दोनों का लघुरिक्थ लेने से

$ला(१-अ_१र) + ला(१-अ_२र) + \cdots + ला(१-अ_नर) = ला\ स$

चलनकलन से र के वश से तात्कालिक संबन्ध निकालने से

$$\frac{अ_१}{१-अ_१र} + \frac{अ_२}{१-अ_२र} + \cdots = यौ\frac{अ_१}{१-अ_१र} = स_१ + स_२र$$

$$+ स_३र^२ + \cdots\cdots = \frac{१}{स}\frac{ता\ स}{ता\ र}$$

और पिछले उदाहरण से $स = १ + श_१र + श_२र^२ + \cdots\cdots$

इसलिये $\frac{ता\ स}{ता\ र} = श_१ + २श_२र + ३श_३र^२ + \cdots\cdots\cdots\cdots$इनके उत्थापन से $(स_१ + स_२र + स_३र^२ + \ldots)(१ + श_१र + श_२र^२ + \cdots) = श_१ + २श_२र + ३श_३र^२ + \cdots\cdots\cdots$अब र के समान घातों के गुणकों को सम करने से $स_१, स_२$......के रूप में $श_१, श_२$...... आ जायंगे। इस प्रकार अनेक चमत्कार उत्पन्न होते हैं।

१६८—इस प्रक्रम में कुछ और सहज युक्तिआं उदाहरण करने के लिये दिखलाते हैं।

उदाहरण—(१) $फ(य) = 0 = य^{न} + प_1 य^{न-1} + \ldots\ldots$ $+ प_{न}$ इसमें जो अव्यक्त के मान $अ_1, अ_2, अ_3 \ldots\ldots अ_{न}$ माने जायं तो यौ $अ_1^2 अ_2 अ_3$ इसका मान निकालो।

$$यहां\ यौ\ अ_1 = -प_1$$

$$यौ\ अ_1 अ_2 अ_3 = -प_3$$

इनके गुणनफल में $अ_1^2 अ_2 अ_3$ यह तो एक बेर आवेगा। $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$ यह चार बार आवेगा। एक बार $अ_1, अ_2 अ_3 अ_4$, दूसरे बार $अ_2, अ_1 अ_3 अ_4$, तीसरे बार $अ_3, अ_1 अ_2 अ_4$, और चौथे बार $अ_4, अ_1 अ_2 अ_3$, से इसलिये यौ$अ_1^2 अ_2 अ_3$ + ४यौ$अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$ $= प_1 प_3$

$\therefore$ यौ $अ_1^2 अ_2 अ_3 = प_1 प_3 -$ ४यौ $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4 = प_1 प_3$ + ४यौ $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4 = प_1 प_3 - 4 प_4$। १८३वें प्रक्रम में म = २, प = व = १ मानने से

$$- 2 यौ\ अ_1^2 अ_2 अ_3 = स_2 स_1^2 - 2 स_1 स_3 - स_2^2 + 2 स_4$$

इसमें $स_1, स_2$ इत्यादि के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में ले आने से ऊपर ही का मान बड़े परिश्रम से निकलेगा जो ऊपर की युक्ति से बड़े लाघव से आया है।

(२) यौ $अ_1^2 अ_2^2$ इसका मान निकालो।

$$यहां\ यौ\ अ_1 अ_2 = प_2$$

वर्ग करने से

यौ $अ_1^2 अ_2^2$ + २यौ $अ_1^2 अ_2 अ_3$ + ६यौ $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4 = प_2^2$ वर्ग करने में $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$ यह पद $अ_1 अ_2, अ_3 अ_4$। $अ_1 अ_3, अ_2 अ_4$। और $अ_1 अ_4, अ_2 अ_3$ इनके गुणन से उत्पन्न होगा। इसलिये वर्ग करने में दो बार आने से $अ_1 अ_2 अ_3 अ_4$ यह छः बार आवेगा। इसलिये

$$\text{यौ}(\text{अ}_1\text{अ}_2)^2 = \text{प}_2^2 - 2\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3 - 6\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4$$
$$= \text{प}_2^2 - 2\text{प}_1\text{प}_3 + 8\text{प}_4 - 6\text{प}_4$$
$$= \text{प}_2^2 - 2\text{प}_1\text{प}_3 + 2\text{प}_4 \text{ ।}$$

(३) $\text{यौ}\,\text{अ}_1^3\text{अ}_2$ इसका मान निकालो।

यहां $\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2 = \text{यौ}\,\text{अ}_1^3\text{अ}_2 + \text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3$ पिछले मानों का उत्थापन देने से

$$\text{यौ}\,\text{अ}_1^3\text{अ}_2 = \text{प}_1^2\text{प}_2 - 2\text{प}_2^2 - \text{प}_1\text{प}_3 + 4\text{प}_4$$

(४) $\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3$ इसके मान के लिये $\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3$

$$= \text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3 + 3\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4 + 10\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5$$ और

$\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4$ इसके मान के लिये

$$\text{यौ}\,\text{अ}_1\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4 = \text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4 + 5\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5$$

इस पर से और दो पिछले मानों से

$$\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3 = -\text{प}_2\text{प}_3 + 3\text{प}_1\text{प}_4 - 5\text{प}_5$$

यही १६३वें प्रक्रम के दूसरे समीकरण से भी बड़े प्रयास से आवेगा जहां स = २ और प = १ है।

(५) $\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3\text{अ}_4$ इसके मान के लिये $\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2$ और $\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4$ इनका गुणनफल निकालना चाहिये।

$$\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4 = \text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2^2\text{अ}_3\text{अ}_4 + 4\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5$$
$$+ 15\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5\text{अ}_6$$ और $\text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5$ इसके लिये

$$\text{यौ}\,\text{अ}_1\;\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5 = \text{यौ}\,\text{अ}_1^2\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5$$
$$+ 6\text{यौ}\,\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3\text{अ}_4\text{अ}_5\text{अ}_6$$

इनके उत्थापन से

$यौ अ^{२}_{१} अ^{२}_{२} अ_{३} अ_{४} = प_{२} प_{४} - ४ प_{१} प_{५} + ९ प_{६}$

(६) $यौ अ^{२}_{१} अ^{२}_{२} अ^{२}_{३}$ इसका मान निकालो।

यहां $यौ अ_{१} अ_{२} अ_{३}$ इसके वर्ग से

$यौ अ_{१} अ_{२} अ_{३} \; यौ अ_{१} अ_{२} अ_{३}$

$$= यौ अ^{२}_{१} अ^{२}_{२} अ^{२}_{३} + २ यौ अ^{२}_{१} अ^{२}_{२} अ_{३} अ_{४} + ६ यौ अ^{२}_{१} अ_{२} अ_{३} अ_{४} अ_{५} + २० यौ अ_{१} अ_{२} अ_{३} अ_{४} अ_{५} अ_{६}$$

∴ इस पर से

$यौ अ^{२}_{१} अ^{२}_{२} अ^{२}_{३} = प^{२}_{३} - २ प_{२} प_{४} + २ प_{१} प_{५} - २ प_{६}$ ।

इस तरह लाघव से सैकड़ों उदाहरणों का उत्तर निकल सकता है।

१६९—ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है कि जिस तद्रूप-फलों में जो ध्रुवशक्ति है उसी के तुल्य, उत्तर के प्रत्येक पदों में समीकरण के गुणक संख्याओं का योग होता है और तद्रूप-फल में जो सब से बड़ी घात संख्या है उससे अल्प वा उसी के तुल्य उत्तर के प्रत्येक पद में समीकरण के गुणकों के घात संख्या का योग होता है। जैसे—$यौ अ^{३}_{१} अ_{२} = ४ प_{४} - प_{१} प_{३} + प^{२}_{१} प_{२} - २ प^{२}_{२}$, इसमें $यौ अ^{३}_{१} अ_{२}$ ध्रुवशक्ति ३ + १ = ४ है और सब से बड़ा घात ३ है (इस बड़े घात को सोपान कहो) तो उत्तर में, पहले पद में $प_{४}$ है इसमें गुणक संख्या ४, ध्रुवशक्ति के तुल्य है, दूसरे पद में भी ३ + १ = ४ गुणक संख्याओं का योग ध्रुवशक्ति ही के तुल्य है। तीसरे पद में भी $प^{२}_{१} प_{२} = प_{१} प_{१} प_{२}$ गुणकों के संख्या का योग ध्रुवशक्ति ही के तुल्य है

इसी प्रकार चौथे पद $प_४ = प^१_४$ में घात संख्या एक सोपान से अल्प, दूसरे पद $प_१ प_३ = प^१_१ प^१_३$ में भी घात संख्याओं का योग १ + १ = २ सोपान से अल्प, तीसरे पद $प^२_१ प_२ = प^२_१ प^१_२$ में घात संख्याओं का योग २ + १ = ३ सोपान के तुल्य और चौथे पद में भी घात संख्या २ वह सोपान से अल्प ही है। यही रीति सब में पाई जाती है; इसलिये ऊपर जो अनुगम लिखा है वह सत्य है।

उदाहरण—(१) यौ $अ^२_१ अ^२_२ अ^२_३ अ^२_४$ इसका मान बताओ।

यहां ध्रुव शक्ति = २ + २ + २ + २ = ८ और सोपान २ है इसलिये ऊपर के अनुगम से

$$यौ\, अ^२_१ अ^२_२ अ^२_३ अ^२_४ = ट_० प_८ + ट_१ प_१ प_७ + ट_२ प_२ प_६ + ट_३ प_३ प_५ + ट_४ प^२_४ \,।$$

जहां $ट_०$, $ट_१$ इत्यादि व्यक्त गुणक हैं। यहां $प_१ प_१ प_६ = प^२_१ प_६$, $प_१ प_२ प_५$, $प_१ प_१ प_१ प_५ = प^३_१ प_५$ इत्यादि पद न आवेंगे क्योंकि इनमें गुणकों के संख्याओं का योग तो ध्रुवशक्ति के समान है परन्तु घात संख्याओं का योग सोपान से बड़ा हो जाता है: इसलिये दोनों धर्म के न रहने से वे पद नहीं लिए गए, इसी प्रकार $प^३_१$, $प^३_२$, $प^३_३$ इत्यादि पद भी केवल सोपान सम्बन्धी एक ही धर्म के रहने से नहीं लिए गए।

१७०—१६६वें प्रक्रम से

$$ला\,(१ + प_१ र + प_२ र^२ + \cdots + प_न र^न) =$$

$$स_१ र - \frac{१}{२} स_२ र^२ - \frac{१}{३} स_३ र^३ \ldots\ldots - \frac{१}{त} स_त र^त \ldots\ldots$$

चलनकलन से $स_त$ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}}{\text{तास}_\text{त}}\left(१+\text{प}_१\text{र}+\text{प}_२\text{र}^२+\cdots\cdots+\text{प}_\text{न}\text{र}^\text{न}\right)=$$

$$-\left(१+\text{प}_१\text{र}+\text{प}_२\text{र}^२+\cdots+\text{प}_\text{न}\text{र}^\text{न}\right)\frac{\text{र}^\text{त}}{\text{त}},$$

र के भिन्न भिन्न घातों के गुणकों की तुलना करने से

$$\frac{\text{ता प}_\text{व}}{\text{ता स}_\text{त}}=० \text{ यदि व} < \text{त},$$

$$\frac{\text{ताप}_\text{त}}{\text{तास}_\text{त}}=-\frac{१}{\text{त}}, \frac{\text{ता प}_{\text{त}+\text{ज}}}{\text{ता स}_\text{त}}=-\frac{१}{\text{त}}\text{प}_\text{ज}$$

इस चलनसमीकरण को ब्रीओशी (Brioschi) ने निकाला है। इस पर से समीकरण के पदों के गुणकों के कोई फल का तात्कालिक सम्बन्ध $\text{स}_\text{त}$ के वश से निकाल सकते हैं क्योंकि यदि गुणकों का फल $=\text{फी}(\text{प}_१, \text{प}_२, \text{प}_३\ldots\ldots\text{प}_\text{न})$ हो तो ऊपर के समीकरण से

$\frac{\text{ता प}_१}{\text{ता स}_\text{त}}, \frac{\text{ता प}_२}{\text{ता स}_\text{त}}\ldots\ldots\frac{\text{ता प}_{\text{त}-१}}{\text{ता स}_\text{त}}$ ये सब शून्य के तुल्य होंगे; इसलिये

$$\frac{\text{ता}}{\text{ता स}_\text{त}}\text{फी}(\text{प}_१,\text{प}_२,\text{प}_३\cdots\cdots\text{प}_\text{न})=$$

$$\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_\text{त}}\cdot\frac{\text{ता प}_\text{त}}{\text{ता स}_\text{त}}+\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_{\text{त}+१}}\cdot\frac{\text{ता प}_{\text{त}+१}}{\text{ता स}_\text{त}}+\cdots\cdots+\frac{\text{ता फी}}{\text{ता प}_\text{न}}\cdot\frac{\text{ता प}_\text{न}}{\text{ता स}_\text{त}}$$

ऊपर के चलनसमीकरण से $\frac{\text{ता प}_\text{त}}{\text{ता स}_\text{त}}, \frac{\text{ता प}_{\text{त}+१}}{\text{ता स}_\text{त}}$ इत्यादि के मानों का उत्थापन देने से

$$\frac{ता}{ता स_{त}} फी(प_{१}, प_{२}, \cdots\cdots प_{न}) =$$

$$-\frac{१}{त}\left(\frac{ता फी}{ता प_{त}} + प_{१}\frac{ता फी}{ता प_{त+१}} + प_{२}\frac{ता फी}{ता प_{त+२}} + \cdots + प_{न-त}\frac{ता फी}{ता प_{न}}\right)$$

इसके बल से प्रायः तद्रूपफल के मान बड़ी सुगमता से आ जाते हैं; जैसे १६९वें प्रक्रम में जो यो $अ^{२}_{१}अ^{२}_{२}अ^{२}_{३}अ^{२}_{४} = ट_{०}प_{८} + ट_{१}प_{७}प_{१} + ट_{२}प_{६}प_{२} + ट_{३}प_{५}प_{३} + ट_{४}प^{२}_{४}$ यह समीकरण दिखाया है जहां अनुगम से सिद्ध किया है कि $ट_{०}, ट_{१}$, इत्यादि स्थिर व्यक्ताङ्क हैं तहां यदि इन स्थिराङ्कों के मान जानना हो तो चतुर्घात समीकरण से यह तो स्पष्ट ही है कि

$$अ^{२}_{१}अ^{२}_{२}अ^{२}_{३}अ^{२}_{४} = प^{२}_{४} \text{ इसलिये } ट_{४} = १ \text{ ।}$$

औरों के मान जानने के लिये १६३वें प्रक्रम के (१) समीकरण से स्पष्ट है कि यो $अ^{२}_{१}अ^{२}_{२}अ^{२}_{३}अ^{२}_{४}$ इसके मान में $स_{२}$, $स_{४}, स_{६}, स_{८}$ ये ही आवेंगे, इसलिये $\frac{ता फी}{ता स_{३}} = ०$ और $\frac{ता फी}{ता स_{७}} = ०$, इनका मान, $\frac{ता फी}{ता स_{त}}$ इसके जानने के लिये जो ऊपर समीकरण लिख आए हैं उसमें त = ३ और त = ७ मानने से

$$ट_{०}प_{५} + ट_{१}प_{१}प_{४} + ट_{२}प_{३}प_{२} + ट_{३}(प_{२}प_{३} + प_{५}) + २ट_{४}प_{१}प_{४}$$

$$= प_{५}(ट_{०} + ट_{३}) + प_{१}प_{४}(ट_{१} + २ट_{४}) + प_{३}प_{२}(ट_{२} + ट_{३}) = ०$$

$$\text{और } ट_{०}प_{१} + ट_{१}प_{१} = ० \quad = प_{१}(ट_{०} + ट_{१})$$

ये समीकरण $प_{१}, प_{२}$ इत्यादि के भिन्न भिन्न मानों में सर्वदा सत्य हैं; इसलिये

$ट_0+ट_1=0,\ ट_0+ट_3=0,\ ट_1+2ट_4=ट_1+2=0,$ $ट_2+ट_3=0$ इन परसे $ट_1=-2, ट_0=2, ट_3=-2, ट_2=2,$ $ट_4$ का तो मान पहिले ही १ सिद्ध कर आए हैं। इनके उत्थापन से $यौ\ अ^2_1 अ^2_2 अ^2_3 अ^2_4 = 2प_8 - 2प_0प_1 + 2प_6प_2 - 2प_5प_3 + प^2_4$

(२) $यौ\ अ^3_1 अ^2_2 अ_3$ इसका मान जानना है।

यहां ध्रुवशक्ति=३+२+१=६ और सोपान ३ है; इसलिये १६६वें प्रक्रम से

$$यौ\ अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = ट_0प_6 + ट_1प_5प_1 + ट_2प_4प_2 + ट_3प_4प^2_1 + ट_4प^2_3 + ट_5प_1प_2प_3 + ट_6प^3_2$$ और १६३वें प्रक्रम से

$$यौ\ अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = स_1स_2स_3 - स_1स_5 - स^2_3 - स_2स_4 + 2स_6$$

ब्रीओशी के समीकरण से $स_6$ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$ट_0\frac{ताप_6}{तास_6} = -\frac{ट_0}{6} = 2\ \therefore ट_0 = -12\ ।$$

$स_5$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$ट_0प_1 + ट_1प_1 = 5स_1 = -5प_1\ \therefore ट_1 = 7\ ।$$

$स_4$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध से

$$ट_0प_2 + ट_1प^2_1 + ट_2प_2 + ट_3प^2_1 = 4स_2 = 4(प^2_1 - 2प_2)$$

$प_2$ और $प^2_1$ के गुणकों को दोनों पक्षों में समान करने से

$$ट_0 + ट_2 = -8,\ ट_1 + ट_2 = 4\ ।$$

$$\therefore ट_3 = -3,\qquad ट_2 = 4\ ।$$

और $ट_3=0$ होगा क्योंकि यदि न−२ इतने मान समीकरण में शून्य हों तो $यौ\ अ^3_1 अ^2_2 अ_3 = 0$ । और यदि न−१

इतने मान समीकरण में शून्य हों तो $यौ\, अ^{३}_{१}अ^{२}_{२}अ_{३} =$ $अ_{१}अ_{२}अ_{३}अ_{४}$ $यौ\, अ^{२}_{१}अ_{२} - प_{४}\left(-प_{१}प_{२} + ३प_{३}\right) = प_{१}प_{२}प_{३} - ३प^{२}_{३}$

$$\therefore\ ट_{४} = -३,\ ट_{५} = १$$

इनके उत्थापन से

$$यौ\, अ^{३}_{१}अ^{२}_{२}अ_{३} = -१२प_{६} + ७प_{१}प_{५} + ४प_{२}प_{४} - ३प_{४}प^{२}_{१} - ३प^{२}_{३} + प_{१}प_{२}प_{३}$$

इस प्रकार अनेक उदाहरणों के उत्तर सहज में निकल सकते हैं।

१७१—$फ(य) = ०$ इसमें जो अव्यक्त मान हैं उनमें से दो दो के अन्तर को वर्ग के समान जिस समीकरण में अव्यक्त-मान होंगे उस समीकरण को बनाना है।

कल्पना करो कि दिया हुआ समीकरण न घात का है और उसमें अव्यक्त के मान क्रम से

$अ_{१}, अ_{२}, अ_{३} \ldots अ_{न}$ हैं। तो साध्य समीकरण में अव्यक्त-मान जो $(अ_{१} - अ_{२})^{२}, (अ_{१} - अ_{३})^{२}, \ldots (अ_{२} - अ_{३})^{२} \ldots$ ये होंगे, उनकी संख्या एक द्वियादि भेद की युक्ति से $\frac{न(न-१)}{२}$ इतनी होगी; इसलिये साध्य समीकरण $\frac{न(न-१)}{२} = म$ घात का होगा। मान लो कि साध्य समीकरण

$य^{म} + व_{१}य^{म-१} + व_{२}य^{म-२} + \cdots\cdots + व_{म} = ०$ ऐसा है और इसमें अव्यक्त मानों के त घात का योग $सा_{त}$ है तो यदि इसमें $सा_{१}, सा_{२}, \cdots\cdots, सा_{म}$ के मान यदि व्यक्त हो जायं तो

१६०वें प्रक्रम से $सा_१ + व_१ = ०$, $सा_२ + व_१सा_१ + २व_२ = ०$ इत्यादि समीकरणों की सहायता से $व_१$, $व_२$ इत्यादि के मान व्यक्त हो जायँगे।

कल्पना करो कि

$$फी(य) = (य - अ_१)^{२त} + (य - अ_२)^{२त} + (य - अ_३)^{२त} + \cdots$$

तो य के स्थान में $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि के उत्थापन से और उनके योग से

$$२सा_त = फी(अ_१) + फी(अ_२) + फी(अ_३) + \cdots\cdots।$$

दिए हुए समीकरण में अव्यक्त मानों के एक द्वियादि घातों के योग को पूर्ववत् $स_१, स_२, \cdots\cdots स_न$ मानो तो ऊपर फी (य) के मान को द्वियुक्पद सिद्धान्त से फैला कर योग करने से

$$फी(य) = नय^{२त} - २तस_१य^{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१\ २}स_२य^{२त-२} - \cdots\cdots + स_{२त}$$

∴ य के स्थान में क्रम से $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि के उत्थापन और योग से

$$२सा_त = नस_{२त} - २तस_१स_{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१\ २}स_२स_{२त-२} - \cdots\cdots$$

$\cdots\cdots + नस_{२त}$ इसके दहिने पक्ष में आदि पद से आगे अन्तिम पद से पीछे तुल्यान्तर में पद समान हैं; इसलिये इनको इकट्ठा करने से और २ के भाग दे देने से

$$सा_त = नस_{२त} - २तस_१स_{२त-१} + \frac{२त(२त-१)}{१.२} स_२स_{२त-२} - \cdots$$
$$\cdots + \tfrac{१}{२}(-१)^त \frac{२त(२त-१) \cdots (त+१)}{त!} स_त^२$$

$स_१$, $स_२$. इत्यादि दिए हुए समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में पिछले प्रक्रमों से आजायँगे और इनसे ऊपर के समीकरण की सहायता से $सा_त$ का मान भी आवेगा जिससे साध्य समीकरण के पदों के गुणक भी त के स्थान में १,२, इत्यादि के उत्थापन से व्यक्त हो जायगें।

१७९—ऊपर के साध्य समीकरण में अन्तिम पद $व_म$ का मान इस प्रकार से भी जान सकते हो।

दिए हुए न घात समीकरण को मान लो कि $फ(य) = ०$ है तो

$$फ(य) = (य-अ_१)(य-अ_२)(य-अ_३) \cdots$$
$$फ'(य) = (य-अ_२)(य-अ_३) \cdots + (य-अ_१)(य-अ_३) \cdots + \cdots$$

$अ_१$, $अ_२$, इत्यादि के उत्थापन से

$$फ'(अ_१) = (अ_१-अ_२)(अ_१-अ_३) \cdots$$
$$फ'(अ_२) = (अ_२-अ_१)(अ_२-अ_३) \cdots$$

इसलिये $व_म^- = फ'(अ_१)\, फ'(अ_२)\, फ'(अ_३) \cdots$

अब कल्पना करो कि $फ'(य) = ०$ इसमें अव्यक्त मान क्रम से $आ_१$, $आ_२$, $आ_३$, इत्यादि हैं तो

$$फ'(य) = न(य-आ_१)(य-आ_२)(य-आ_३) \cdots$$

इसलिये $फ'(अ_१)\, फ'(अ_२)\, फ'(अ_३) =$

$$न^२(अ_१-आ_१)(अ_१-आ_२)(अ_१-आ_३) \cdots \cdots$$
$$(अ_२-आ_१)(अ_२-आ_२)$$

परन्तु $(अ_1 - आ_1)(अ_2 - आ_1)(अ_3 - आ_1) \cdots\cdots$

$$= (-1)^{न} फ(आ_1)$$

$$(अ_1 - आ_2)(अ_2 - आ_2)(अ_3 - आ_2) \cdots\cdots = (-1)^{न} फ(आ_2)$$

इसी प्रकार से आगे भी जानना तो

$फ'(अ_1)\, फ'(अ_2)\, फ'(अ_3) \cdots\cdots \cdots$

$$= न^2 (-1)^{न(न-1)} फ(आ_1)\, फ(आ_2)\, फा(आ_3) \cdots \cdots$$
$$= म^2\, फ(आ_1)\, फ(आ_2)\, फा(आ_3) \cdots\cdots \cdots \cdots\cdots \cdots$$

क्योंकि न चाहे विषम वा सम हो $न(न-1) = न^2 - न$ यह सर्वदा सम ही रहेगा।

१७३—मानों के अन्तर-वर्ग-मान जिसमें है उस समीकरण में यदि सब अव्यक्त मान धन हो तो स्पष्ट है कि दिए हुए समीकरण में असंभव मान न होंगे। और यदि उसमें ऋण मान हो तो दिए हुए समीकरण में अवश्य असंभव मान होंगे। और यदि उस नये समीकरण में असंभव मान हों तो दिए हुए समीकरण में भी असंभव मान होंगे।

१७४—$प_0 य^{म} + प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \cdots\cdots + प_{म} = 0$

$$ब_0 य^{न} + ब_1 य^{न-1} + ब_2 य^{न-2} + \cdots\cdots + ब_{न} = 0$$

इन समीकरणों में चाहते हैं कि य न रहे। जहां $प_0, प_1, प_2$ $\cdots\cdots$ $ब_0, ब_1, ब_2 \cdots\cdots$ अकरणीगत अभिन्न र के फल हैं। मान लो कि पहिले समीकरण से य के मान र के रूप में किसी युक्ति से अ,क,ख,$\cdots\cdots$ आ गए तो दूसरे समीकरण में य के स्थान में अ,क,ख,$\cdots\cdots$ के उत्थापन से

$$ब_0 अ^{न} + ब_1 अ^{न-1} + ब_2 अ^{न-2} + \cdots\cdots + ब_{न} = 0$$

$$व_0 क^न + व_1 क^{न-1} + व_2 क^{न-2} + \cdot\cdot\cdot + व_न = 0$$

$$व_0 ख^न + व_1 ख^{न-1} + व_2 ख^{न-2} + \cdots\cdots + व_न = 0$$

....

इन समीकरणों में जो अव्यक्त के मान हैं सब र के अव्यक्तमान होंगे। मान लो कि इन सभी समीकरणों में से पहिले समीकरण में एक र का मान $क_1$ है और इसका उत्थापन अ में देने से अ का मान $अ_1$ हुआ तो $य = अ_1$, $र = क_1$ यह ऊपर के दो मुख्य समीकरणों को ठीक करेंगे। क्योंकि ये दोनों दूसरे समीकरण को तो प्रत्यक्ष ही में ठीक करते हैं और पहिले में चाहे र के स्थान में जिसका उत्थापन दें परन्तु सर्वदा समीकरण सत्य रहेगा यदि $य = अ$। इसलिये र के स्थान में $क_1$ के उत्थापन से भी पहिला समीकरण सत्य रहेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि ऊपर जो अ,क,ख,$\cdots$ के वश से समीकरण हैं उनके बाईं ओर के पक्षों को परस्पर गुण देने से गुणनफल शून्य के तुल्य होगा उसमें अ,क,ख,$\cdots\cdots$ ... इनमें किसी दो के परस्पर बदल देने से भी गुणनफल में विकार न होगा। मान ज्यों का त्यों रहेगा। इसलिये गुणनफल अ,क,ख, का तद्रूपफल होगा। तब इस गुणनफल का मान $प_0, प_1, प_2 \ldots\ldots$ के रूप में आ सकता है। जैसे

उदाहरण—(१)

$प_0 य^3 + प_1 य^2 + प_2 य + प_3 = 0$ और $व_0 य^2 + व_1 य + व_2 = 0$ ये दो समीकरण हैं जहां $प_0, प_1, \ldots\ldots; व_0, व_1, \ldots\ldots;$ र के फल हैं तो ऊपर के प्रक्रम के सङ्केत से

$$(व_0 अ^3 + व_1 अ^2 + व_2 अ + व_3)\ (व_0 क^3 + व_1 क^2 + व_2 क + व_3)$$

$$+ (व_0 ख^3 + व_1 ख^2 + व_2 ख + व_3) = 0$$ गुण देने से

$व^3_2 + व^2_1 अकख + व^3_0 अ^2 क^2 ख^2 + व^2_0 व_2$ यौ $अ^2 क^2 +$
$व^2_0 व_1$ यौ $अ^2 क^2 ख + व^2_1 व_2$ यौ $अक + व_1 व^2_2$ यौ $अ +$
$व_0 व^2_2$ यौ $अ^2 + व_0 व^2_1$ यौ $अ^2 कख + व_0 व_1 व_2$ यौ $अ^2 क = 0$

और $\quad अकख = -\frac{प_3}{प_0},\ अ^2 क^2 ख^2 = \frac{प^2_3}{प^2_0}$

$$यौ\ अ^2 क^2 = अ^2 क^2 अ^2\ यौ\ \frac{1}{अ^2} = \frac{प^2_3}{प^2_0}\left(\frac{प^2_2}{प^2_3} - \frac{2 प_1}{प_3}\right)$$

$$यौ\ अ^2 क^2 ख = अकख\ यौ\ अक = -\frac{प_3}{प_0}\ यौ\ अक = -\frac{प_2 प_3}{प^2_0}$$

$$यौ\ अ = -\frac{प_1}{प_0},\ यौ\ अ^2 = \frac{प^2_1}{प^2_0} - \frac{2 प_2}{प_0}$$

$$यौ\ अ^2 कख = अकख\ यौ\ अ = \frac{प_1 प_0}{प^2_0}$$

$$यौ\ अ^2 क = अकख\ यौ\ \frac{अ}{क} = -\frac{प_3}{प_0}\left(\frac{प_1 प_2}{प_0 प_3} - 3\right)$$

(१६७वें प्रक्रम के उदाहरण की युक्ति से)।

गुणनफल में इनके उत्थापन से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें य न रहेगा।

१७५—ऊपर गुणनफल - रूप जो समीकरण बना है उसमें र का सब से बड़ा घात म, न से बड़ा न होगा। यदि पहिले समीकरण $प_0 य^म + प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} \dots\ \dots$ इसमें प्रत्येक पद में $प_0 प_1$, इत्यादि में जो र का घात हो और जो य का घात इनका योग म से अधिक न हो और इसी प्रकार दूसरे समीकरण में भी प्रत्येक पद में र और य के घातों का योग न से अधिक न हो अर्थात् $प_द$ और $व_द$ में र का सब से बड़ा घात द तक हो परन्तु द से अधिक न हो।

कल्पना करो कि १७४वें प्रक्रम की युक्ति से य को उड़ाया तो गुणनफलों में जो पदों की श्रेढी होगी उसमें किसी पद का रूप $व_{त}अ^{न-त} \times व_{थ}क^{न-थ} \times व_{ध}ख^{न-ध} \times .....$ ऐसा होगा जहां गुण्य गुणक रूप खंडों की संख्या म तुल्य होगी। और यह भी जानते हो कि पदों की श्रेढी में अ, क, ख, का तद्रूपफल होगा; इसलिये ऊपर किसी पद का जो रूप दिखाया है वह $व_{त}व_{थ}व_{ध}$ . ...$यौ अ^{न-त}क^{न-थ}ख^{न-ध}$ . . ... ऐसा होगा। इसमें कल्पना से स्पष्ट है कि त + थ + ध + ...इससे बड़ा र का घात. $व_{त}व_{थ}व_{ध}$.. .. इसमें नहीं है और १६०वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि $स_{द}$ में र का सब से बड़ा घात द से बड़ा नहीं होगा और १६२वे प्रक्रम से स्पष्ट हैं कि $यौ अ^{न-त}क^{न-थ}ख^{न-ध}$... .. इसमें जो प्रत्येक पद में गुण्यगुणकरूप इत्यादि आवेंगे उनकी संख्याओं का योग न − त + न − थ + न − ध + · · यही होगा. इसलिये $यौ अ^{न-त}क^{न-थ}ख^{न-ध}$ .. इसमें र का सबसे बड़ा घात

$$न - त + न - थ + न - ध + ... = नम - (त + थ + ध + \cdots)$$

इससे बड़ा नहीं हो सकता, इसलिये

$व_{त}व_{थ}व_{ध}$ .... $यौ अ^{न-त}क^{न-थ}ख^{न-ध}$.. . इसमें र का सब से बड़ा घात

$$नम - (त + थ + ध + ...) + (त + थ + ध + ...) = नम$$

इससे बड़ा नहीं हो सकता।

१७६—जितने समीकरण हों उतने ही उनमें अज्ञात वर्ण हों तो ऊपर की युक्ति से ऐसा एक समीकरण बन सकता है जिसमें एक वर्ण को छोड़ और सब वर्ण उड़ जायेंगे। और बने हुए

समीकरण में जो अज्ञात वर्ण होगा उसका सबसे बड़ा घात दिए हुए समीकरण जितने जितने घात के होंगे उन संख्याओं के गुणनफल से बड़ा नहीं होगा। इस अध्याय में जितनी बातें लिखी हैं उनसे अनेक नये चमत्कृत सिद्धान्त बन सकते हैं। इसलिये अब व्यर्थ ग्रन्थ बढ़ाना नहीं चाहते।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि $य^न - १ = ०$ इसमें $स_म = ०$ यदि म, न का अपवर्त्य न हो और $स_म = न$ यदि म, न का अपवर्त्य हो। (१६४वें प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध करो)

२। यदि $फी(य) = अ_० + अ_१ य + अ_२ य^२ + \cdots\cdots\cdots \infty$ तो इसमें

$$अ_म य^म + अ_{म+न} य^{म+न} + अ_{म+२न} य^{म+२न} + \cdots \cdots\cdots + \infty$$

इसका मान बताओ।

फी (य) और इसके विस्तृत रूप दोनों को $य^न - १ = ०$ इसके मान $आ_१, का_१,$ इत्यादि के न − म घात से अर्थात् $आ_१^{न-म}$, $का_१^{न-म}$ इत्यादि से गुण कर और य के स्थान में $आ_१ य, का_१ य$ इत्यादि का उत्थापन देकर जोड़ लो तो (१) उदाहरण की युक्ति से

$$अ_म य^म + अ_{म+न} य^{म+न} + अ_{म+२न} य^{म+२न} + \cdots\cdots + \infty$$

$$= \frac{१}{न} \left\{ आ_१^{न-म} फी(आ_१ य) + का_१^{न-म} फी(का_१ य) + \right.$$

$$\left. खा_१^{न-म} फी(खा_१ य) + \cdots\cdots \right\}$$

३। $फी(य) = १ + य + \frac{य^२}{२!} + \frac{य^३}{३!} + \frac{य^४}{४!} + \dots\dots + \infty = इ^य$

इसमें $य + \frac{य^४}{४!} + \frac{य^७}{७!} + \dots\dots + \infty$ इसका मान बताओ।

उ० $\frac{१}{३}\{आ^२_१ \, फी(आ_१ य) + का^२_१ \, फी(का_१ य) + खा^२_१ \, फी(खा_१ य)\}$

$$= \frac{१}{३} इ^य - \frac{१}{३} इ^{-\frac{य}{२}} \left(कोज्या \frac{य\sqrt{३}}{२} - \sqrt{३} \, ज्या \frac{य\sqrt{३}}{२}\right)$$

४। सिद्ध करो कि $(य+र)^न - य^न - र^न = फा(य)$ यह $य^२ + यर + र^२$ इससे निःशेष होगा यदि न, धन अभिन्न हो और ३ का अपवर्त्य न हो और $फा(य)$ यह $(य^२ + यर + र^२)^२$ इससे निःशेष होगा यदि न धन अभिन्न $६म + १$ इस रूप का हो।

यदि $य^३ - १ = ०$ इसमें अव्यक्त मान $१, आ_१, का_१$, मानो तो $य^२ + यर + र^२ = (य - आ_१ र)(य - का_१ र)$; इसलिये इसमें $य = आ_१ र$ और $का_१ र$, य के स्थान में $आ_१ र$ और $का_१ र$ के उत्थापन से $फा(य) = ०$ यदि न इनका अपवर्त्य न हो तो $फा(य)$ अवश्य $य^२ + यर + र^२$ इससे निःशेष होगा और उन्हीं के उत्थापन से $फा(य) = ०$ और $फा'(य) = ०$ यदि $न = ६म + १$ तो दो समान मान होने से $फा(य)$ यह $(य^२ + यर + र^२)^२$ इससे निःशेष होगा।

५। $य^न + र^न + (-य - र)^न$ इसका मान $य^२ + यर + र^२$ और $यर(य+र)$ इनके रूप में लाओ।

मान लो कि $अ = य^२ + यर + र^२$, $क = यर(य+र)$ और $ल = -य - र$ तो $य + र + ल = ०$, $यर + रल + लय = यर + ल(र+य)$ $= यर - (य+र)^२ = -अ$ और $यरल = -क$

इसलिये य, र और ल $ट^3 - अट + क = ०$ इस घनसमीकरण में ट के मान होंगे।

$\therefore \frac{१}{न}(य^न + र^न + ल^न)$ यह १६४वें प्रक्रम से $- ला\left(१ - \frac{अ}{ट^2} + \frac{क}{ट^3}\right)$

इसके विस्तृत रूप के $\frac{१}{ट^न}$ के गुणक के समान होगा। परन्तु

$$- ला\left(१ - \frac{अ}{ट^2} + \frac{क}{ट^3}\right)$$

$$= \frac{१}{ट^2}\left(अ - \frac{क}{ट}\right) + \frac{१}{२ट^4}\left(अ - \frac{क}{ट}\right)^2 + \frac{१}{३ट^6}\left(अ - \frac{क}{ट}\right)^3 + \cdots$$

अब इस पर से सहज में $\frac{१}{ट^न}$ इसके गुणक का पता लगा सकते हो। यदि न सम हो तो $य^न + र^न + (-य-र)^न = य^न + र^न + (य+र)^न$ और यदि न विषम हो तो चिन्ह के उलट देने से $(य+र)^न - य^न - र^न$ इसका मान भी जान सकते हो।

६। $(य+र)^७ - य^७ - र^७$ इसका मान $य^2 + यर + र^2$ और $यर(य+र)$ के रूप में निकालो।

यहां पूर्व उदाहरण से $\frac{१}{ट^७}$ का गुणक $- अ^2क$ यह है; इसलिये चिन्ह उलट देने से $\frac{१}{७}\{य^७ + र^७ + (य-र)^७\}$ यह $अ^2क$ के समान होगा तब $(य+र)^७ - य^७ - र^७ = ७अ^2क =$

$$७(य^2 + यर + र^2)^2 यर(य+र)$$

७। सिद्ध करो कि $(य+र)^८ + य^८ + र^८$

$$= २(य^2 + यर + र^2)\{(य^2 + यर + र^2)^3 + ४य^3र^3(य+र)^2\}.$$

८। पूर्व उदाहरण में न के स्थान में २म और २म + १ के उत्थापन से सिद्ध करो कि

$$\frac{(य+र)^{२म}+य^{२} \;\; +र^{२म}}{२म}=\frac{अ^{म}}{म}+\frac{म-२}{२\,!}\,अ^{म-२}क^{२}$$

$$+\frac{(म-३)\,(म-४)\,(म-५)}{४\,!}\,अ^{म-६}क^{४}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(म-त-१)\,(म-त-२)\cdots(म-३त+१)}{२त\,!}\,अ^{म-३त-}क^{२त}+\cdots\cdots$$

और

$$\frac{(य+र)^{२म+१}-य^{२म+१}-र^{२न+१}}{२म+१}=अ^{म-१}क+$$

$$\frac{(म-२,(म-३)}{३\,!}\times अ^{न-४}क^{३}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(म-त-१)(म-त-२)\cdot(म-३त)}{(२त+१)\,!}\times अ^{म-३त-१}क^{२त+१}+\cdots\cdots$$

९। सिद्ध करो कि फ(य) = ०, इसके यदि सब मूल संभाव्य हों और सबसे बड़ा अ हो तो

$$अ=\frac{स_{म+१}}{स_{म}} \text{ जहां } म=\infty$$

१०। सिद्ध करो कि यदि $स_{म}स_{म+२}-स^{२}_{म+१}=श_{म}$ तो फ(य) = ० इसके यदि सब मूल संभाव्य हों और उनमें अ, क ये दो और सबसे बड़े हों तो

$$\frac{श_{म+१}}{श_{म}}=अ\cdot क \text{ जहां } म=\infty$$

११। यदि $श_म$ यह १०वें उदाहरण का संकेत मान और $स_म स_{म+३} - स_{म+१} स_{म+२} = ष_म$ तो यदि फ$(य)=०$ इसके सब संभाव्य मूल हों और उनमें सबसे बड़े अ और क हों तो

$$\frac{ष_म}{श_म} = अ + क, \text{ जहां } म = \infty$$

१२। $य^३ + प_१ य^२ + प_२ य + प_३ = ०$ इसमें यदि अव्यक्त मान अ,क,ख हों तो सिद्ध करो कि

(१) $(अ + क + अक)(क + ख + कख)(ख + अ + अख)$
$$= (प_३ - प_२)^२ + प_१(प_३ - प_२) + प_३$$

(२) $(अ + क - २ख)(क + ख - २अ)(अ + ख - २क)$
$$= २प^३_१ - ९प_१प_२ + २७प_३$$

(३) यौ $(अ + क)^२(अ + ख) = २प^३_१ + प_१प_२ - ३प_३$

(४) $(क - ख)^२(ख - अ)^२(अ - क)^२$
$$= \tfrac{४}{३}(३प_२ - प^२_१)(३प_१प_३ - प^२_२) - \tfrac{१}{३}(प_१प_२ - ९प_३)^२$$

१३। सिद्ध करो $य^न + य + १ = ०$ इसमें $स_{न-१} - स_न = १$।

१४। $य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_{न-१} य + य_न = ०$, इसमें यदि अव्यक्त मान, अ,क,ख,ग,घ⋯ ⋯ट हों तो

यौ $(अ + क)(अ + ख) \cdots\cdots (अ + ट)$ इसका मान बताओ।

यहां फ$(य) = य^न + प_१ य^{न-१} + \cdots \cdots प_न =$
$$(य - अ)(य - क) \cdots\cdots (य - ट); \; य = -अ \text{ मानने से}$$

$$फ(-अ) = (-अ)^न + प_१(-अ)^{न-१} + \cdots\cdots + प_न =$$
$$(-२अ)(-अ - क) \cdots\cdots (-अ - ट)$$
$$= (-१)^न २अ(अ + क) \cdots\cdots (अ + ट)$$

$$\therefore \frac{फ(-अ)}{२अ(-१)^न} = \frac{१}{२}\{अ^{न-१} - प_१ अ^{न-२} + \cdots\cdots + (-१)^न प_न अ^{-१}\} = (अ+क)(अ+ख)\cdots\cdots(अ+ट)$$

इसी प्रकार $\frac{फ(-क)}{२क(-१)^न} = \frac{१}{२}\{क^{न-१} - प_१ क^{न-२} + \cdots\cdots + (-१)^न प_न क^{-१}\} = (क+अ)(क+ख)\cdots\cdots(क+ट)$

....

सब जोड़ लेने से

$$यौ\ (अ+क)(अ+ख)\cdots(अ+ट) = \frac{१}{२}\{स_{न-१} - प_१ स_{न-२} + प_२ स_{न-३} + \cdots\cdots + (-१)^न प_न स_{-१}\}$$

१५। ऊपर के समीकरण में यौ $\frac{(अ+क)^२}{अक}$ का मान क्या होगा।

यहां यौ $\frac{(अ+क)^२}{अक}$ = यौ $\frac{अ^२ + २अक + क^२}{अक}$ = यौ $(अक^{-१} + अ^{-१}क + २)$

$$= यौ\ (अ^{-१}क) + \frac{२न(न-२)}{२} = \frac{प_१ प_{न-१}}{प_न} + न^२ - २न\ ।$$

१६। यौ $\frac{अ^२}{क}$ इसका मान बताओ।

यहां यौ $\frac{अ^२}{क}$ = यौ $अ^२क^{-१}$ इस पर से

मान = $प_१ - \frac{प_{न-१}}{प_न} स_२$, क्योंकि १६२ वें प्रक्रम से

$$\text{यौ } अ^म क^प = \text{यौ } अ^२ क^{-१} = स_म स_प - स_{म+प}$$
$$= स_२ स_{-१} - स_{२-१}$$
$$= स_२ स_{-१} - स_१$$
$$= प_१ - \frac{प_{न-१}}{प_न} स_२$$

१७। $य^४ + प_१ य^३ + प_२ य^२ + प_३ य + प_४ = ०$ इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क, ख, ग हों तो यौ (अ + क) (ख + ग) इसका मान बताओ।

उ. यौ $(अ + क)(ख + ग) = २प_२$

१८। $य^४ - य^३ - ७य^२ + ८ + ६ = ०$ इसमें दिखलाओ कि

$$स_१ = १, स_२ = १५, स_३ = १९, स_४ = ९९, स_५ = २११$$
$$स_६ = ७९५, स_{-१} = -\frac{१}{६}, स_{-२} = \frac{८५}{३६}$$

१९। ऊपर के समीकरण में दिखाओ कि

$$स_३ = -प^३_१ + ३प_१ प_२ - ३प_३$$
$$स_४ = प^४_१ - ४प^२_१ प_२ + ४प_१ प_३ + २प^२_२ - ४प_४$$

२०। ऊपर के चतुर्घात समीकरण में यदि अव्यक्त मान अ, क, ख, ग हो और

आ = $\frac{१}{२}$ (अक + खग), का = $\frac{१}{२}$ (अख + कग) और खा = $\frac{१}{२}$ (अग + कख) तो सिद्ध करो कि

$$आ + का + खा = \frac{प_२}{२}, \text{ आका} + \text{काखा} + \text{खाआ} =$$
$$\frac{१}{८}(स^२_१ स_२ - स^२_२ - २स_१ स_३ + २स_४)$$

२१। $अय^४ + ४कय^३ + ६खय^२ + ४गय + घ = ०$ इसमें अव्यक्त मान यदि $अ_१, अ_२, अ_३, अ_४$, हों तो दिखलाओ कि

$$(अ_1-अ_2)^2(अ_2-अ_3)^2(अ_3-अ_4)^2(अ_1-अ_3)^2 \times(अ_1-अ_4)^2(अ_2-अ_4)^2$$

$$=\frac{२५६}{अ^6}\left\{(अघ-४अक+३ख^2)^3-२७(अग^2+घक^2+ख^3-अखघ-२कखग)^2\right\}$$

(१२२ प्रक्रम के अन्त में जो अभ्यास के लिये प्रश्न लिखे हैं उनमें १०वां प्रश्न देखो)

२२। $य^न+प_1य^{न-1}+\cdots+प_न=0$ इसमें यदि अव्यक्त मान अ, क, ख, ... हों और

यदि $\frac{(अ+क)^2}{अक}=\frac{प_1प_{न-1}}{प_न}+१४$ तो न का प्रमाण बताओ।

उ ५।

२३। नीचे लिखे हुए दोहे से क्या समझते हो।

जर जोरत जरिगे चतुर डार पात छितिराय।

राय निकारत हार गे पार न भे छितिराय॥

बड़े समीकरण में अव्यक्त मान।

१५—कनिष्ठफल

१७७—$अ_1क_2-अ_2क_1$ यह जो चार वर्ण का फल है जिसमें $अ_1, क_1$, $अ_2, क_2$ ये चार वर्ण हैं यह अ और क के आगे अङ्कपाश युक्ति से १, २, के जो भेद १, २ और २, १ होते हैं लगा देने से और उनके गुणन के जोड़ देने से उत्पन्न होता है।

इसी प्रकार

$$अ_1क_2ख_3 + अ_1क_3ख_2 + अ_2क_3ख_1 + अ_2क_1ख_3 + अ_3क_1ख_2 + अ_3क_2ख_1 \cdots\cdots (१)$$

यह फल

$$\begin{matrix} अ_1, & क_1, & ख_1 \\ अ_2, & क_2, & ख_2 \\ अ_3, & क_3, & ख_3 \end{matrix}$$

इन नव वर्णों का है जो कि अ क ख इस गुणनफल में १, २, ३ के अङ्कपाश युक्ति से जितने भेद होते हैं उन्हें क्रम से अ, क और ख के आगे लगा देने से और सब जोड़ लेने से उत्पन्न होता है। इसलिये चाहो तो ऐसे फल को लाघव से (अकख) इस सङ्केत से प्रकाश कर सकते हो जहां यह समझ लेना होगा कि १, २, ३ के छओ भेद क्रम से अ, क और ख के आगे लगा कर सब गुणनफलों को जोड़ लेना है।

ऊपर की युक्ति से (अ, क, ख, ग) इससे यह समझेंगे कि १, २, ३, ४ के जो २४ भेद होंगे उन्हें अ, क, ख और ग में लगा कर सब गुणनफलों को जोड़ लेना है।

इसी प्रकार यदि (अ क ख ग……) इसमें यदि न अक्षर हों तो १, २,…न के जो न! भेद होंगे उन्हें क्रम से वर्णों के आगे लगा कर सब गुणनफलों के योग के समान (अ क ख ग……) इसका मान कहेंगे।

१७८—ऊपर के सङ्केत से (अक) = $अ_1क_2 + अ_2क_1$ यह जो फल होता है वह नीचे लिखे हुए चार वर्णों में कर्णगत दो दो वर्णों के गुणनफल के योग के तुल्य है।

$अ_1, क_1$

$अ_2, क_2$

ऐसे कर्णगत वर्णों के गुणन को हमारे यहां भास्कराचार्यादि वज्राभ्यास कहते हैं और ऐसे वज्राभ्यास के योग वा अन्तर रूपी संख्या को कनिष्ठ कहते हैं; इसीलिये हमने भी ऐसे फल की संज्ञा कनिष्ठफल लिखा है।

१७६—ऊपर जो कनिष्ठफल दिखलाया है उसमें स्पष्ट है कि प्रत्येक पद में यदि न अक्षर होंगे तो सब पद न! इतने होंगे इसमें न का मान दो से अधिक होने से न! यह समसंख्या होगी। इसलिये कनिष्ठफल में सर्वदा सब पद सम होंगे।

जिस कनिष्ठफल में आधे पद धन और आधे ऋण होते हैं उन्हीं कनिष्ठफलों को लेकर इस ग्रन्थ में कुछ विशेष कहा जायगा। इसलिये जब तक कि इसके विरुद्ध न कहा जाय सर्वदा कनिष्ठफल से वह फल समझो जिसमें आधे पद धन और आधे पद ऋण हों। जैसे

$$अ_1 य + क_1 र = 0$$

$$अ_2 य + क_2 र = 0$$

इनमें पहले से $य = \frac{-क_1 र}{अ_1}$ इसका उत्थापन दूसरे में देने से $क_2 र - \frac{अ_2 क_1 र}{अ_1} = 0$ छेदगम और र के अपवर्त्तन से

$अ_1 क_2 - अ_2 क_1 = 0$

इसी प्रकार

$$अ_1 य + क_1 र + ख_1 ल = 0$$

$$अ_2 य + क_2 र + ख_2 ल = 0$$

$$अ_3 य + क_3 र + ख_3 ल = 0$$

इनमें पहिले दो से य और र-का मान ल के रूप में जान कर उनका उत्थापन तीसरे में देने से और छेदगम और ल के अपवर्त्तन से

$$अ_1 क_2 ख_3 - अ_1 क_3 ख_2 + अ_2 क_3 ख_1 + अ_2 क_1 ख_3 - अ_3 क_1 ख_2 - अ_3 क_2 ख_1 = 0 \cdots \cdots (२)$$

इस फल से और १७७ वें प्रक्रम के (१) से भेद इतना ही है कि (१) में सब पद धन हैं (२) में आधे पद धन और आधे ऋण हैं अर्थात् तीन पद धन और तीन पद ऋण हैं।

इसी प्रकार चार अज्ञातवर्ण समीकरण में $अ_1, क_1, ख_1, ग_1$, $अ_2, क_2, ख_2, ग_2$, इत्यादि सोरह वर्णों से ऊपर (२) के ऐसा एक कनिष्ठफल २४ पदों का होगा जिसमें १२ धन और १२ ऋण होंगे।

ऐसे कनिष्ठफल को काशी (Cauchy) ने

$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 \\ अ_2 & क_2 \end{vmatrix}$ इस संकेत से प्रकाश किया है। जैसे यहां इस संकेत से समझेंगे कि यह $अ_1 क_2 - अ_2 क_1$ इसके तुल्य है।

इसी प्रकार (२) कनिष्ठफल को

$$\begin{vmatrix} अ_1, & क_1, & ख_1 \\ अ_2, & क_2, & ख_2 \\ अ_3, & क_3, & ख_3 \end{vmatrix}$$

इससे प्रकाश करते हैं।

और साधारण से $न^2$ वर्णों में जहां वर्ण

$$अ_1, क_1, ख_1, \cdots\cdots ट_1 \text{ हैं}$$

कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} अ_1, क_1, ख_1, & \cdots\cdots ट_1 \\ अ_2, क_2, ख_2, & \cdots\cdots ट_2 \\ अ_3, क_3, ख_3, & \cdots\cdots ट_3 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ अ_न, क_न, ख_न, & \cdots\cdots ट_न \end{vmatrix}$$

इससे प्रकाश करते हैं। इस कनिष्ठफल में धनर्ण पदों के जानने के लिये इस संकेत में $अ_1, क_1, ख_1, \cdots$ इत्यादि अक्षरों को ध्रुव कहते हैं। $अ_1, क_1, ख_1, \cdots$ इत्यादि जिस पंक्ति को बनाते हैं उसे तिर्यक् पंक्ति और $अ_1, अ_2, अ_3 \cdots\cdots$ इत्यादि जिस पंक्ति को बनाते हैं उसे ऊर्ध्वाधर पंक्ति कहते हैं। बाम भाग की ऊर्ध्वाधर पंक्ति के शिर से लेकर दक्षिण भाग की ऊर्ध्वाधर पंक्ति के पाद तक कर्ण पंक्ति में जो $अ_1, क_2, ख_3, \cdot ट_न$ ये वर्ण हैं इनके गुणनफल $अ_1 क_2 ख_3 \cdots ट_न$ को धन पद और प्रधान पद कहते हैं। कनिष्ठ फल के रूप से स्पष्ट है कि कनि- ष्ठफल के प्रत्येक पद में प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ एकही ध्रुव और प्रत्येक तिर्यक् पंक्तिस्थ एकही ध्रुव हैं; इसलिये ऊर्ध्वाधरस्थ एकही ध्रुव और तिर्यक्स्थ एकही ध्रुव लेकर जितने न अक्षरों के गुणनफल संभव होंगे वे ही कनिष्ठफल में सब पद होंगे। इनमें कौन धन और कौन ऋण होंगे इसके लिये ऊपर प्रधान और धन पद बनाया है। प्रधान पद में देखो वर्णमाला के क्रम से तो अक्षर हैं और संख्याओं के क्रम से १, २,...... न संख्या हैं।

प्रधान पद में अक्षरों के आगे जो संख्यायें लगी हैं उनमें से दो संख्याओं को उलट कर इन दो अक्षरों के आगे लगा

देने से जो पद बनेगा वह ऋणात्मक होगा। जैसे अ$_{1}$, क$_{1}$, ख$_{1}$, ग$_{1}$, घ$_{1}$, अ$_{2}$····· इत्यादि २५ अक्षरों से पूर्व सङ्केत से प्रधान पद अ$_{1}$ क$_{2}$ ख$_{3}$ ग$_{4}$ घ$_{5}$ यह होगा इसमें क के आगे जो २ है उसे घ के आगे लगा देने से और घ के आगे जो ५ है उसे क के आगे लगा देने से जो अ$_{1}$ क$_{5}$ ख$_{3}$ ग$_{4}$ घ$_{2}$ यह पद बनेगा वह ऋणात्मक होगा। इस क्रिया से स्पष्ट है कि दो दो अक्षरों की संख्याओं का एक बेर परिवर्त्तन से ऋण, दो बेर के परिवर्त्तन से धन, तीन बेर परिवर्त्तन से ऋण, चार बेर परिवर्त्तन से धन इस प्रकार सम बेर परिवर्त्तन से धन और विषम बेर परिवर्त्तन से ऋण होगा। इस क्रिया से प्रधान पद के बल से पदों के चिन्हों का ज्ञान हो जायगा। जैसे

$$\begin{vmatrix} अ_1, & क_1, & ख_1 \\ अ_2, & क_2, & ख_2 \\ अ_3, & क_3, & ख_3 \end{vmatrix}$$

इसमें प्रधान और धन पद अ$_{1}$क$_{2}$ख$_{3}$ यह हुआ। क, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से अ$_{1}$क$_{3}$ख$_{2}$ यह ऋण हुआ। इसमें अ, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से अ$_{2}$ख$_{3}$क$_{1}$ यह धन हुआ। इसमें क, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से अ$_{2}$क$_{1}$ख$_{3}$ यह ऋण हुआ। इसमें अ, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से अ$_{3}$क$_{1}$ख$_{2}$ यह धन हुआ। इसमें क, ख की संख्याओं के परिवर्त्तन से अ$_{3}$क$_{2}$ख$_{1}$ ऋण हुआ। इस प्रकार

$$\text{कनिष्ठफल} = अ_1क_2ख_3 - अ_1क_3ख_2 + अ_2क_3ख_1 - अ_2क_1ख_3$$
$$+ अ_3क_1ख_2 - अ_3क_2ख_1 \text{ यह वही पद है जो (२) है।}$$

१८०—पद के धन, ऋण जानने का सहज उपाय—

जो दिया हुआ पद हो उसमें प्रथम जो संख्या हो उसे देखो कि प्रधान पद में कहा है और जहां है वहां से कितने स्थान पीछे हटाने से प्रथम स्थान में आती है। उस हटाए हुए स्थान की संख्या को अलग लिख छोड़ो। और प्रधान पद के पहिले दिए हुए पद की प्रथम संख्या लिख उसके आगे क्रम से इस संख्या को छोड़ और प्रधान पद की सब संख्याओं को लिख कर इसे अब प्रधान पद मानों। इसमें जहां पर दिए हुए पद की दूसरी संख्या हो उसे देखो कि कितने स्थान पीछे हटाने से नये प्रधान पद में दूसरी स्थान की संख्या होती है। इस हटाए हुए स्थान को भी अलग लिख छोड़ो और अपने इस प्रधान पद में दिए हुए पद की प्रथम संख्या के और उसके आगे जो संख्या है उनके बीच में दिए हुए पद की दूसरी सख्या रख आगे क्रम से इस संख्या को छोड़ और सब सख्याओं को लिख कर इसे नया प्रधान पद समझो। इसमें दिए हुए पद की तीसरी संख्या को देखो कि कितने स्थान पीछे हटाने से तीसरी संख्या होती है। उस स्थान संख्या को अलग लिख छोड़ो और इस पर से फिर पूर्ववत् नया प्रधान पद बनाओ। यों बार बार कर्म करते जाओ जब तक कि दिया पद न बन जाय। फिर सब स्थान संख्या जो अलग लिखी हुई है उनके जोड़ने से यदि योग सम हो तो दिए हुए पद को धन समझो और यदि योग विषम हो तो ऋण जानो।

जैसे उदाहरण—(१) जहां पंक्ति में सात सात वर्ण हैं वहां $अ_{३}क_{७}ख_{६}ग_{५}घ_{१}ङ_{४}च_{२}$ यह पद धन वा ऋण होगा। यहां पदों की यथा क्रम संख्या लेने से ३७६५१४२ यह संख्या हुई और पूर्व युक्ति से प्रधान पद की सख्या से १२३४५६७ यह

संख्या होती है। इसमें दिए हुए पद की आदि संख्या ३ दो स्थान हटाने से आदि में आती है, इसलिये नये प्रधान पद की संख्या ३१२४५६७, इस प्रकार ऊपर की क्रिया से

१	प्रधानपद	=	१२३४५६७	दिया पद ३७६५१४२
२	"	=	३१२४५६७	हटे स्थान की संख्या २
३	"	=	३७१२४५६	" " ५
४	"	=	३७६१२४५	" " ४
५	"	=	३७६५१२४	" " ३
६	"	=	३७६५१२४	" " ०
७	"	=	३७६५१४२	" " १
८	"	=	३७६५१४२	" " ०

योग = १५

१५ के विषम होने से दिया हुआ पद ऋणात्मक हुआ।

(२) १७९ प्रक्रम में जो कनिष्ठफल $न^{२}$· अक्षरों से बना है उसमें जिस कर्ण पंक्ति में प्रधान पद है उसे छोड़ दूसरे कर्ण पंक्ति का $अ_{न}\, क_{न-१}\, ख_{न-२} \cdots\cdots ट_{१}$ यह पद बताओ किस चिन्ह का होगा।

यहां क्रम से हटाए गए स्थानों की संख्या

$$(न-१)+(न-२)+(न-३)+\cdots\cdots+२+१=\frac{न(न-१)}{२}$$

इसलिये पद का चिन्ह $(-१)^{\frac{न(न-१)}{२}}$ यह होगा।

१८१—किसी दो तिर्यक् या ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के बदल देने से कनिष्ठफल का चिन्ह बदल जाता है।

१७९ प्रक्रम में जो क्रिया लिखी है उससे चार अक्षरों की पंक्ति में यह प्रधान पद $अ_{१}$ $क_{२}$ $ख_{३}$ $ग_{४}$ धन होगा और २,४ के बदलने से $अ_{१}क_{४}ख_{३}ग_{२} = अ_{१}ग_{२}ख_{३}क_{४}$ इसलिये जिस तिर्यक् पंक्ति में $क_{२}$ और $ग_{४}$ हैं उन्हें परस्पर उलट पुलट दें वा जिस उर्ध्वाधर पक्ति में $क_{२}$ और $ग_{४}$ हैं उन्हें परस्पर उलट पुलट दें, पद का मान $अ_{१}$ $ग_{२}$ $ख_{३}$ $क_{४}$ यही रहेगा जो कि प्रधान पद के वश से ऋण होगा। इस प्रकार तिर्यक् वा उर्ध्वाधर दो पंक्तिओं के परस्पर बदलने से सब पदों के चिन्ह उलट जायँगे; इसलिये कनिष्ठफल का चिन्ह भी बदल जायगा। इस पर से किसी पद के चिन्ह जानने के लिये नीचे की युक्ति उत्पन्न होती है।

उर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्तिओं को क्रम से हटा हटा कर नया वर्गाकार ऐसा कोष्ठ बनाओ जिसमें दिए हुए पद के सब अक्षर क्रम से प्रधान पद रूप होकर प्रधान कर्ण पंक्ति में आ जायँ, तब जै जै बार पंक्तिआं हटाई गई हों उन हटी सख्याओं का योग विषम होने से अभीष्ट दिया हुआ पद ऋण और सम होने से धन होगा।

उदाहरण

अ,	क,	ग,	य
आ,	का,	गा,	र
त,	थ,	द,	ल
ता,	था,	दा,	०

इसमें ता का द य इस पद का चिन्ह बताओ। यहां चौथी तिर्यक पक्ति को तीन स्थान हटाने से

$$\begin{vmatrix} \underline{\text{ता}}, & \text{था}, & \text{दा}, & 0 \\ \text{अ}, & \text{क}, & \text{ग}, & \underline{\text{य}} \\ \text{आ}, & \underline{\text{का}}, & \text{गा}, & \text{र} \\ \text{त}, & \text{थ}, & \underline{\text{द}}, & \text{ल} \end{vmatrix} \quad \text{हटा स्थान ३}$$

इसमें जिस पंक्ति में का है उसे एक स्थान हटाने से

$$\begin{vmatrix} \underline{\text{ता}}, & \text{था}, & \text{दा}, & 0 \\ \text{आ}, & \underline{\text{का}}, & \text{गा}, & \text{र} \\ \text{अ}, & \text{क}, & \text{ग}, & \underline{\text{य}} \\ \text{त}, & \text{थ}, & \underline{\text{द}}, & \text{ल} \end{vmatrix} \quad \text{हटा स्थान १}$$

इसमें जिस पंक्ति में द है उसे एक स्थान हटाने से

$$\begin{vmatrix} \underline{\text{ता}}, & \text{था}, & \text{दा}, & 0 \\ \text{आ}, & \underline{\text{का}}, & \text{गा}, & \text{र} \\ \text{त}, & \text{थ}, & \underline{\text{द}}, & \text{ल} \\ \text{अ}, & \text{क}, & \text{ग}, & \underline{\text{य}} \end{vmatrix} \quad \text{हटा स्थान १}$$

इसमें दिए हुए पद के सब अक्षर अब प्रधान कर्ण पंक्ति में हो गए और हटे स्थानों का योग ५ विषम है; इसलिये दिया हुआ पद ऋण होगा।

१८२—किसी कनिष्ठफल में यदि दो तिर्यक् पंक्ति वा दो ऊर्ध्वाधर पंक्ति आपस में तुल्य हों अर्थात् दोनों पंक्तिओं के वे ही अक्षर हों तो कनिष्ठफल शून्य होगा।

क्योंकि १८१ प्र० से दो पंक्तिओं के परस्पर बदल देने से कनिष्ठफल का चिन्ह बदल जायगा। परन्तु ऐसी स्थिति में दोनों पंक्तिओं के बदलने से फल ज्यों का त्यों रहेगा; इसलिये

$$\text{कफ} = -\text{कफ}$$

$\therefore$ २कफ = ० अर्थात् कफ = ० यह सिद्ध हुआ।

१८३—किसी कनिष्ठफल में यदि सब तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर रूप में वा सब ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को तिर्यक् रूप में लिखें तो कुछ विकार नहीं उत्पन्न होता, कनिष्ठफल ज्यों का त्यों रहता है।

क्योंकि दोनों स्थितिओं में प्रधान पद तो ज्यों का त्यों रहेगा। और जो प्रत्येक पद ऊर्ध्वाधरस्थ और तिर्यक्स्थ एक एक ध्रुव के वश से होंगे वे भी दोनों स्थितिओं में एक ही रहेंगे। १८१ प्र० से पद के चिन्ह ज्ञान के लिये प्रथम स्थिति में प्रधान कर्णपंक्ति में दिए हुए पद के अक्षरों को ले आने के लिये जितनी बार पंक्तिआं हटाई जायँगी उन संख्याओं का उतना ही योग होगा जितना कि दूसरी स्थिति में ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को हटाने से योग होगा—जैसे

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1, & \text{क}_1, & \underline{\text{ख}_1}, & \text{ग}_1 \\ \underline{\text{अ}_2}, & \text{क}_2, & \text{ख}_2, & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3, & \text{क}_3, & \text{ख}_3, & \underline{\text{ग}_3} \\ \text{अ}_4, & \underline{\text{क}_4}, & \text{ख}_4, & \text{ग}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1, & \underline{\text{अ}_2}, & \text{अ}_3, & \text{अ}_4 \\ \text{क}_1, & \text{क}_2, & \text{क}_3, & \underline{\text{क}_4} \\ \underline{\text{ख}_1}, & \text{ख}_2, & \text{ख}_3, & \text{ख}_4 \\ \text{ग}_1, & \text{ग}_2, & \underline{\text{ग}_3}, & \text{ग}_4 \end{vmatrix}$$

यहां दोनों स्थितिओं में प्रधान कर्णपंक्तिओं में क्रम से अक्षरों को ले आने से पंक्तिओं की हटी हुई संख्याओं का योग

३ है; इसलिये $अ_२ क_४ ख_१ ग_३$ इसका चिन्ह दोनों में एक ही होगा।

१८४—किसी एक पंक्ति के प्रत्येक ध्रुवाङ्क को यदि एक ही गुणक से गुण दें तो अब जो नया कनिष्ठफल होगा वह उसी गुण गुणित प्रथम कनिष्ठफल के तुल्य होगा।

क्योंकि प्रत्येक पद में उस पंक्ति के अल गुण गुणित ध्रुवाङ्क होंगे। इसलिये अब प्रत्येक पद के योग वियोग से जो नया कनिष्ठफल होगा वह पहिले कनिष्ठफल से गुण गुणित होगा।

अनुमान—(१) किसी पंक्ति के ध्रुवाङ्क एक गुण से गुणित यथा क्रम दूसरी पंक्ति के ध्रुवाङ्क हों तो कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा।

क्योंकि

$$\begin{vmatrix} मअ_१, & अ_१, & ख_१ \\ मअ_२, & अ_२, & ख_२ \\ मअ_३, & अ_३, & ख_३ \end{vmatrix} \equiv म \begin{vmatrix} अ_१, & अ_१, & ख_१ \\ अ_२, & अ_२, & ख_२ \\ अ_३, & अ_३, & ख_३ \end{vmatrix} \equiv ०,$$ १८४ और १८२ प्रक्रम से।

अनुमान—(२) यदि किसी पंक्ति के ध्रुवाङ्क के चिन्ह को उलट दें तो कनिष्ठफल विपरीत चिन्ह का हो जायगा।

क्योंकि १४८ प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} मअ_१, & क_१, & ख_१ \\ मअ_२, & क_२, & ख_२ \\ मअ_३, & क_३, & ख_३ \end{vmatrix} \equiv म \begin{vmatrix} अ_१, & क_१, & ख_१ \\ अ_२, & क_२, & ख_२ \\ क_३, & क_३, & ख_३ \end{vmatrix} = म \cdot कफ$$

इसमें यदि म = −१ तो प्रथम रेखाद्वयान्तर्गत प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुवाङ्कों का चिन्ह परिवर्त्तन हो जायगा और वह म·कफ इसके अर्थात् −कफ इसके तुल्य होगा।

उदाहरण—(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & २ & ३ & ४ \\ ५ & ६ & ७ & ८ \\ ९ & १० & ११ & १२ \\ १५ & १८ & २१ & २४ \end{vmatrix} = ०$$

जहां अन्तिम तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवाङ्कों में यदि ३ का भाग दो तो दूसरी तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवाङ्क हो जाते हैं इसलिये १८४ प्रक्रम के १ अनुमान से कनिष्ठफल शून्य होगा।

(२) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} कख & अ & अ^२ \\ खअ & क & क^२ \\ अक & ख & ख^२ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & अ^२ & अ^३ \\ १ & क^२ & क^३ \\ १ & ख^२ & ख^३ \end{vmatrix}$$

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ८ & ३ & ६ \\ ३ & १५ & ७ \\ ४ & २७ & २ \end{vmatrix} \equiv ३ \begin{vmatrix} ८ & १ & ६ \\ ३ & ५ & ७ \\ ४ & ९ & २ \end{vmatrix}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अकख & अ^२ & अ^३ \\ अकख & क^२ & क^३ \\ अकख & ख^२ & ख^३ \end{vmatrix} = अकख \begin{vmatrix} कख & अ & अ^२ \\ खअ & क & क^२ \\ अक & ख^२ & ख^३ \end{vmatrix}$$

(५) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} २ & १ & -७ \\ -४ & -३ & ८ \\ ६ & ५ & -९ \end{vmatrix} = २ \begin{vmatrix} १ & १ & ७ \\ २ & ३ & ८ \\ ३ & ५ & ९ \end{vmatrix}$$

(६) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \\ अ'' & क'' & ख'' \end{vmatrix} = \frac{१}{अकख} \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ अ'कख & क'खअ & ख'अक \\ अ''कख & क''खअ & ख''अक \end{vmatrix}$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & २ & ५ & १० \\ १ & १ & ६ & ३ \\ ७ & ३ & ० & ५ \\ ० & २ & ५ & ८ \end{vmatrix} = \frac{१}{५·१०·४·२} \begin{vmatrix} २० & २० & २० & २० \\ ५ & १० & २४ & ६ \\ ३५ & ३० & ० & १० \\ ० & २० & २० & १६ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ \\ ५ & १० & २४ & ६ \\ ७ & ६ & ० & २ \\ ० & ५ & ५ & ४ \end{vmatrix}$$

(८) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ अ & क & ख \\ अ^{२} & क^{२} & ख^{२} \end{vmatrix} = (क-ख)(ख-अ)(अ-क)$$

इसमें यदि क के स्थान में ख का उत्थापन दो तो दो पंक्तिओं के अक्षर समान होने से कफ = ०; इसलिये कफ, क—ख इससे निःशेष होगा। इसी युक्ति से कफ, ख—अ, और अ—क इनसे भी निःशेष होगा। इसलिये तीनों के घात को किसी स्थिर संख्या से गुण देने से कफ होगा। परन्तु दोनों फल में ध्रुव शक्ति ३ है; इसलिये वह स्थिर संख्या कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में होगा। परन्तु कनिष्ठफल का प्रधान पद $क ख^{२}$ है जिसमें स्थिर गुणक +१ है। इसलिये ऊपर का सरूप समीकरण सत्य हुआ।

(९) ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ \\ अ & क & ख & ग \\ अ^{२} & क^{२} & ख^{२} & ग^{२} \\ अ^{३} & क^{३} & ख^{३} & ग^{३} \end{vmatrix} = -(क-ख)(अ-ग)(ख-अ)(क-ग) \times (अ-क)(ख-ग)$$

१८५—किसी कनिष्ठफल में यदि जितना ऊर्ध्वाधर पंक्ति निकाल ली जाय और उतना ही तिर्यक् पंक्ति निकाल ली जाय तो अवशिष्ट पंक्तिओं के यथाक्रम ध्रुवाङ्कों से जो अब नया कनिष्ठफल होगा उसे लघु कनिष्ठफल कहते हैं।

यदि एक ऊर्ध्वाधर और एक ही तिर्यक् पंक्ति निकाली गई हो तो अवशिष्ट पंक्तिओं से बने लघु कनिष्ठफल को पहिला लघु कनिष्ठफल कहते हैं। यदि दो ऊर्ध्वाधर और दो ही तिर्यक् पंक्तिओं को निकाल कर अवशिष्ट पक्तिओं से लघु कनिष्ठफल बना हो तो इसे दूसरा लघु कनिष्ठफल कहते है। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए।

निकाली हुई पंक्तिओं में जो उभयनिष्ठ ध्रुवा हैं उनसे भी एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा। अवशिष्ट पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों से जो लघु कनिष्ठफल होता है वह निकाली हुई पंक्तिओं के उभयनिष्ठ ध्रुवाङ्कोद्भव कनिष्ठफल का पूरक कहाता है। यदि प्रधान ध्रुव अ, सम्बन्धी पूरक हो तो इसे प्रधान प्रथम लघु कहते हैं। और इसका जो प्रधान प्रथम लघु होगा उसे आदि कनिष्ठफल का प्रधान द्वितीय लघु कहेंगे।

एक एक ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्ति के निकालने से जो लघु कनिष्ठफल बनता है उसे कफ$_{अ}$ इस संकेत से प्रकाश करते हैं। दो दो पंक्तिओं के निकालने से जो लघु कनिष्ठफल होता है उसे कफ$_{अ,क}$ इस संकेत से प्रकाश करते हैं। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए।

इसी प्रकार $\text{कफ}_{\text{अ}_1}$ इससे प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल को और $\text{कफ}_{\text{अ}_1,\text{क}_2}$ इससे प्रधान द्वितीय लघु कनिष्ठफल को प्रकाश करते हैं।

संक्षेप से किसी कनिष्ठफल को प्रधानपद लेकर

$\text{यौ}\pm\text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3\cdots\cdots\text{ट}_\text{न}$ इस संकेत से प्रकाश करते हैं।

यह संकेत दिखलाता है कि अङ्कपाश से १,२,३..... न इनके जितने भेद हों उन्हें अ,क,ख,.. ...ट इनके आगे रख कर सब के गुणनफल से जितने पद बनते हों उनके १८०वें प्रक्रम से जो चिन्ह हों उनके सहित सभों के योग वियोग से जो संख्या हो वही इस संकेत से समझो।

१८६—पिछले प्रक्रमों से सिद्ध है कि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में ऊर्ध्वाधरस्थ और तिर्यक्स्थ प्रत्येक ध्रुवाङ्क एक ही बेर आते हैं। इसलिये

$$\text{कफ}=\text{अ}_1\text{आ}_1+\text{अ}_2\text{आ}_2+\text{अ}_3\text{आ}_3+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{कफ}=\text{क}_1\text{का}_1+\text{क}_2\text{का}_2+\text{क}_3\text{का}_3+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{वा, कफ}=\text{अ}_1\text{आ}_1+\text{क}_1\text{का}_1+\text{ख}_1\text{खा}_1+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{कफ}=\text{अ}_2\text{आ}_2+\text{क}_2\text{का}_2+\text{ख}_2\text{खा}_2+\cdots\cdots\cdots$$

यदि $\text{अ}_1, \text{क}_1, \text{ख}_1, \text{ग}_1,\cdots$ चार अक्षरों की पंक्ति में पूर्व रीति से कनिष्ठफल को बनाओ और अ^1, अ_2, अ_3 और अ_4 के गुणकों को अलग कर उनसे नये कनिष्ठफलों को बनाओ तो ऊपर दिए हुए $\text{अ}_1\text{आ}_1+\text{अ}_2\text{आ}_2+\text{अ}_3\text{आ}_3+\cdots\cdots\cdots$ इस कनिष्ठफलमें

$$\text{आ}_1=\begin{vmatrix}\text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2\\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3\\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4\end{vmatrix}\quad \text{आ}_2=\begin{vmatrix}\text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1\\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4\\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3\end{vmatrix}\quad \text{आ}_3=\begin{vmatrix}\text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1\\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3'\\ \text{क}_4 & \text{ख}_4 & \text{ग}_4\end{vmatrix}$$

और $आ_4 = \begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \end{vmatrix}$ ये आते हैं।

ऊपर स्पष्ट है कि क फ $= अ_1 आ_1 + अ_2 आ_2 + अ_3 आ_3 + \cdots \cdots + अ_न आ_न$ यहां ऊपर ही की युक्ति से स्पष्ट है कि $आ_1$, $आ_2$, $आ_न$ ये न − १ अक्षर सम्बन्धि पंक्तिओं का कनिष्ठफल होगा। इसलिये १, २, ३, · ··· · न इसके भेद में यदि १ को प्रधान स्थान में सर्वदा स्थिर रक्खैं तो जितने भेद में १ प्रथम स्थित रहेगा उनकी संख्या अङ्कपाश से (न − १)। इतनी होगी और

$अ_1 आ_1 = अ_1 यौ \pm क_2 ख_3 \cdots \cdots ट_न$ इसलिये

$$आ_1 = यौ \pm क_2 ख_3 \cdots ट_न = \begin{vmatrix} क_2 & ख_2 & \cdots\cdots & ट_2 \\ क_3 & ख_3 & \cdots\cdots & ट_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ क_न & ख_न & \cdots\cdots & ट_न \end{vmatrix}$$

और यह कनिष्ठफल १८५वें प्रक्रम से $अ_1$ ध्रुव सम्बन्धी प्रधान प्रथम लघु होगा जो कि $कफ_{अ_1}$ इसके तुल्य है। इसलिये $आ_1 = कफ_{अ_1}$ ।

$आ_2$ के जानने के लिये जिस तिर्यक् पंक्ति में $अ_2$ है उसको एक बेर ऊपर हटाकर रखने से $अ_1$ के स्थान में $अ_2$ हो जायगा। और कनिष्ठफल का चिन्ह भी बदलजायगा। (१८२ प्रक्रम देखो) इसलिये ऊपर ही की युक्ति से $आ_2 = -कफ_{अ_2}$, यहां $कफ_{अ_2}$ से यह समझना चाहिए कि $अ_1$ के स्थान में पंक्ति के हटाने से $अ_2$ के आ जाने पर $अ_2$ ध्रुवसम्बन्धी प्रधान लघु कनिष्ठफल है। इसी प्रकार $अ_3$ की पंक्ति दो बेर हटाने

से $अ_१$ के स्थान पर $अ_३$ पहुँचेगा। इसलिये ऊपर ही की युक्ति और सङ्केत से $आ_३ = कफ_{अ_३}$। इस प्रकार विषम में ऋण, सम में धन होने से

$$कफ = अ_१ कफ_{अ_१} - अ_२ कफ_{अ_२} + अ_३ कफ_{अ_३} - अ_४ कफ_{अ_४} + \cdots\cdots$$

इस प्रकार कनिष्ठफल को किसी ऊर्ध्वाधर या तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवाङ्कों के रूप में प्रकाश कर सकते है। जैसे

$$कफ = अ_१ कफ_{अ_१} - क_१ कफ_{क_१} + ख_१ कफ_{ख_१} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

किसी लघुकनिष्ठफल (जो कि किसी ध्रुव को गुणता है) का चिन्ह जानना हो तो समझ लेना चाहिए कि कितने बार तिर्यक् पंक्ति और फिर कितने बार ऊर्ध्वाधर पक्ति के हटाने से अभीष्ट ध्रुवाङ्क प्रधान $अ_१$ के स्थानपर पहुँचता है। उन हटे हुए स्थानों का योग विषम हो तो उस लघु कनिष्ठ को ऋण और सम हो तो धन समझना चाहिए। जैसे

$यौ \pm अ_१ क_२ ख_३ ग_४ घ_५ ङ_६$ इसका मान चतुर्थ ऊर्ध्वाधर पंक्ति के रूप में अर्थात्

$कफ = ग_१ गा_१ + ग_२ गा_२ ग + _३ गा_३ + \cdots\cdots$ ऐसा जो होगा उसमें $ग_३ गा_३ = ग_३ कफ_{ग_३}$ इसका क्या चिन्ह होगा यह जानना हो तो यहां दो बेर तिर्यक् पंक्ति को ऊपर ले आने से फिर तीन बेर ऊर्ध्वाधर पंक्ति को बाईं ओर हटाने से तब $ग_३$ प्रधानस्थान $अ_१$ पर पहुँचेगा। इसलिये दोनों हटे हुए स्थानों का योग ५ विषम होने से सिद्ध हुआ कि $ग_३ कफ_३$ यह ऋण चिन्ह का होगा।

चिन्ह जानने के लिये ऊपर ही की युक्ति से नीचे की क्रिया उत्पन्न होती है। $अ_{१}$, से ऊपर की तिर्यक् पंक्ति में गिनती करो

कि कितनी संख्या पर वह ऊर्ध्वाधर पंक्ति आती है जिसमें कि अपना उद्दिष्ट भुवाङ्क है फिर वहां से उसी संख्या के आगे से उस ऊर्ध्वाधर पंक्ति में नीचे की ओर उद्दिष्ट भुवाङ्क के शिर पर जो भुवाङ्क है वहां तक गिनती करो कि कौन संख्या है यदि विषम हो तो अभीष्ट लघु कनिष्ठफल ऋण और सम हो तो धन समझना चाहिए। जैसे ऊपर के उदाहरण में अ_1 से गिनती करने में जिस ऊर्ध्वाधर पङ्क्ति में ग_3 है वहां तक $\text{अ}_1, \text{क}_1, \text{ख}_1, \text{ग}_1$ चार संख्या हुई फिर चार के आगे अभीष्ट भुवाङ्क के शिर पर के भुवाङ्क ग_2 तक गिनती पांच हुई अर्थात् $\text{अ}_1, \text{क}_1, \text{ख}_1, \text{ग}_1, \text{ग}_2$ ये पांच हुए; इसलिये संख्या विषम होने से उद्दिष्ट लघु कनिष्ठफल ऋण हुआ।

उदाहरण

(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} = \text{अ}_1 \begin{vmatrix} \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} - \text{अ}_2 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} + \text{अ}_3 \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{अ}_1\text{क}_2\text{ख}_3 - \text{अ}_1\text{क}_3\text{ख}_2 - \text{अ}_2\text{क}_1\text{ख}_3 + \text{अ}_2\text{क}_3\text{ख}_1 + \text{अ}_3\text{क}_1\text{ख}_2 - \text{अ}_3\text{क}_2\text{ख}_1$$

(१७६ प्रक्रम का (२) समीकरण देखो)

(२) दिखलाओ कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} = \text{अ} \begin{vmatrix} \text{क} & \text{फ} \\ \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} - \text{ह} \begin{vmatrix} \text{ह} & \text{ग} \\ \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} + \text{ग} \begin{vmatrix} \text{ह} & \text{ग} \\ \text{क} & \text{फ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{अकख} + २\text{फगह} - \text{अफ}^2 - \text{कग}^2 - \text{खह}^2$$

(३) चतुर्थ पंक्ति में जो ध्रुवाङ्क हैं उनके वश से चार चार अक्षर के वश से जो कनिष्ठफल हो उसे सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = -\text{अ}_{\text{४}}\begin{vmatrix} \text{क}_{\text{१}} & \text{ख}_{\text{१}} & \text{ग}_{\text{१}} \\ \text{क}_{\text{२}} & \text{ख}_{\text{२}} & \text{ग}_{\text{२}} \\ \text{क}_{\text{३}} & \text{ख}_{\text{३}} & \text{ग}_{\text{३}} \end{vmatrix} + \text{क}_{\text{४}}\begin{vmatrix} \text{अ}_{\text{१}} & \text{ख}_{\text{१}} & \text{ग}_{\text{१}} \\ \text{अ}_{\text{२}} & \text{ख}_{\text{२}} & \text{ग}_{\text{२}} \\ \text{अ}_{\text{३}} & \text{ख}_{\text{३}} & \text{ग}_{\text{३}} \end{vmatrix} - \text{ख}_{\text{४}}\begin{vmatrix} \text{अ}_{\text{१}} & \text{क}_{\text{१}} & \text{ग}_{\text{१}} \\ \text{अ}_{\text{२}} & \text{क}_{\text{२}} & \text{ग}_{\text{२}} \\ \text{अ}_{\text{३}} & \text{क}_{\text{३}} & \text{ग}_{\text{३}} \end{vmatrix}$$

$$+ \text{ग}_{\text{४}}\begin{vmatrix} \text{अ}_{\text{१}} & \text{क}_{\text{१}} & \text{ख}_{\text{१}} \\ \text{अ}_{\text{२}} & \text{क}_{\text{२}} & \text{ख}_{\text{२}} \\ \text{अ}_{\text{३}} & \text{क}_{\text{३}} & \text{ख}_{\text{३}} \end{vmatrix}$$

$$= -\text{अ}_{\text{४}}\,\text{कफ}_{\text{अ}_{\text{४}}} + \text{क}_{\text{४}}\,\text{कफ}_{\text{क}_{\text{४}}} - \text{ख}_{\text{४}}\,\text{कफ}_{\text{ख}_{\text{४}}} + \text{ग}_{\text{४}}\,\text{कफ}_{\text{ग}_{\text{४}}}$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{४} & \text{३} & \text{५} \\ \text{८} & \text{७} & \text{२} \\ \text{६} & \text{४} & \text{९} \end{vmatrix} = \text{४}\begin{vmatrix} \text{७} & \text{२} \\ \text{४} & \text{९} \end{vmatrix} - \text{८}\begin{vmatrix} \text{३} & \text{५} \\ \text{४} & \text{९} \end{vmatrix} + \text{६}\begin{vmatrix} \text{३} & \text{५} \\ \text{७} & \text{२} \end{vmatrix}$$

$$= \text{४}(\text{६३} - \text{८}) - \text{८}(\text{२७} - \text{२०}) + \text{६}(\text{६} - \text{३५})$$

$$= \text{४} \times \text{५५} - \text{८} \times \text{७} - \text{६} \times \text{२९} = \text{२२०} - \text{५६} - \text{१७४}$$

$$= \text{२२०} - \text{२३०}$$

$$= -\text{१०}\ ।$$

(५) नीचे लिखे हुए कनिष्ठफल का मान बताओ।

$$\begin{vmatrix} \text{८} & \text{७} & \text{२} & \text{२०} \\ \text{३} & \text{१} & \text{४} & \text{७} \\ \text{१०} & \text{०} & \text{२२} & \text{०} \\ \text{८} & \text{१} & \text{०} & \text{६} \end{vmatrix}$$

इसे तीसरी पंक्ति के वश से फैलाने में सुभीता पड़ेगा क्योंकि उसमें दो शून्य ध्रुवाङ्क हैं; इसलिये

$$\text{कफ} = \text{१०}\begin{vmatrix} \text{७} & \text{२} & \text{२०} \\ \text{१} & \text{४} & \text{७} \\ \text{१} & \text{०} & \text{६} \end{vmatrix} + \text{२२}\begin{vmatrix} \text{८} & \text{७} & \text{२०} \\ \text{२} & \text{१} & \text{७} \\ \text{८} & \text{१} & \text{६} \end{vmatrix}$$

इन दोनों कनिष्ठफल के फैलाने से कफ = ४३७६ ।

६। फैला कर दिखलाओ कि

$$\begin{vmatrix} \text{०} & \text{ख} & \text{क} & \text{ग} \\ \text{ख} & \text{०} & \text{अ} & \text{घ} \\ \text{क} & \text{अ} & \text{०} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{घ} & \text{फ} & \text{०} \end{vmatrix} = \text{१अ}^{२}\text{ग}^{२} + \text{क}^{२}\text{घ}^{२} + \text{ख}^{२}\text{फ}^{२} - \text{२कखघफ} - \text{२खअफघ} - \text{२अकगघ}$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{१} & \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ -\text{अ} & \text{१} & \text{ख}' & -\text{क}' \\ -\text{क} & -\text{ख}' & \text{१} & \text{अ}' \\ -\text{ख} & \text{क}' & -\text{अ}' & \text{१} \end{vmatrix} = \text{१} + \text{अ}^{२} + \text{क}^{२} + \text{ख}^{२} + \text{अ}'^{२} + \text{क}'^{२} + \text{ख}'^{२} + (\text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}')^{२}$$

८। फैलाकर दिखाओ कि

$$\begin{vmatrix} -\text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क} & -\text{अ} & \text{ग} & \text{ख} \\ \text{ख} & \text{ग} & -\text{अ} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{ख} & \text{क} & -\text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{अ}^{४} + \text{क}^{४} + \text{ख}^{४} + \text{ग}^{४} - \text{२क}^{२}\text{ख}^{२} - \text{२ख}^{२}\text{अ}^{२} - \text{२अ}^{२}\text{क}^{२} - \text{२अ}^{२}\text{ग}^{२} - \text{२क}^{२}\text{ग}^{२} - \text{२ख}^{२}\text{ग}^{२} - \text{८अकखग}$$

९। फैला कर दिखलाओ और सरूप समीकरण को भी सिद्ध करो कि

$$\text{य}^{४} + \text{र}^{४} + \text{ल}^{४} - \text{२र}^{२}\text{ल}^{२} - \text{२य}^{२}\text{ल}^{२} - \text{२य}^{२}\text{र}^{२} = \begin{vmatrix} \text{०} & \text{१} & \text{१} & \text{१} \\ \text{१} & \text{०} & \text{ल}^{२} & \text{र}^{२} \\ \text{१} & \text{ल}^{२} & \text{०} & \text{य}^{२} \\ \text{१} & \text{र}^{२} & \text{य}^{२} & \text{०} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{०} & \text{य} & \text{र} & \text{ल} \\ \text{य} & \text{०} & \text{ल} & \text{र} \\ \text{र} & \text{ल} & \text{०} & \text{य} \\ \text{य} & \text{र} & \text{ल} & \text{०} \end{vmatrix}$$

पहिले की ऊपर वाली तिर्यक् पंक्ति के ध्रुवों को यरल से गुण दो औरों को क्रम से य, र, ल, से गुण दो। फिर दूसरी, तीसरी और चौथी ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के ध्रुवों को क्रम से रल, यल, और यर से अपवर्त्तन दे दो तो दूसरा रूप बन जायगा।

१०। सिद्ध करो कि

$$-\begin{vmatrix} अ & ह & ग & र \\ ह & क & फ & म \\ ग & फ & ख & न \\ र & म & न & 0 \end{vmatrix} = (कख - फ^2)र^2 + (खअ - ग^2)म^2 + (अक - ह^2)न^2 + २(गह - अफ)मन + २(हफ - कग)रन + २(फग - खह) रम$$

१८७—यदि

$$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 \\ अ_2 & क_2 \end{vmatrix} = (अ_1\ क_2), \quad \begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} = (अ_1\ क_2\ ख_3)$$

इत्यादि कल्पना करो तो लाप्लेस (Laplace) ने किसी कनिष्ठ फल को लघु कनिष्ठ फलों के घातों के योग रूप में ले आने के लिये साधारण युक्ति दिखलाई है जिसके अन्तर्गत ऊपर के प्रक्रम की युक्ति है।

कल्पना करो कि किसी कनिष्ठफल में ऊर्ध्वाधर दो पंक्तिओं ($अ_1$, $क_1$) के ध्रुवांकों के वश किसी दो तिर्यक् पङ्क्तिओं के वश से जो कनिष्ठफल उत्पन्न होता है वह ($अ_पक_व$) यह है और इसका पूरक $कफ_{प,व}$ लघुकनिष्ठफल और इसका पूरक ($अ_पक_व$) है तो पहिला कनिष्ठफल = यो $\pm$ ($अ_पक_व$) $कफ_{प,व}$ यह होगा। क्योंकि कनिष्ठफल के प्रत्येक पद में एक ध्रुव $अ_1$, ऊर्ध्वाधर और एक ध्रुव $क_1$ ऊर्ध्वाधर पंक्ति का रहेगा। मान लो कि एक पद में $अ_पक_व$ गुणक है तो एक दूसरा पद अवश्य

प और व के बदलने से ऐसा होगा जिसका गुणक $अ_{व}क_{प}$ होगा। इसलिये कनिष्ठफल को यों $(अ_{प}क_{व})\ आ_{प,व}$ इस रूप में फैला सकते हैं, जहां $आ_{प,व}$ यह उन सब पदों का योग है जो कि ख, ग, घ इत्यादि के आगे न − २ संख्याओं से जो अङ्कराश से भेद होंगे वे लगे रहेंगे। $\pm\ कफ_{प,व}$ इसका चिन्ह १८० प्रक्रम से विदित हो जायगा। इसी प्रकार तीन, चार इत्यादि ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के ध्रुवाङ्कों के वश किसी तीन, चार इत्यादि तिर्यक् पंक्तिओं के वश से जो कनिष्ठफल होंगे इनके और उनके पूरक लघु कनिष्ठफलों के गुणनफलों के योग रूप में किसी कनिष्ठफल को प्रकाश कर सकते है। जैसे

उदाहरण—(१) $(अ_{१}क_{२}ख_{३}ग_{४})$ इसका मान पहिली दो ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश जो लघु कनिष्ठफल बनेंगे उनके रूप मे लाओ। यहां ऊपर की युक्ति से

$$कफ = (अ_{१}क_{२})(ख_{३}ग_{४}) - (अ_{१}क_{३})(ख_{२}द_{४}) + (अ_{१}क_{४})(ख_{२}ग_{३})$$
$$+ (अ_{२}क_{३})(ख_{१}ग_{४}) - (अ_{२}क_{४})(ख_{१}ग_{३}) + (अ_{३}क_{४})(ख_{१}ग_{२})$$

चिन्ह जानने के लिये दो तिर्यक् पंक्तिओं को चला कर क्रम से पहिली और दूसरी तिर्यक् पंक्ति पर पहुँचाओ और हटाए स्थानों का योग विषम हो तो ऋण और सम हो तो धन समझो। जैसे $(अ_{१}क_{३})$ में $अ_{१}$ बिना हटाए पहिली पंक्ति में है और $क_{३}$ एक स्थान हटाने से दूसरी तिर्यक् पंक्ति पर पहुँचती है; इसलिये हटे स्थानों का योग १ विषम होने से वह पद ऋण हुआ। इसी प्रकार $(अ_{२}क_{३})(ख_{१}ग_{४})$ इस पद में $अ_{२}$ को और $अ_{३}$ को एक एक वेर हटाने से ये क्रम से पहिली और दूसरी पंक्ति पर पहुँचते हैं; इसलिये हटे स्थानों का योग २ सम होने

से पद धन हुआ। और $(\text{अ}_{२}\text{क}_{४})$ $(\text{ख}_{१}\text{ग}_{३})$ इसमें $\text{अ}_{२}$ को एक बेर और $\text{क}_{४}$ को दो बेर हटाने से क्रम से ये पहिली और दूसरी पंक्ति पर पहुँचते हैं; इसलिये हटे स्थानों का योग ३ विषम होने से पद ऋण हुआ। इस प्रकार सर्वत्र चिन्ह का ज्ञान कर लेना चाहिए।

२। $(\text{अ}_{१}\text{क}_{२}\text{ख}_{३}\text{ग}_{४}\text{घ}_{५})$

$$
\begin{aligned}
&=(\text{अ}_{१}\text{क}_{२})\,(\text{ख}_{३}\text{ग}_{४}\text{घ}_{५})-(\text{अ}_{१}\text{क}_{३})\,(\text{ख}_{२}\text{ग}_{४}\text{घ}_{५})\\
&+(\text{अ}_{१}\text{क}_{४})\,(\text{ख}_{२}\text{ग}_{३}\text{घ}_{५})-(\text{अ}_{१}\text{क}_{५})\,(\text{ख}_{२}\text{ग}_{३}\text{घ}_{४})\\
&+(\text{अ}_{२}\text{क}_{३})\,(\text{ख}_{१}\text{ग}_{४}\text{घ}_{५})-(\text{अ}_{२}\text{क}_{४})\,(\text{ख}_{१}\text{ग}_{३}\text{घ}_{५})\\
&+(\text{अ}_{२}\text{क}_{५})\,(\text{ख}_{१}\text{ग}_{३}\text{घ}_{४})+(\text{अ}_{३}\text{क}_{४})\,(\text{ख}_{१}\text{ग}_{२}\text{घ}_{५})\\
&-(\text{अ}_{३}\text{अ}_{५})\,(\text{ख}_{१}\text{ग}_{२}\text{घ}_{४})+(\text{अ}_{४}\text{क}_{५})\,(\text{ख}_{१}\text{ग}_{२}\text{घ}_{३})
\end{aligned}
$$

३। सिद्ध करो कि

$$
\begin{vmatrix}
\text{अ}_{१} & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१} & \text{ग}_{१} & \text{घ}_{१} & \text{ङ}_{१}\\
\text{अ}_{२} & \text{क}_{२} & \text{ख}_{२} & \text{ग}_{२} & \text{घ}_{२} & \text{ङ}_{२}\\
\text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & \text{ख}_{३} & \text{ग}_{३} & \text{घ}_{३} & \text{ङ}_{३}\\
० & ० & ० & \text{आ}_{१} & \text{का}_{१} & \text{खा}_{१}\\
० & ० & ० & \text{आ}_{२} & \text{का}_{२} & \text{खा}_{२}\\
० & ० & ० & \text{आ}_{३} & \text{का}_{३} & \text{खा}_{३}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\text{अ}_{१} & \text{क}_{१} & \text{ख}_{१}\\
\text{अ}_{२} & \text{क}_{२} & \text{ख}_{२}\\
\text{अ}_{३} & \text{क}_{३} & \text{ख}_{३}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\text{आ}_{१} & \text{का}_{१} & \text{खा}_{१}\\
\text{आ}_{२} & \text{का}_{२} & \text{खा}_{२}\\
\text{आ}_{३} & \text{का}_{३} & \text{खा}_{३}
\end{vmatrix}
$$

पहिली ऊर्ध्वाधर तीन पंक्तिओं को लेकर यदि लाप्लेस (Laplace) की युक्ति से कनिष्ठफल का रूप फैलाओ तो स्पष्ट है कि जिस पद का गुणक $(\text{अ}_{१}\text{क}_{२}\text{ख}_{३})$ यह है उसे छोड सब पद शून्य होंगे। और $(\text{अ}_{१}\text{क}_{२}\text{ख}_{३})$ इसका गुणक $(\text{आ}_{१}\text{का}_{२}\text{खा}_{३})$ यही होगा। इस प्रकार साधारण से जहां पंक्ति में २म अक्षर हों और म अक्षरों के शून्य हो जाने से $\text{म}^{२}$ कोष्ठ में शून्य हों तो

म अक्षर की पंक्ति से जो दो कनिष्ठफल होंगे उनके गुणनफल के तुल्य पहिला कनिष्ठफल होगा।

४। सिद्ध करो कि

$$\text{अ आ}^2 + \text{क का}^2 + \text{ख खा}^2 + 2\text{फ का र} + 2\text{ग र आ} + 2\text{ह आ का}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{र} & \text{र}' \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} & \text{म}' \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} & \text{न}' \\ \text{र} & \text{म} & \text{न} & 0 & 0 \\ \text{र}' & \text{म}' & \text{न}' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

जहां

$\text{आ} = \text{मन}' - \text{म}'\text{न}$,
$\text{का} = \text{नर}' - \text{न}'\text{र}$,
$\text{खा} = \text{रम}' - \text{र}'\text{म}$।

५। जहाँ प्रत्येक पंक्ति मे न अक्षर हैं वहाँ पहिली त ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के भुवाङ्को के वश त,न तिर्यक् पक्तिओं के कनिष्ठफलों के रूप में मुख्य कनिष्ठफल बनाया जायगा उसमें कितने पद होंगे।

न में से त,त लेकर लघु कनिष्ठफल बनाने से उनकी संख्या

$$\frac{\text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)\cdots(\text{न}-\text{त}+1)}{\text{त}!}$$ इन प्रत्येक लघु कनिष्ठफल में पदों की संख्या त! होगी; इसलिये इनमें सब पद $= \text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)\cdots\cdots(\text{न}-\text{त}+1)$ और प्रत्येक के पूरक लघु कनिष्ठफल में पद संख्या $= (\text{न}-\text{त})!$ इससे ऊपर की सब पद की संख्या को गुण देने से

मुख्य कनिष्ठफल में पदों की संख्या

$$= \text{न}(\text{न}-1)(\text{न}-2)\cdots(\text{न}-\text{त}+1)(\text{न}-\text{त})\cdots\cdots 1$$
$$= \text{न}!$$

यही न अक्षरों की पंक्ति से भी सिद्ध हो जाता है।

१८८—प्रधान भुजाओं के रूप में कनिष्ठफल के ले आने के लिये चार अक्षर की पंक्ति के कनिष्ठफल को अर्थात्

$$कफ = \begin{vmatrix} आ & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & का & ख_2 & ग_2 \\ अ_3 & क_3 & खा & ग_3 \\ अ_4 & क_4 & ख_4 & गा \end{vmatrix}$$

इसे, जहां $अ_1$, $क_2$, $ख_3$, $ग_4$ इनके स्थान में आ, का, खा, गा हैं, आ, का, खा और इसके परस्पर दो दो इत्यादि के घात के रूप में ले आना हो तो ऊपर के प्रक्रमों की युक्ति से

$$कफ = कफ_0 + यो\ र\ आ + यो र' आ\ का + आ\ का\ खा\ गा\ ।$$

जहां जितने पदों में प्रधान भुज नहीं हैं उनके योग के स्थान में $कफ_0$ है और जितने पदों में एक एक प्रधान भुज हैं उनके योग के स्थान में यो र आ, जितने पदों में दो दो प्रधान भुज हैं उनके योग के स्थान में यो र' आ का है। तीन तीन प्रधान भुज नहीं आ सकते क्योंकि जहां $अ_1 क_2 ख_3$ होगा वहां चौथा $ग_4$ भी रहेगा; इसलिये एक स्थान में केवल प्रधान भुजों के घात रहेंगे जो कि अन्त पद में आ का खा गा है। अब $कफ_0$ इसका और र, र' इत्यादि गुणक के जानने के लिये पहिले मान लो कि आ, का, खा, गा चारो शून्य के तुल्य हैं तो

$$कफ_0 = \begin{vmatrix} 0 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & 0 & ख_2 & ग_2 \\ अ_3 & क_3 & 0 & ग_3 \\ अ_4 & क_4 & ख_4 & 0 \end{vmatrix}$$

क्योंकि इसमें प्रधान भुज के कोई पद न रहेंगे।

फिर आ के गुणक र के लिये का, खा, गा तीनों को शून्य मानो तो लघु कनिष्ठफल की युक्ति से गुणक

$$\begin{vmatrix} ० & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ० & ग_३ \\ क_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix} \text{ यह होगा।}$$

इसी प्रकार का का गुणक आ, खा, गा के शून्य मानने से ज्ञात होगा और इसी प्रकार खा और गा के भी गुणक आ जायँगे। र' के लिये खा और गा को शून्य मानो तो आ का का गुणक र'

$$\begin{vmatrix} ० & ग_३ \\ ख_४ & ० \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार आ खा, इत्यादि गुणक भी आ जायँगे। तब

$$कफ = \begin{vmatrix} ० & क_१ & ख_१ & ग_१ \\ अ_२ & ० & ख_२ & ग_२ \\ अ_३ & क_३ & ० & ग_३ \\ अ_४ & क_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ आ \begin{vmatrix} ० & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ० & ग_३ \\ क_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix} + का \begin{vmatrix} ० & ख_१ & ग_१ \\ अ_३ & ० & ग_३ \\ अ_४ & ख_४ & ० \end{vmatrix} + खा \begin{vmatrix} ० & क_१ & ग_१ \\ अ_२ & ० & ग_२ \\ अ_४ & क_४ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ गा \begin{vmatrix} ० & क_१ & ख_१ \\ अ_२ & ० & ख_२ \\ अ_३ & क_३ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ आका \begin{vmatrix} ० & ग_३ \\ ख_४ & ० \end{vmatrix} + आ\,खा \begin{vmatrix} ० & ग_३ \\ क_४ & ० \end{vmatrix} + आगा \begin{vmatrix} ० & ख_२ \\ क_३ & ० \end{vmatrix}$$

$$+ काखा \begin{vmatrix} ० & ग_१ \\ अ_४ & ० \end{vmatrix} + का\,गा \begin{vmatrix} ० & ख_१ \\ अ_३ & ० \end{vmatrix} + खा\,गा \begin{vmatrix} ० & क_१ \\ अ_२ & ० \end{vmatrix} + आकाखागा$$

जिस कनिष्ठफल में प्रधान ध्रुव शून्य होते हैं उस कनिष्ठफल को अप्रधान ध्रुवक वा निरक्ष कहते हैं। इस प्रकार से यहां जितने आ, का, ·····इत्यादि के गुणक हैं सब निरक्ष कनिष्ठफल हैं।

१८६—यदि कनिष्ठफल का रूप एक तिर्यक् और एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों में दा दो लेकर उनके गुणन के रूप में फैलाना हो तो केवल प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक् पंक्ति के वश से क्रिया दिखला देने से सर्वत्र काम चल जायगा क्योंकि किसी ऊर्ध्वाधर और किसी तिर्यक् पंक्ति को हटा कर प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक् पंक्ति के स्थान में ला सकते हो।

सुभीते के लिये कनिष्ठफल के रूप में प्रथम ऊर्ध्वाधर और प्रथम तिर्यक्पंक्तिस्थ ध्रुवों को दूसरे प्रकार के अक्षरों में लिखने से

$$\begin{vmatrix} अ_0 & अ & क & ख & \cdots \\ अ' & अ_1 & क_1 & ख_1 & \cdots \\ क' & अ_2 & क_2 & ख_2 & \cdots \\ ख' & अ_3 & क_3 & ख_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

ऐसा हुआ। इसे कफ' कहो और $अ_0$ सम्बन्धि प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल को कफ कहो तो कफ' फैलाने से जितने पदों में $अ_0$ गुणक होगा वे $अ_0$ क फ इसके अन्तर्गत हैं। अब जितने पदों में प्रथम ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्ति के एक एक ध्रुवों के गुणनफल गुणक होंगे उनके गुण्यों के जानने के लिये मान लो कि अ अ' गुणक का गुण्य जानना है। १८६ प्रक्रम से कल्पना करो कि कफ को फैलाने से

$अ_1, क_1, ख_1, \ldots\ldots अ_2, क_2, \ldots\ldots$ के गुणक

$आ_1, का_1, खा_1, \ldots\ldots का_2, खा_2, \ldots\ldots$ है। तो स्पष्ट है कि कफ' के विस्तृत रूप में अअ' गुणक का जो गुण्य होगा वही कफ के विस्तृत रूप में $अ_1 अ_1$ का गुण्य विपरीत चिन्ह का होगा। इसी प्रकार अ'क गुणक का गुण्य, $अ_0 क_1$ गुणक के विपरीत चिन्ह गुण्य $-का_1$ होगा। इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए। इस पर से यह सहज युक्ति उत्पन्न होती है कि प्रधान ध्रुव $अ_0$ और जिन दो ध्रुवों के गुणनफल का गुणक जानना हो उन दोनों को लेने से देखो कि चौथा ध्रुव कौन है जिसके लेने से चतुर्भुज पूरा हो जाता है तो इसी चौथे ध्रुव का जो गुणक $आ_1, का_1, खा_1, \ldots\ldots$ में से हो उसी को विपरीत चिन्ह करने से उन दोनों के गुणनफल का गुणक होगा। जैसे खक' के गुणक को जानना है तो $अ_0$, ख, क' इन्हें चतुर्भुज के तीन कोनों पर मानने से $ख_2$ को लेने से चतुर्भुज पूरा हो जाता है; इसलिये $ख_2$ के गुणक को विपरीत चिन्ह का करने से $-खा_2$ यह खक' का गुणक होगा। इस प्रकार

$$कफ' = अ_0 कफ - आ_1 अअ' - का_1 कअ' - खा_1 खअ' - \ldots\ldots$$
$$- आ_2 अक' - का_2 कक' - खा_2 खक' - \ldots\ldots$$
$$- आ_3 अख' - का_3 कख' - खा_3 खख' - \ldots\ldots$$

इत्यादि—

१९०—कनिष्ठफलों का सङ्कलन।

किसी पंक्ति के प्रत्येक ध्रुवक यदि दो संख्याओं के योग रूप में पृथक् पृथक् किए जायँ तो पहिला कनिष्ठफल दो अन्य कनिष्ठफलों के योग रूप में हो सकता है।

कल्पना करो कि पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ध्रुव रू
$अ_१ + अ'_१, अ_२ + अ'_२, अ_३ + अ_३', \cdots\cdots$

इस रूप के हैं तो १८६ प्र० से

$$क फ = (अ_१ + अ'_१) आ_१ + (अ_२ + अ'_२) आ_२ + (अ_३ + अ'_३) आ_३ + \cdots\cdots$$

$$= अ_१ आ_१ + अ_२ आ_२ + अ_३ आ_३ + \cdots\cdots + अ'_१ आ_१ + अ'_२ आ_२ + अ'_३ आ_३ + \cdots\cdots$$

वा

$$\begin{vmatrix} अ_१ + अ'_१ & क_१ & ख_१ \cdots \\ अ_२ + अ'_२ & क_२ & ख_२ \cdots \\ अ_३ + अ'_३ & क_३ & ख_३ \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_१ & क_१ & ख_१ \cdots \\ अ_२ & क_२ & ख_२ \cdots \\ अ_३ & क_३ & ख_२ \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} अ'_१ & क_१ & ख_१ \cdots \\ अ'_२ & क_२ & ख_२ \cdots \\ अ'_३ & क_३ & ख_३ \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

इस पर से ऊपर का सिद्धान्त सिद्ध होता है।

यदि दूसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति में भी दो संख्याओं के योग हों तो ऊपर ही की युक्ति से पहिले प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश दो कनिष्ठफल के योग रूप में वास्तव कनिष्ठफल को ले आओ फिर दूसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति के वश से प्रत्येक कनिष्ठ-फल के योग रूप में ले आओ। इस प्रकार, वास्तव कनिष्ठ-फल चार कनिष्ठफलों के योग रूप में आवेगा।

जैसे

$$\begin{vmatrix} अ_१ + अ'_१ & क_१ + क'_१ & ख_१ \\ अ_२ + अ'_२ & क_२ + क'_२ & ख_२ \\ अ_३ + अ'_३ & क_३ + क'_३ & ख_३ \end{vmatrix}$$

यह १८७वें प्रक्रम के संकेत से

$(अ_1 क_2 ख_3) + (अ'_1 क_2 ख_3) + (अ_1 क'_2 ख_3) + (अ'_1 क'_2 ख_3)$
इसके तुल्य होगा।

इसी प्रकार

$$\begin{vmatrix} अ_1 - अ'_1 + अ''_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 - अ'_2 + अ''_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 - अ'_3 + अ''_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} अ'_1 & क_1 & ख_1 \\ अ'_2 & क_2 & ख_2 \\ अ'_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} अ''_1 & क_1 & ख_1 \\ अ''_2 & क_2 & ख_2 \\ क''_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

यदि प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्ति में म खण्ड, दूसरे में न खण्ड, तीसरे में प खण्ड हों तो कनिष्ठफल म·न·प·तुल्य अन्य कनिष्ठ-फलों के योग रूप में होगा।

यदि तिर्यक् पंक्ति में ध्रुवों के कई खण्ड हों तो तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर और ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को तिर्यक् पंक्तिओं में रखकर ऊपर की युक्ति से कनिष्ठफल को अन्य कनिष्ठफलों के योग रूप में बना सकते हो।

१६१—यदि एक पंक्तिस्थ ध्रुवक क्रम से स्थिर संख्या गुणित सजातीय पंक्तिस्थ ध्रुवों के योग तुल्य हों तो कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा।

जैसे

$$\begin{vmatrix} मअ_1 + नक_1 & अ_1 & क_1 \\ मअ_2 + नक_2 & अ_2 & क_2 \\ मअ_3 + नक_3 & अ_3 & क_3 \end{vmatrix} = म \begin{vmatrix} अ_1 & अ_1 & क_1 \\ अ_2 & अ_2 & क_2 \\ अ_3 & अ_3 & क_3 \end{vmatrix} + न \begin{vmatrix} क_1 & अ_1 & क_1 \\ क_2 & अ_2 & क_2 \\ क_3 & अ_3 & क_3 \end{vmatrix}$$

यहां दहिने पक्ष के दोनों कनिष्ठफल १८२ वें प्रक्रम से शून्य होंगे।

१६२—एक पंक्तिस्थ ध्रुवों में क्रम से स्थिर संख्या गुणित सजातीय पंक्तिस्थ ध्रुवों को जोड़ कर उस पंक्ति के ध्रुव बनाए जायँ तो कनिष्ठफल में भेद नहीं पड़ता।

क्योंकि

$$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 + म क_1 + न ख_1 & क_1 & ख_1 \\ अ_2 + म क_2 + न ख_2 & क_2 & ख_2 \\ अ_3 + म क_3 + न ख_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

इसमें दहिना पक्ष तीन कनिष्ठफलों के योग तुल्य होगा, जिनमें पहिला बायें पक्ष के समान और दो १६१ प्रक्रम से शून्य के तुल्य होंगे।

उदाहरण—(१) सिद्ध करो कि।

$$\begin{vmatrix} क + ख & अ & १ \\ ख + अ & क & १ \\ अ + क & ख & १ \end{vmatrix} = ०$$

द्वितीय ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों को पहिले ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में जोड़ देने से फिर अ + क + ख समान गुणक निकाल लेने से पहिले ऊर्ध्वाधर और तीसरे ऊर्ध्वाधर में एक ही ध्रुवक होंगे, इसलिये कनिष्ठफल शून्य होगा।

(२) सिद्ध करो कि।

$$\begin{vmatrix} १ & २ & ४ \\ २ & ३ & ७ \\ ३ & ४ & १ \end{vmatrix}$$ इसका मान बताओ।

पहिले ऊर्ध्वाधर के एक गुणित ध्रुवक दूसरे ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में और त्रिगुणित तीसरे ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में घटा देने से द्वितीय और तृतीय ऊर्ध्वाधर के ध्रुवक समान होते हैं। इसलिये मान शून्य होगा

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} -१ & १ & १ & १ \\ १ & -१ & १ & १ \\ १ & १ & -१ & १ \\ १ & १ & १ & -१ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -१ & १ & १ & १ \\ ० & ० & २ & २ \\ ० & २ & ० & २ \\ ० & २ & २ & ० \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ० & २ & २ \\ २ & ० & २ \\ २ & २ & ० \end{vmatrix} = -१६$$

(४) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ७ & ११ & ४ \\ १३ & १५ & १० \\ ६ & १८ & १२ \end{vmatrix} = ६\begin{vmatrix} ७ & ११ & ४ \\ १३ & १५ & १० \\ १ & ३ & २ \end{vmatrix} = ६\begin{vmatrix} ७ & -१० & -१० \\ १३ & -२४ & -१६ \\ १ & १ & ० \end{vmatrix} =$$

$$६\begin{vmatrix} १० & १० \\ २४ & १६ \end{vmatrix}$$

$$= ६०(१६ - २४) = -४८० ।$$

(५) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ७ & -२ & ० & ५ \\ -२ & ६ & -२ & २ \\ ० & -२ & ५ & ३ \\ ५ & २ & ३ & ४ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ७ & -२ & ० & ५ \\ १९ & ० & -२ & १७ \\ -७ & ० & ५ & -२ \\ १२ & ० & ३ & ९ \end{vmatrix}$$

$$= २\begin{vmatrix} १९ & -३ & १७ \\ -७ & ५ & -२ \\ १२ & ३ & ९ \end{vmatrix} = २\begin{vmatrix} २७ & -२ & ३३ \\ -२७ & ५ & -१७ \\ ० & ३ & ० \end{vmatrix}$$

$$= -६\begin{vmatrix} २७ & ३३ \\ -२७ & -१७ \end{vmatrix} = -९७२ ।$$

(६) सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} १ & १५ & १४ & ४ \\ १२ & ६ & ७ & ९ \\ ८ & १० & ११ & ५ \\ १३ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix}$$

इस चौंतीसे यन्त्र में पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवकों में और ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवकों को जोड़ देने से

$$\text{कफ} = ३४ \begin{vmatrix} १ & १५ & १४ & ४ \\ १ & ६ & ७ & ९ \\ १ & १० & ११ & ५ \\ १ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix} = ३४ \begin{vmatrix} ० & १२ & १२ & -१२ \\ ० & ३ & ५ & -७ \\ ० & ७ & ९ & -११ \\ १ & ३ & २ & १६ \end{vmatrix}$$

$$= -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & ३ & २ & १६ \\ ० & १ & १ & -१ \\ ० & ३ & ५ & -७ \\ ० & ७ & ९ & -११ \end{vmatrix} = -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ ७ & ९ & -११ \end{vmatrix}$$

$$= -३४ \times १२ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ ४ & ४ & -४ \end{vmatrix} = -३४ \times १२ \times ४ \begin{vmatrix} १ & १ & -१ \\ ३ & ५ & -७ \\ १ & १ & -१ \end{vmatrix} = ०$$

७। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ४ & ९ & २ \\ ३ & ५ & ७ \\ ८ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} १ & ९ & २ \\ १ & ५ & ७ \\ १ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} ० & ८ & -४ \\ ० & ४ & १ \\ १ & १ & ६ \end{vmatrix} = १५ \begin{vmatrix} १ & १ & ६ \\ ० & ८ & -४ \\ ० & ४ & १ \end{vmatrix}$$

$$= १५ \begin{vmatrix} ८ & -४ \\ ४ & १ \end{vmatrix} = ३६० ।$$

८ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{१०} & \text{१८} & \text{१} & \text{१४} & \text{२२} \\ \text{४} & \text{१२} & \text{२५} & \text{८} & \text{१६} \\ \text{२३} & \text{६} & \text{१९} & \text{२} & \text{१५} \\ \text{१७} & \text{५} & \text{१३} & \text{२१} & \text{९} \\ \text{११} & \text{२४} & \text{७} & \text{२०} & \text{३} \end{vmatrix} = -\text{४६८००००}$$

९ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{०} & \text{१} & \text{१} & \text{१} \\ \text{१} & \text{०} & \text{ल}^{\text{२}} & \text{र}^{\text{२}} \\ \text{१} & \text{ल}^{\text{२}} & \text{०} & \text{य}^{\text{२}} \\ \text{१} & \text{र}^{\text{२}} & \text{य}^{\text{२}} & \text{०} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{०} & \text{१} & \text{०} & \text{०} \\ \text{१} & \text{०} & \text{ल}^{\text{२}} & \text{र}^{\text{२}} \\ \text{१} & \text{ल}^{\text{२}} & -\text{ल}^{\text{२}} & \text{य}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}} \\ \text{१} & \text{र}^{\text{२}} & \text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}} & -\text{र}^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{१} & \text{ल}^{\text{२}} & \text{र}^{\text{२}} \\ \text{१} & -\text{ल}^{\text{२}} & \text{य}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}} \\ \text{१} & \text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}} & -\text{र}^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \text{१} & \text{ल}^{\text{२}} & \text{र}^{\text{२}} \\ \text{०} & -\text{२ल}^{\text{२}} & \text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}} \\ \text{०} & \text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}} & -\text{२र}^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \text{२ल}^{\text{२}} & \text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}} \\ \text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}} & \text{२र}^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}})^{\text{२}} - \text{४र}^{\text{२}}\text{ल}^{\text{२}}$$

$$= (\text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}}+\text{२रल})(\text{य}^{\text{२}}-\text{र}^{\text{२}}-\text{ल}^{\text{२}}-\text{२रल})$$

$$= \{\text{य}^{\text{२}}-(\text{र}-\text{ल})^{\text{२}}\}\{\text{य}^{\text{२}}-(\text{र}+\text{ल})^{\text{२}}\}$$

$$= (\text{य}-\text{र}+\text{ल})(\text{य}+\text{र}-\text{ल})(\text{य}-\text{र}-\text{ल})(\text{य}+\text{र}+\text{ल})$$

$$= -(\text{य}+\text{र}+\text{ल})(\text{य}+\text{ल}-\text{र})(\text{य}+\text{र}-\text{ल})(\text{र}+\text{ल}-\text{य})$$

१० । सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \frac{(\text{क}+\text{ख})^{\text{२}}}{\text{अ}} & \text{अ} & \text{अ} \\ \text{क} & \frac{(\text{ख}+\text{अ})^{\text{२}}}{\text{क}} & \text{क} \\ \text{ख} & \text{ख} & \frac{(\text{अ}+\text{क})^{\text{२}}}{\text{ख}} \end{vmatrix} = \text{२}(\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{३}}$$

∴ निष्ठफल को अकख से गुणा देने से

$$\text{अकख} \cdot \text{कफ} = \begin{vmatrix} (\text{क}+\text{ख})^{\text{२}} & \text{अ}^{\text{२}} & \text{अ}^{\text{२}} \\ \text{क}^{\text{२}} & (\text{ख}+\text{अ})^{\text{२}} & \text{क}^{\text{२}} \\ \text{ख}^{\text{२}} & \text{ख}^{\text{२}} & (\text{अ}+\text{क})^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

अन्तिम ऊर्ध्वाधर ध्रुवकों में घटा देने से

$$\text{अकख} \cdot \text{कफ} = \begin{vmatrix} (\text{क}+\text{ख})^{\text{२}}-\text{अ}^{\text{२}} & \text{०} & \text{अ}^{\text{२}} \\ \text{०} & (\text{ख}+\text{अ})^{\text{२}}-\text{क}^{\text{२}} & \text{क}^{\text{२}} \\ \text{ख}^{\text{२}}-(\text{अ}+\text{क})^{\text{२}} & \text{ख}^{\text{२}}-(\text{अ}+\text{क})^{\text{२}} & (\text{अ}+\text{क})^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{क}+\text{ख}-\text{अ}) & \text{०} & \text{अ}^{\text{२}} \\ \text{०} & (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{ख}+\text{अ}-\text{क}) & \text{क}^{\text{२}} \\ (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{ख}-\text{अ}-\text{क}) & (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})(\text{ख}-\text{अ}-\text{क}) & (\text{अ}+\text{क})^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{२}} \begin{vmatrix} \text{क}+\text{ख}-\text{अ} & \text{०} & \text{अ}^{\text{२}} \\ \text{०} & \text{ख}+\text{अ}-\text{क} & \text{क}^{\text{२}} \\ \text{ख}-\text{अ}-\text{क} & \text{ख}-\text{अ}-\text{क} & (\text{अ}+\text{क})^{\text{२}} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ}+\text{क}+\text{ख})^{\text{२}} \begin{vmatrix} \text{क}+\text{ख}-\text{अ} & \text{०} & \text{अ}^{\text{२}} \\ \text{०} & \text{ख}+\text{अ}-\text{क} & \text{क}^{\text{२}} \\ -\text{२क} & -\text{२अ} & \text{२अक} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(अ+क+ख)^{२}}{अक} \begin{vmatrix} अ(क+ख-अ) & ० & अ^{२} \\ ० & क(ख+अ-क) & क^{२} \\ -२अक & -२अक & २अक \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(अ+क+ख)^{२}}{अक} \begin{vmatrix} अ(अ+क) & अ^{२} & अ^{२} \\ क^{२} & क(ख+अ) & क^{२} \\ ० & ० & २अक \end{vmatrix}$$

$$= २अक(अ+क+ख)^{२} \begin{vmatrix} क+ख & अ & अ \\ क & ख+अ & क \\ ० & ० & १ \end{vmatrix}$$

$$= २अक(अ+क+ख)^{२} \begin{vmatrix} क+ख & अ \\ क & ख+अ \end{vmatrix}$$

$$= २अकख\,(अ+क+ख)^{३}$$

$\therefore$ कफ $= २(अ+क+ख)^{३}$ ।

११ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ अ & क & ख \\ अ^{२} & क^{२} & ख^{२} \end{vmatrix} = (क-ख)(ख-अ)(ख-क)(अ+क+ख)$$

१२ । सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & १ & १ & १ & १ \\ अ & क & ख & ग & घ \\ अ^{२} & क^{२} & ख^{२} & ग^{२} & घ^{२} \\ अ^{४} & क^{४} & ख^{४} & ग^{४} & घ^{४} \end{vmatrix} = -(क-ख)(अ-घ)(ख-अ)(क-घ)(अ-क)\cdot \;\cdots\cdots \;\cdots\cdots (ग-घ)(अ+क+ख+ग+घ)$$

१३ । सिद्ध करो कि

कफ $= \begin{vmatrix} अ & क & ख \\ ख & अ & क \\ क & ख & अ \end{vmatrix}$ इसका मान बताओ ।

मान लो कि १ का घनमूल घा, घा², घा³, = १ ये हैं। दूसरी ऊर्ध्वाधर को घा से, तीसरी को घा² से गुण कर पहिली में जो १ = घा³ से गुणित है जोड़ देने से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अघा}^3 + \text{कघा} + \text{खघा}^2 & \text{क} & \text{ख} \\ \text{खघा}^3 + \text{अघा} + \text{कघा}^2 & \text{अ} & \text{क} \\ \text{कघा}^3 + \text{खघा} + \text{अघा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2 & \text{क} & \text{ख} \\ \text{घा}(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) & \text{क} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} १ & \text{क} & \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} १ + \text{घ} + \text{घा}^2 & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} ० & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} & \text{अ} + \text{क} + \text{ख} \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} ० & १ & १ \\ \text{घा} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} ० & ० & १ \\ \text{घा} & \text{अ} - \text{क} & \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} - \text{अ} & \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})(\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2) \begin{vmatrix} \text{घा} & \text{अ} - \text{क} \\ \text{घा}^2 & \text{ख} - \text{अ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अ} + \text{क} + \text{ख})\ (\text{अ} + \text{कघा} + \text{खघा}^2)\ (\text{अ} + \text{खघा} + \text{कघा}^2)\ ।$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क} & \text{अ} & \text{ग} & \text{ख} \\ \text{ख} & \text{ग} & \text{अ} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{ख} & \text{क} & \text{अ} \end{vmatrix} = -(\text{अ}+\text{क}+\text{ख}+\text{ग})(\text{क}+\text{ख}-\text{अ}-\text{ग})(\text{ख}+\text{अ}-\text{क}-\text{घ})(\text{अ}+\text{क}-\text{ख}-\text{घ})$$

१८६ प्रक्रम का ८वाँ उदाहरण देखो उसमें −अ = अ।

यहाँ प्रत्येक गुणक खण्ड निकल आवेंगे। जैसे पहिले ऊर्ध्वाधर में दूसरे को जोड़ तीसरा और चौथा घटाओ तो अ+क−ख−घ यह गुणक खण्ड आ जायगा। प्रथम ऊर्ध्वाधर में और तीनों को जोड़ देने से अ+क+ख+ग यह गुणक आ जायगा। इस प्रकार और भी दोनों गुणक आ जायँगे।

१६३—कनिष्ठफलों का गुणन।

यदि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \text{ इसका और } \begin{vmatrix} \text{आ}_1 & \text{का}_1 & \text{गा}_1 \\ \text{आ}_2 & \text{का}_2 & \text{गा}_2 \\ \text{आ}_3 & \text{का}_3 & \text{गा}_3 \end{vmatrix}$$

इसका मान फैलाकर बीजगणित की साधारण रीति से गुणन करो और गुणनफलों के प्रत्येक पद को यथोचित क्रम से रक्खो तो गुणनफल

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{आ}_1+\text{क}_1\text{का}_1+\text{ग}_1\text{गा}_1 & \text{अ}_1\text{आ}_2+\text{क}_1\text{का}_2+\text{ग}_1\text{गा}_2 & \text{अ}_1\text{आ}_3+\text{क}_1\text{का}_3+\text{ग}_1\text{गा}_3 \\ \text{अ}_2\text{आ}_1+\text{क}_2\text{का}_1+\text{ग}_2\text{गा}_1 & \text{अ}_2\text{आ}_2+\text{क}_2\text{का}_2+\text{ग}_2\text{गा}_2 & \text{अ}_2\text{आ}_3+\text{क}_2\text{का}_3+\text{ग}_2\text{गा}_3 \\ \text{अ}_3\text{आ}_1+\text{क}_3\text{का}_1+\text{ग}_3\text{गा}_1 & \text{अ}_3\text{आ}_2+\text{क}_3\text{का}_2+\text{ग}_3\text{गा}_2 & \text{अ}_3\text{आ}_3+\text{क}_3\text{का}_3+\text{ग}_3\text{गा}_3 \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि गुण्य और गुणक (जिनके प्रत्येक पंक्ति में ध्रुवों की संख्या एक ही है) के प्रत्येक पंक्ति में जितने ध्रुवक होंगे उतने ही गुणनफल के प्रत्येक पंक्ति में ध्रुवक होंगे। और गुण्य गुणक के तुल्य स्थानीय प्रति तिर्यक् पंक्ति-स्थ ध्रुवों के गुणनफल के योग के समान गुणनफल के तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवक होते हैं। अर्थात् गुण्य के प्रथम तिर्यक् पंक्तिस्थ पहिले ध्रुव $अ_1$ से गुणक के प्रथम तिर्यक् पंक्तिस्थ पहिले ध्रुव $आ_1$ को, दूसरे ध्रुव $क_1$ से दूसरे ध्रुव $का_1$ को और तीसरे ध्रुव $ग_1$ से तीसरे ध्रुव $गा_1$ को गुण कर जोड़ देने से गुणनफल की पहिली तिर्यक् पंक्ति में पहिला ध्रुव होगा। गुण्य के पहिली तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से गुणक के द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को क्रम से यथा स्थान गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में पहिली तिर्यक् पंक्ति का द्वितीय ध्रुव होगा और गुण्य के उन्हीं ध्रुवों से गुणक के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को क्रम से यथा स्थान गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में पहिली तिर्यक् पंक्ति का तीसरा ध्रुव होगा।

इसी प्रकार गुण्य के द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से यथा स्थानक गुणक के प्रति तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को गुण कर जोड़ लेने से गुणनफल में द्वितीय तिर्यक् पंक्तिस्थ क्रम से ध्रुव होंगे।

इसी प्रकार गुण्य के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों से गुणनफल के तृतीय तिर्यक् पंक्तिस्थ ध्रुवों को बना लेना चाहिए।

यह नियम तीन ध्रुव की पंक्ति में ऊपर के गुणनफल में प्रत्यक्ष देख पड़ता है परन्तु चाहे पंक्ति में जितने ध्रुव हों सब के लिये ऊपर का नियम सत्य हो जाता है।

यहां गुणनफल में प्रत्येक ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुव में तीन तीन खण्ड हैं। इसलिये गुणनफल रूप कनिष्ठफल को १९० वें प्रक्रम से २७ अन्यकनिष्ठफलों के योग रूप में ला सकते हो। १८७ प्रक्रम के ३ उदाहरण में भी दो कनिष्ठफलों के गुणनफल के तुल्य एक कनिष्ठफल आया है। उदाहरण—

(१) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ} + \text{इक} & \text{ख} + \text{इग} \\ -\text{ख} + \text{इग} & \text{अ} - \text{इक} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{अ}' - \text{इक}' & \text{ख}' - \text{इग}' \\ -\text{ख} - \text{इग}' & \text{अ}' + \text{इक}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{गा} - \text{इखा} & \text{का} - \text{इआ} \\ -\text{का} - \text{इआ} & \text{गा} + \text{इखा} \end{vmatrix}$$

जहां $\text{इ} = \sqrt{-१}$, $\text{आ} = \text{कख}' - \text{क}'\text{ख} + \text{अग}' - \text{अ}'\text{ग}$,

$\text{का} = \text{खअ}' - \text{ख}'\text{अ} + \text{कग}' - \text{क}'\text{ग}$,

$\text{खा} = \text{अक}' - \text{अ}'\text{क} + \text{खग}' - \text{ख}'\text{ग}$, $\text{गा} = \text{अअ}' + \text{कक}' + \text{ख}'\text{६} + \text{गग}'$।

गुण्य, गुणक और गुणनफल का मान फैलाने से यहां

$$(\text{अ}^२ + \text{क}^२ + \text{ख}^२ + \text{ग}^२)(\text{अ}'^२ + \text{क}'^२ + \text{ख}'^२ + \text{ग}'^२)$$

$$= (\text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}' + \text{गग}')^२ + (\text{कख}' - \text{क}'\text{ख} + \text{अग}' - \text{अ}'\text{ग})^२$$

$$+ (\text{खअ}' - \text{ख}'\text{अ} + \text{कग}' - \text{क}'\text{ग})^२ + (\text{अक}' - \text{अ}'\text{क} + \text{खग}' - \text{ख}'\text{ग})^२$$

यही ओलर का सिद्धान्त (Euler's theorem) है। इस पर से किसी चार संख्या के दो यूथों के वर्ग योग के गुणनफल को चार संख्याओं के वर्ग योग के रूप में ला सकते हैं।

(२) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} २कख - अ^२ & ख^२ & क^२ \\ ख^२ & २खअ - क^२ & अ^२ \\ क^२ & अ^२ & २अक - ख^२ \end{vmatrix} = (अ^३ + क^३ + ख^३ - ३अकख)^२$$

ऊपर के कनिष्ठफल को सहज में जान सकते हो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & अ \\ ख & अ & क \end{vmatrix} \text{ और } \begin{vmatrix} -अ & ख & क \\ -क & अ & ख \\ -ख & क & अ \end{vmatrix}$$ इसके गुणनफल के तुल्य है।

(३) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & ० & ० & ० \\ ० & १ & ० & ० \\ ० & ० & अ_१ & क_१ \\ ० & ० & अ_२ & क_२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_१ & क_१ \\ अ_२ & क_२ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ ० & १ & ग & घ \\ ० & ० & अ_१ & क_१ \\ ० & ० & अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} १ & अ & क & ख \\ ० & १ & ० & ० \\ ० & ग & अ_१ & क_१ \\ ० & घ & अ_२ & क_२ \end{vmatrix}$$ (१८७ वां प्रक्रम देखो)

१६४। यदि ऊर्ध्वाधर और तीर्यक् पंक्ति समान न हों तो ऐसे ध्रुवकस्थिति को आयताकृति कहते हैं।

ये ध्रुव स्वयं तो कोई परिच्छिन्न फल नहीं उत्पन्न करते परन्तु दो आयताकृति ध्रुवकों के १६३ वें प्रक्रम की युक्ति से गुणनफल से एक कनिष्ठफल उत्पन्न कर सकते हैं और उसका मान इस प्रकार जान सकते हैं। कल्पना करो कि

$$\left.\begin{matrix} अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 & ग_2 \end{matrix}\right\} \ldots (१) \quad \left.\begin{matrix} आ_1 & का_1 & खा_1 & गा_1 \\ आ_2 & का_2 & खा_2 & गा_2 \end{matrix}\right\} \ldots (२)$$

ये दो आयताकार भुवक हैं। १८३ वें प्रक्रम की युक्ति से इनके गुणन से कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} अ_1आ_1 + क_1का_1 + ख_1खा_1 + ग_1गा_1 & अ_1आ_2 + क_1का_2 + ख_1खा_2 + ग_1गा_2 \\ अ_2आ_1 + क_2का_1 + ख_2खा_1 + ग_2गा_1 & अ_2आ_2 + क_2का_2 + ख_2खा_2 + ग_2गा_2 \end{vmatrix}$$

यह होगा जिसका मान स्पष्ट है कि अन्य कनिष्ठों के योग रूप में

$$(अ_1क_2)\,(आ_1का_2) + (अ_1ख_2)\,(आ_1खा_2) + (अ_1ग_2)\,(आ_1गा_2)$$
$$+ (क_1ख_2)(का_1खा_2) + (क_1ग_2)\,(का_1गा_2) + (ख_1ग_2)(खा_1गा_2)$$

यह होगा। अर्थात् तिर्यक् पंक्ति के समान ऊर्ध्वाधर पंक्ति को लेकर यथा स्थानक दोनों आयताकार भुवों के वश जितने संभाव्य एक एक कनिष्ठफल हों उनके गुणनफल के योग के समान ऊपर का कनिष्ठफल होगा।

१६५—ऊपर तो वह स्थिति दिखलाई गई है जिसमें तिर्यक् पंक्ति की संख्या ऊर्ध्वाधर पंक्ति की संख्या से अल्प है, अब वह स्थिति दिखलाते हैं जिसमें ऊर्ध्वाधर ही तिर्यक् से अल्प है। इसमें १६३ वें प्रक्रम की युक्ति से गुणनफल रूप कनिष्ठफल शून्य के तुल्य होगा क्योंकि यदि

$$\left.\begin{matrix} अ_1 & क_1 \\ अ_2 & क_2 \\ अ_3 & क_3 \end{matrix}\right\} \quad (१) \qquad \left.\begin{matrix} आ_1 & का_1 \\ आ_2 & का_2 \\ आ_3 & का_3 \end{matrix}\right\} \ldots (२)$$

इन पर से गुणनफल रूप कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{आ}_1+\text{क}_1\text{का}_1 & \text{अ}_1\text{आ}_2+\text{क}_1\text{का}_2 & \text{अ}_1\text{आ}_3+\text{क}_1\text{का}_3 \\ \text{अ}_2\text{आ}_1+\text{क}_2\text{का}_1 & \text{अ}_2\text{आ}_2+\text{क}_2\text{का}_2 & \text{अ}_2\text{आ}_3+\text{क}_2\text{का}_3 \\ \text{अ}_3\text{आ}_1+\text{क}_3\text{का}_1 & \text{अ}_3\text{आ}_2+\text{क}_3\text{का}_2 & \text{अ}_3\text{आ}_3+\text{क}_3\text{का}_3 \end{vmatrix}$$

यह होगा जो स्पष्ट है कि १९३ वें प्र० की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{अ}_1 & \text{क}_1 \\ 0 & \text{अ}_2 & \text{क}_2 \\ 0 & \text{अ}_3 & \text{क}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \text{आ}_1 & \text{का}_1 \\ 0 & \text{आ}_2 & \text{का}_2 \\ 0 & \text{आ}_3 & \text{का}_3 \end{vmatrix} = 0$$

इसके तुल्य होगा।

यह तो दो तिर्यक् और दो ऊर्ध्वाधर आयतों में दिखलाया गया है। परन्तु इसी प्रकार सर्वत्र सिद्ध कर सकते हो कि ऊर्ध्वाधर से यदि तिर्यक् अल्प हो तो १९४ वें प्रक्रम की स्थिति होगी और यदि ऊर्ध्वाधर तिर्यक् पंक्ति की संख्या से अल्प हो तो गुणनफल रूप कनिष्ठफल सर्वदा शून्य होगा।

उदाहरण— १।

$$\left.\begin{matrix} १ & १ & १ \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \end{matrix}\right\}\cdots(१) \qquad \left.\begin{matrix} १ & १ & १ \\ \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \end{matrix}\right\}\cdots(२)$$

इन आयतस्थ ध्रुवों से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} ३ & \text{अ}+\text{क}+\text{ख} \\ \text{अ}+\text{क}+\text{ख} & \text{अ}^2+\text{क}^2+\text{ख}^2 \end{vmatrix} = (\text{अ}-\text{क})^2+(\text{अ}-\text{ख})^2 + (\text{क}-\text{ख})^2$$

२।

$$\left.\begin{matrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{अ}' & \text{क}' & \text{ख}' \end{matrix}\right\}\cdots(१) \qquad \left.\begin{matrix} \text{ख} & -२\text{क} & \text{अ} \\ \text{ख}' & -२\text{क}' & \text{अ}' \end{matrix}\right\}\cdots(२)$$

इनसे सिद्ध करो कि

$$४(अख - क^२)(अ'ख' - क'^२) - (अख' + अ'ख - २कक')^२$$
$$= ४(कख' - क'ख)(अक' - अ'क) - (अख' - अ'ख)^२$$

३। सिद्ध करो कि

$$\begin{array}{ccc} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \end{array}$$

इसको इसी से १६३ प्र० की युक्ति से गुण से एक

$$(अ^२ + क^२ + ख^२)(अ'^२ + क'^२ + ख'^२) = (अअ' + कक' + खख')^२$$
$$+ (कख' - ख'क)^२ + (खअ' - ख'अ)^२ + (अक' - अ'क)^२$$

ऐसा समीकरण बन सकता है।

४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (अ_१ - क_१)^२ & (अ_१ - क_२)^२ & (अ_१ - क_३)^२ & (अ_१ - क_४)^२ \\ (अ_२ - क_१)^२ & (अ_२ - क_२)^२ & (अ_२ - क_३)^२ & (अ_२ - क_४)^२ \\ (अ_३ - क_१)^२ & (अ_३ - क_२)^२ & (अ_३ - क_३)^२ & (अ_३ - क_४)^२ \\ (अ_४ - क_१)^२ & (अ_४ - क_२)^२ & (अ_४ - क_३)^२ & (अ_४ - क_४)^२ \end{vmatrix} = ०$$

$$\left.\begin{array}{ccc} अ^२_१ & अ_१ & १ \\ अ^२_२ & अ_२ & १ \\ अ^२_३ & अ_३ & १ \\ अ^२_४ & अ_४ & १ \end{array}\right\} \quad (१) \quad \left.\begin{array}{ccc} १ & -२क_१ & क^२_१ \\ १ & -२क_२ & क^२_२ \\ १ & -२क_३ & क^२_३ \\ १ & -२क_४ & क^२_४ \end{array}\right\} \quad (२)$$

१६६—एक घात अनेक वर्ण समीकरण में कनिष्ठफल से अव्यक्त मानानयन।

१८६वें प्रक्रम में दिखला चुके हैं कि

$$कफ = अ_१आ_१ + अ_२आ_२ + अ_३आ_३ + \cdots इत्यादि$$

जहां $आ_१, आ_२,$ इत्यादि $अ_१, अ_२, \cdots\cdots$ ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ गुणों के अतिरिक्त और ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ गुणों के वश से उत्पन्न हुए हैं।

यदि $अ_1, अ_2, अ_3$ इत्यादि क्रम से $क_1, क_2, क_3$ इत्यादि के तुल्य हों तो १८२वें प्रक्रम से कनिष्ठफल शून्य होगा; इसलिये ऊपर के मान में उत्थापन देने से

$$कफ = क_1 आ_1 + क_2 आ_2 + क_3 आ_3 + \text{इत्यादि} = 0$$

इसी प्रकार $ख_1 आ_1 + ख_2 आ_2 + ख_3 आ_3 + \text{इत्यादि} = 0$

इसी प्रकार आगे भी जानना चाहिए। अब इसके बल से एक घात अनेक वर्ण समीकरण में अव्यक्त मान इस प्रकार जान सकते हैं। मान लो कि

$$अ_1 य + क_1 र + ख_1 ल = म_1 \cdots\cdots\cdots (१)$$
$$अ_2 य + क_2 र + ख_2 ल = म_2 \cdots\cdots\cdots (२)$$
$$अ_3 य + क_3 र + ख_3 ल = म_3 \cdots\cdots\cdots (३)$$

ये दिए हुए समीकरण हैं। इनके गुणक $अ_1, अ_2, \cdots$; $क_1, क_2, \cdots$ इत्यादि को ध्रुवक मान पिछले प्रक्रमों से $आ_1, आ_2, \cdots$ इत्यादि के मान जानकर (१) समीकरण को $आ_1$ से, (२) को $आ_2$ से और (३) को $आ_3$ से गुण कर जोड़ लेने से

$$(अ_1 आ_1 + अ_2 आ_2 + अ_3 आ_3) य + (क_1 आ_1 + क_2 आ_2 + क_3 आ_3) र + (ख_1 आ_1 + ख_2 आ_2 + ख_3 आ_3) ल$$

$$= कफ य = म_1 आ_1 + म_2 आ_2 + म_3 आ_3$$

$$= \begin{vmatrix} म_1 & क_1 & ख_1 \\ म_2 & क_2 & ख_2 \\ म_3 & क_3 & ख_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार

$$(क_1 का_1 + क_2 का_2 + क_3 का_3) र = म_1 का_1 + म_2 का_2 + म_3 का_3$$

$$\text{कफर} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{म}_1 & \text{ल}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{म}_2 & \text{ल}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{म}_3 & \text{ल}_3 \end{vmatrix}$$

और

$$\text{कफल} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{म}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{म}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{म}_3 \end{vmatrix}$$

अर्थात्

$$\text{कफय} = (\text{म}_1\text{क}_2\text{ल}_3)$$

$$\text{कफर} = (\text{अ}_1\text{म}_2\text{ल}_3)$$

$$\text{कफल} = (\text{अ}_1\text{क}_2\text{म}_3)$$

इसी प्रकार साधारण से जहाँ य, र, ल, व, श, ष ...... अव्यक्त हैं तहाँ

$$\text{य} = \frac{(\text{म}_1\text{क}_2\text{ल}_3 \cdots \text{ट}_\text{न})}{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{ल}_3 \cdots \text{ट}_\text{न})}, \quad \text{र} = \frac{(\text{अ}_1\text{म}_2\text{ल}_3 \cdots \text{ट}_\text{न})}{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{ल}_3 \cdots \text{ट}_\text{न})}$$

$$\text{ल} = \frac{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{म}_3 \cdots \text{ट}_\text{न})}{(\text{अ}_1\text{क}_2\text{ल}_3 \cdots \text{ट}_\text{न})}, \text{ इत्यादि।}$$

(संकेत के लिये १८७ वां प्रक्रम देखो)

१८७—इसी प्रकार एक घात अनेक वर्ण समीकरण में जहाँ न अव्यक्त हों और समीकरण न − १ इतने ही हों अर्थात् जैसे

$$\left.\begin{aligned} \text{अ}_1\text{य} + \text{क}_1\text{र} + \text{ल}_1\text{ल} + \text{ग}_1\text{व} = 0 \\ \text{अ}_2\text{य} + \text{क}_2\text{र} + \text{ल}_2\text{ल} + \text{ग}_2\text{व} = 0 \\ \text{अ}_3\text{य} + \text{क}_3\text{र} + \text{ल}_3\text{ल} + \text{ग}_3\text{व} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (१)$$

यहां अज्ञात वर्ण चार और समीकरण तीन ही हैं तो कल्पना करो कि एक चौथा समीकरण

$$अ_४ य + क_४ र + ख_४ ल + ग_४ व = उ \cdots\cdots \quad (२)$$

ऐसा है जहां $अ_४, क_४, \cdots\cdots, उ$ कोई कल्पित संख्यायें हैं। (१) के नीचे (२) इसे भी मिला देने से १६९वें प्रक्रम की युक्ति से $म_१ = म_२ = म_३ = ०$ मानने से और $म_४ = व$

$$कफ \cdot य = उ \cdot आ_४,\ क \cdot फ \cdot र = उ \cdot का_४,\ कफ \cdot ल = उ \cdot खा_४,$$
$$क फ व = उगा_४$$

अथवा

$$\frac{य}{आ_४} = \frac{र}{का_४} = \frac{ल}{खा_४} = \frac{व}{गा_४} = \frac{उ}{कफ} \cdots\cdots \quad (३)$$

ऊपर के तीनों समकीरण तीन दिए समीकरणों में जो अव्यक्त के गुणक हैं उनके रूप में अव्यक्तों की निष्पत्ति दिखलाते हैं।

यदि मान लें कि $उ = ०$ तो (३) से

$$कफ \cdot य = उ \cdot आ_४ = ० \quad \therefore\ कफ = ०$$

(३) से जो अव्यक्त मान आते हैं उनका (२) में उत्थापन देने से

$$अ_४ आ_४ उ + क_४ का_४ उ + ख_४ खा_४ उ + ग_४ गा_४ उ = उ \cdot कफ$$

या $\quad अ_४ आ_४ + क_४ का_४ + ख_४ खा_४ + ग_४ गा_४ = कफ = ०$

इस पर से यह सिद्ध होता है कि

यदि न वर्णों से न समीकरण बनें जिसमें दहिना अङ्क शून्य के तुल्य हों तो १६९वें प्रक्रम की युक्ति

से अव्यक्तों के गुणकों से जो कनिष्ठफल होगा वह शून्य के तुल्य होगा।

१९७—हरात्मक वा उत्क्रम कनिष्ठफल।

१८३वें प्रक्रम में आ$_1$, का$_1$, खा$_1$ …… आ$_2$, का$_2$, खा$_2$, …… इत्यादि जो दिखला आए हैं उन्हें उत्क्रम ध्रुव कहते हैं। उत्क्रम ध्रुवों से जो कनिष्ठफल उत्पन्न होता है उसे हरात्मक वा उत्क्रम कनिष्ठफल कहते हैं। कनिष्ठफल और उत्क्रम कनिष्ठ-फल के वश से भी अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं; जैसे उत्क्रम कनिष्ठफल को उकफ कहो तो

$$(१)\quad \text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 \end{vmatrix} \qquad \text{उकफ} = \begin{vmatrix} \text{आ}_1 & \text{का}_1 & \text{खा}_1 \\ \text{आ}_2 & \text{का}_2 & \text{खा}_2 \\ \text{आ}_3 & \text{का}_3 & \text{खा}_3 \end{vmatrix}$$

१९३वें प्रक्रम की युक्ति से इन दोनों का गुणनफल करो तो

$$\text{कफ}\cdot\text{उकफ} = \begin{vmatrix} \text{कफ} & 0 & 0 \\ 0 & \text{कफ} & 0 \\ 0 & 0 & \text{कफ} \end{vmatrix} = \text{कफ}^3$$

इसलिये उकफ $=$ कफ^2।

यह तो तीन अक्षरों की पंक्ति-पर से लाघव के लिये दिख-लाया है। इसी प्रकार सर्वत्र चाहे पंक्ति में जितने अक्षर हों सिद्ध होता है कि

दिए हुए कनिष्ठफल के न — १ घात के तुल्य उत्क्रम कनिष्ठफल होता है।

(२) उत्क्रम कनिष्ठफल के कोई लघु कनिष्ठफल को अपने मुख्य कनिष्ठफल सम्बन्धी ध्रुवों के रूप में ले आने के लिये चार अक्षर की पंक्ति के लेने से

$$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 & ग_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 & ग_3 \\ अ_4 & क_4 & ख_4 & ग_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ आ_2 & का_2 & खा_2 & गा_2 \\ आ_3 & का_3 & खा_3 & गा_3 \\ आ_4 & का_4 & खा_4 & गा_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 & 0 & 0 & 0 \\ अ_2 & कफ & 0 & 0 \\ अ_3 & 0 & कफ & 0 \\ अ_4 & 0 & 0 & कफ \end{vmatrix}$$

इसलिये

$$कफ \begin{vmatrix} का_2 & खा_2 & गा_2 \\ का_3 & खा_3 & गा_3 \\ का_4 & खा_4 & गा_4 \end{vmatrix} = अ_1 कफ^{3} ।$$

$$वा \quad (का_2 खा_3 गा_4) = अ_1 कफ^{2} ।$$

इस प्रकार उकफ में आ$_1$ का पूरक जो प्रथम लघु कनिष्ठ-फल है वह आ गया। दूसरा लघु कनिष्ठफल (१८५ प्र० देखो) निकालना हो तो ऊपर की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 & ग_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 & ग_3 \\ अ_4 & क_4 & ख_4 & ग_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ आ_3 & का_3 & खा_3 & गा_3 \\ आ_4 & का_4 & खा_4 & गा_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & 0 & 0 \\ अ_2 & क_2 & 0 & 0 \\ अ_3 & क_3 & कफ & 0 \\ अ_4 & क_4 & 0 & कफ \end{vmatrix}$$

इसलिये

$$कफ \begin{vmatrix} खा_3 & गा_3 \\ खा_4 & गा_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ_1 & क_1 \\ अ_2 & क_2 \end{vmatrix} कफ$$

अर्थात् $(\text{खा}_3 \text{गा}_4) = (\text{अ}_1 \text{क}_2)$ कफ ।

इस पर से सामान्यतः यह क्रिया उत्पन्न होती है:—

उत्क्रम कनिष्ठफल का म संख्यक लघु कनिष्ठ-फल, मुख्य कनिष्ठफल के म−१ घात से गुणित जो मुख्य कनिष्ठफल के म संख्यक लघु कनिष्ठ-फल का पूरक हो उसके तुल्य होता है।

जैसे ऊपर के उदाहरण में यदि पंक्ति में पांचवां एक अक्षर व और घा और बढ़ जाता तो

$(\text{खा}_3 \text{गा}_4 \text{घा}_5) = (\text{अ}_1 \text{क}_2)$ कफ^2 ।

यदि मुख्य कनिष्ठफल शून्य हो तो ऊपर की क्रिया से स्पष्ट है कि उत्क्रम कनिष्ठफल और इसके सब लघु कनिष्ठ-फल शून्य होंगे। इस पर से यह भी सिद्ध होता है कि

यदि कोई कनिष्ठफल शून्य हो तो इसके और इसके उत्क्रम कनिष्ठफल के यथा स्थानक पंक्तिओं के ध्रुवकों में समान निष्पत्ति होगी।

१९९—**सम्बद्ध ध्रुव**—यत्संख्यक तिर्यक् पंक्ति में य-त्संख्यक ध्रुव है तत्संख्यक ऊर्ध्वाधर पंक्ति के तत्संख्यक ध्रुव को लें तो इन दोनों ध्रुवों में एक दूसरे का संबद्ध ध्रुव कहाता है। जैसे चार अक्षर की पक्ति में तीसरी पंक्ति का चौथा ध्रुव ग_4 और तीसरी ऊर्ध्वाधर पंक्ति का चौथा ध्रुव घ_3 ये दोनों परस्पर संबद्ध ध्रुव कहे जाते हैं। ये जिस वर्ग-

क्षेत्र के दो कोने पर हैं उनसे अन्य दोनों कोनों पर गई हुई कर्णरेखा से विरुद्ध दिशा में दोनों तुल्य अन्तर पर रहते है। परन्तु ये कर्णप्रधान ध्रुवक कर्ण के खण्ड ही होंगे; इसलिये यह भी कह सकते हो कि ये दोनों प्रधान कर्ण से विरुद्ध दिशा में तुल्य अन्तर पर रहते हैं।

तद्रूप कनिष्ठफल—प्रत्येक दो दो संबद्ध ध्रुव जहाँ आपस में तुल्य होते हैं उसे तद्रूप कनिष्ठफल कहते हैं।

(१) दोनों संबद्ध ध्रुवों के पूरक जो प्रथम लघु कनिष्ठ-फल होंगे वे आपस में तुल्य होंगे। क्योंकि प्रथम ध्रुव को प्रधान स्थान में ले जाने के लिये जै बार तिर्यक् और ऊर्ध्वा-धर पंक्तिओं को हटाना पड़ेगा उतने ही बार दूसरे ध्रुव को प्रधान स्थान में ले जाने के लिये हटाना पड़ेगा। वा दोनों को प्रधान स्थान मे ले आने के लिये तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्ति-ओं का एक ही परिवर्त्तन होगा।

(२) तद्रूप कनिष्ठफल में स्पष्ट है कि प्रधान लघु कनिष्ठ-फल भी सब तद्रूप कनिष्ठफल होंगे क्योंकि प्रधान स्थान अ, से जितने अक्षर ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् में लेकर वर्ग बनाओगे उसके पूरक में अवशिष्ट संबद्ध ध्रुव जो कि आपस में तुल्य हैं, रहेंगे।

(३) (१) से यह भी सिद्ध होता है कि संबद्ध ध्रुवों के पूरक प्रथम कनिष्ठफल के तुल्य होने से उत्क्रम कनिष्ठफल में भी तत्स्थानीय ध्रुव तुल्य होंगे क्योंकि जो पूरक है वही उत्क्रम में तत्स्थानीय ध्रुव होते हैं: इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल भी एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा।

उदाहरण

१।
$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix}$$

इसके उत्क्रम कनिष्ठफल का मान बताओ।

१८७वें प्रक्रम में जो आ_1, आ_2 .... हैं उनके स्थान में यहां लघु अक्षर संबन्धी उनके मान क्रम से आ हा गा फा इत्यादि मानो तो १८७ प्रक्रम से

कफ = अआ + हहा + गगा = हहा + कका + फफा = गगा + फफा + खखा; इसलिये उत्क्रम में आ, हा, गा, हा, का, फा, गा, फा, खा ये ध्रुव हुए तब

$$\text{उकफ} = \begin{vmatrix} \text{आ} & \text{हा} & \text{गा} \\ \text{हा} & \text{का} & \text{फा} \\ \text{गा} & \text{फा} & \text{खा} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{कख} - \text{फ}^2 & \text{फग} - \text{खह} & \text{हफ} - \text{कग} \\ \text{फग} - \text{खह} & \text{खअ} - \text{ग}^2 & \text{गह} - \text{अफ} \\ \text{हफ} - \text{कग} & \text{गह} - \text{अफ} & \text{अक} - \text{ह}^2 \end{vmatrix}$$

२. इसी प्रकार, १८७ प्रक्रम से और (१) उदाहरण के सङ्केत से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{त} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} \\ \text{त} & \text{म} & \text{न} & \text{ग} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \text{अआ} + \text{हहा} + \text{गगा} + \text{तता} \\ &= \text{हहा} + \text{कका} + \text{फफा} + \text{ममा}, \\ &= \text{इत्यादि} \end{aligned}$$

अब आ, हा, इत्यादि पर से इसके उत्क्रम का मान निकाल लो। इस कनिष्ठफल का मान १९० प्रक्रम की युक्ति से अन्तिम ऊर्ध्वाधर और तिर्यक् पंक्तिस्थ दो दो गुणों के गुणनफल के रूप में ले आओ तो

$$\text{कफ} = \text{ग} \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{क} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} - \text{आत}^{2} - \text{काम}^{2} - \text{खान}^{2} - \text{२फामन} - \text{२गानत} - \text{२हातम} \text{ ।}$$

३। दूसरे उदाहरण में अन्त में एक ऊर्ध्वाधर पंक्ति और इन्हीं अक्षरों के यथा स्थानक निवेश से एक तिर्यक् पंक्ति और बढ़ा दो तो स्पष्ट है कि पंक्ति में एक अक्षर बढ़ जाने से जो कनिष्ठफल होगा वह भी तद्रूप कनिष्ठफल ही होगा।

इसलिये १६० प्रक्रम की युक्ति और (२) उदाहरण के सङ्केत से

$$\text{कफ} = \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} & \text{त} & \text{अ}' \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} & \text{म} & \text{ह}' \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} & \text{न} & \text{ग}' \\ \text{त} & \text{म} & \text{न} & \text{ग} & \text{त}' \\ \text{अ}' & \text{ह}' & \text{ग}' & \text{त}' & 0 \end{vmatrix} = \text{आअ}'^{2} - \text{काह}'^{2} - \text{खाग}'^{2} - \text{गात}'^{2} - \text{२फाह}'\text{ग}' - \text{२गाग}'\text{अ}' - \text{२हाअ}'\text{ह}' - \text{२ताअ}'\text{ग}' - \text{२माह}'\text{त}' - \text{२नाग}'\text{त}'$$

४। सिद्ध करो कि किसी प्रधान ध्रुव का संबद्ध ध्रुव वही प्रधान ध्रुव है।

५। सिद्ध करो कि कनिष्ठफल का वर्ग एक तद्रूप कनिष्ठ-फल होगा।

२०१—विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल और विजातीय कनिष्ठफल—

यदि तद्रूप कनिष्ठफल में प्रत्येक ध्रुव अपने संबद्ध ध्रुव के संख्यात्मक मान में तुल्य और विपरीत चिन्ह के हों तो इसे विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल कहते हैं। किसी प्रधान ध्रुव

का संबद्ध ध्रुव वही प्रधान ध्रुव होता है; इसलिये वह जब तक शून्य न हो तब तक उसी संख्या के तुल्य और विपरीत चिन्ह का कैसे हो सकता है; इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में सब प्रधान ध्रुव शून्य होंगे। इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठ-फल को निरुद्ध कनिष्ठफल कह सकते है (१८६ प्र० देखो)

जिस कनिष्ठफल में प्रधान ध्रुवों को छोड़ कर और प्रत्येक ध्रुव अपने संबद्ध ध्रुव के सख्यात्मक मान के तुल्य और विपरीत चिन्ह के होते है उसे विजातीय कनिष्ठफल कहते हैं।

१८६ वें प्रक्रम की युक्ति से किसी विजातीय कनिष्ठफल के मान को विजातीय तद्रूप कनिष्ठफलों के योग रूप में जान सकते हो। इसलिये विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के विषय में कुछ विशेष दिखलाते हैं।

(१) जिस विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में ऊर्ध्वाधर वा तिर्यक् पंक्ति विषम होती है उसका मान शून्य के तुल्य होता है।

क्योंकि किसी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में यदि ऊर्ध्वा-धर को तिर्यक् और तिर्यक् पंक्तिओं को ऊर्ध्वाधर रूप में बदल दें और प्रत्येक तिर्यक् पंक्ति के चिन्ह को बदल दें तो उसके मान में कुछ भेद न होगा अर्थात् फिर प्रत्येक पंक्ति में चिन्ह समेत अक्षर ज्यों के त्यों रहेंगे। परन्तु विषम अक्षरों के चिन्ह बदल देने से अब तो इन अक्षरों से पद बनेंगे पहिले पद से विपरीत चिन्ह के होंगे; इसलिये

$$\text{कफ} = -\text{कफ} \therefore २\,\text{कफ} = ०$$

अर्थात् कफ = ० । जैसे

$$कफ = \begin{vmatrix} ० & अ & क \\ -अ & ० & ख \\ -क & -ख & ० \end{vmatrix} = ०$$

(२) विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होगा। यदि पंक्ति सम अर्थात् प्रत्येक पंक्ति में सम वर्ण हों और यदि विषम वर्ण हों तो एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा क्योंकि किसी विजातीय तद्रूप कनिष्ठ-फल के एक जोड़े संबद्ध ध्रुव के लघु कनिष्ठफलों के चिन्ह में वही भेद होगा जो कि तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्तियों के परिवर्त्तन और सब ध्रुवों के चिन्हों में होगा। इसलिये यदि लघु कनिष्ठफलों में सम पंक्ति अर्थात् मुख्य विजातीय तद्रूप में विषमान्तर स्थिति हो तो वे दोनों तुल्य होंगे और वे ही दोनों तत्स्थानीय उत्क्रम कनिष्ठफल में ध्रुव होंगे; इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल एक तद्रूप कनिष्ठफल होगा। और यदि मुख्य विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में समान्तर की स्थिति हो तो दोनों लघु कनिष्ठफल संख्या में समान और विपरीत चिन्ह के होंगे; इसलिये उत्क्रम कनिष्ठफल भी एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होगा जिसके कर्णगत प्रधान ध्रुव सब विषमान्तर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होंगे।

(३) समान्तर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल एक वर्ग संख्या होगी अर्थात् जिसका पूरा पूरा वर्ग मूल मिलेगा। जैसे चार अक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में

$$कफ = \begin{vmatrix} ० & अ & क & ख \\ -अ & ० & ग & घ \\ -क & -ग & ० & फ \\ -ख & -घ & -फ & ० \end{vmatrix}$$

इसमें मान लो कि उत्क्रम कनिष्ठफल के ध्रुव मान $आ_{११}$, $आ_{१}$ ...$आ_{२}$ इत्यादि है तो १६४ प्रक्रम के (२) से

$$आ_१ का_२ - आ_२ का_१ = कफ \begin{vmatrix} ० & फ \\ -फ & ० \end{vmatrix} = फ^२ कफ$$

परन्तु $अ_१$ और $का_२$ के विषमाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल होने के कारण शून्य होने से और $अ_२$ और $का_१$ के एक विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल में परस्पर सम्बद्ध ध्रुव होने से $आ_१ का_२ - आ_२ का_१$

$$= ० - आ_२ \times - आ_२$$

$$= आ^२_२$$

$$= फ^२ . कफ$$

इसलिये कफ एक पूरी वर्ग संख्या हुई। इसी प्रकार समाक्षर स्थिति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल जो कि अभी वर्ग संख्या सिद्ध हुआ है उसका और मुख्य कनिष्ठफल का घात वर्ग संख्या सिद्ध होगा अर्थात् छ अक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल भी पूरा पूरा वर्ग सिद्ध होगा। इसी प्रकार आगे सब समाक्षर सम्बन्धी विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल पूरे पूरे होते जायंगे।

उदाहरण

१।

$$कफ = \begin{vmatrix} य & अ & क & ख \\ -अ & य & ग & घ \\ -क & -ग & य & फ \\ -ख & -घ & -फ & य \end{vmatrix}$$

इसको य की घात वृद्धि में ले आओ। १८६ प्रक्रम से और २०१ प्रक्रम के (१) से

$$कफ = (अफ - कख + खग)^2 + (अ^2 + क^2 + ख^2 + ग^2 + घ^2 + फ^2)य^2 + य^4$$

२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} आ & अ & क & ख & ग \\ -अ & का & घ & ङ & च \\ -क & -घ & खा & छ & ज \\ -ख & -ङ & -छ & गा & झ \\ -ग & -च & -ज & -झ & घा \end{vmatrix}$$

$$= आ\,का\,गा\,घा + यौ\,झ^2\,आ\,का\,गा + यौ\,(घझ - ङग + चछ)^2 आ$$

३। दो दो ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं के बदल देने से और एकान्तर दो ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ ध्रुवों को −१ से गुण देने से

$$\begin{vmatrix} अ_1 & क_1 & ख_1 & ग_1 \\ अ_2 & क_2 & ख_2 & ग_2 \\ अ_3 & क_3 & ख_3 & ग_3 \\ अ_4 & क_4 & ख_4 & ग_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -क_1 & अ_1 & -ग_1 & ख_1 \\ -क_2 & अ_2 & -ग_2 & ख_2 \\ -क_3 & अ_3 & -ग_3 & ख_3 \\ -क_4 & अ_4 & -ग_4 & ख_4 \end{vmatrix}$$

$$= कफ$$

∴ इन दोनों के गुणनफल से

$$= \begin{vmatrix} \text{ख} & & \\ \text{अ} & -\text{क} & \text{ख} \\ -\text{अक} & \text{क}^2 & -\text{कख} \\ \text{अ}^2 & -\text{अक} & \text{अख} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0, & -(\text{अ}_1\text{क}_2)-(\text{ख}_1\text{ग}_2), & -(\text{अ}_1\text{क}_3)-(\text{ख}_1\text{ग}_3), & -(\text{अ}_1\text{क}_4)-(\text{ख}_1\text{ग}_4) \\ (\text{अ}_1\text{क}_2)+(\text{ख}_1\text{ग}_2), & 0, & -(\text{अ}_2\text{क}_3)-(\text{ख}_2\text{ग}_3), & -(\text{अ}_2\text{क}_4)-(\text{ख}_2\text{ग}_4) \\ (\text{अ}_1\text{क}_3)+(\text{ख}_1\text{ग}_3), & (\text{अ}_2\text{क}_3)+(\text{ख}_2\text{ग}_3), & 0, & -(\text{अ}_3\text{क}_4)-(\text{ख}_3\text{ग}_4) \\ (\text{अ}_1\text{क}_4)+(\text{ख}_1\text{ग}_4), & (\text{अ}_2\text{क}_4)+(\text{ख}_2\text{ग}_4), & (\text{अ}_3\text{क}_4)+(\text{ख}_3\text{ग}_4), & 0, \end{vmatrix}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि किसी कनिष्ठफल के वर्ग को एक त्रिजातीय कनिष्ठफल के रूप में ला सकते हैं।

५।
$$\begin{vmatrix} 0 & \text{ग} & \text{क} \\ -\text{ग} & 0 & \text{अ} \\ -\text{क} & -\text{ख} & 0 \end{vmatrix}$$

इस विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल निकालो।

आ_1, का_1, खा_1 इत्यादि का मान निकालने से

$$\text{उत्क्रम कनिष्ठफल} = \begin{vmatrix} \text{ख}^2 & -\text{गख} & \text{अख} \\ -\text{कग} & \text{क}^2 & -\text{अक} \\ \text{अख} & -\text{अक} & \text{अ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= ख^2 \begin{vmatrix} १ & -क & अ \\ -१ & क & -अ \\ १ & -क & -अ \end{vmatrix}$$

५। चार अक्षर सम्बन्धी पंक्ति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल के उत्क्रम कनिष्ठफल का मान बताओ।

(१) उदाहरण में य = ० तो विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल हो जायगा।

उसमें कफ = (अफ − कख + खग)^2

$= व^2$ तो

$$\text{उत्क्रम कनिष्ठफल} = \begin{vmatrix} ० & फव & -घव & गव \\ -फव & ० & खव & -कव \\ घव & -खव & ० & अव \\ -गव & कव & अव & ० \end{vmatrix}$$

२०२। यदि कोई कनिष्ठफल का मान शून्य हो और उसमें गोटे के ऐसा तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर रूप जैसे अ०, अ', क', ख', ग',……अ'', क'', ख'', ग''……और अक्षर जोड़ दिए जांय जिससे प्रत्येक पंक्ति में एक अक्षर के बढ़ जाने से एकाधिकाक्षर पंक्ति का एक नया कनिष्ठफल बन जाय तो इस नये कनिष्ठफल (= कफ') और प्रथम कनिष्ठफल (= कफ) के प्रथम प्रधान ध्रुव के वश से जो प्रथम प्रधान लघु कनिष्ठफल $आ_1$ होगा उनका गुणनफल अर्थात्

$आ_1$कफ' यह $-$'($आ_1$अ' + $का_1$क' + $खा_1$ख' + ……)
($आ_1$अ'' + $आ_2$क'' + $आ_3$ख'' + ……)

इसके तुल्य होगा। $आ_1$, $का_1$, $ला_1$ ... । $आ_2$, $आ_3$, पहिले कनिष्ठफल सम्बन्धी की संख्यायें हैं जो कि १८५वें प्रक्रम में हैं।

यह ऊपर की बात १९९ वें प्रक्रम के (२) से सहज में सिद्ध होती है। यदि कफ' के उत्क्रम कनिष्ठफल में $अ_0$, $अ'$, अ, $अ_1$ सम्बन्धी जो चार ध्रुवरू हैं इनसे जो दो अक्षर की पंक्ति के कनिष्ठफल होंगे उन प्रथम दिए हुए कनिष्ठफल के ध्रुवों के रूप में ले आओ।

यदि दिया हुआ कनिष्ठफल जिसका मान तद्रूप कनिष्ठफल हो और दोनों ओर अक्षरों के जोड़ने से नया भी एक तद्रूप कनिष्ठफल हो तो ऊपर के समीकरण में दाहिनी ओर के दोनों गुरय गुणक रूप खण्ड के तुल्य होने से एक वर्ग राशि उत्पन्न होगी।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि ऐसे नये तद्रूप कनिष्ठफल को उसके दूसरे प्रथम लघु कनिष्ठफल से गुण दें तो गुणनफल जोड़े हुए अक्षरों से बना हुआ जो घातिकफल होगा उसके वर्गात्मक संख्या के समान विपरीत चिन्ह का होगा। अर्थात् ऐसी स्थिति में नया तद्रूप कनिष्ठफल और उसका प्रधान दूसरा लघु कनिष्ठफल विरुद्ध चिन्ह के होंगे।

उदाहरण

१। सिद्ध करो कि पञ्चाक्षर पंक्ति के विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल का उत्क्रम कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} \text{फ}^2_1 & \text{फ}_1\text{फ}_2 & \text{फ}_1\text{फ}_3 & \text{फ}_1\text{फ}_4 & \text{फ}_1\text{फ}_5 \\ \text{फ}_2\text{फ}_1 & \text{फ}^2_2 & \text{फ}_2\text{फ}_3 & \text{फ}_2\text{फ}_4 & \text{फ}_2\text{फ}_5 \\ \text{फ}_3\text{फ}_1 & \text{फ}_3\text{फ}_2 & \text{फ}^2_3 & \text{फ}_3\text{फ}_4 & \text{फ}_3\text{फ}_5 \\ \text{फ}_4\text{फ}_1 & \text{फ}_4\text{फ}_2 & \text{फ}_4\text{फ}_3 & \text{फ}^2_4 & \text{फ}_4\text{फ}_5 \\ \text{फ}_5\text{फ}_1 & \text{फ}_5\text{फ}_2 & \text{फ}_5\text{फ}_3 & \text{फ}_5\text{फ}_4 & \text{फ}^2_5 \end{vmatrix}$$

यह होगा।

जहां फ_1, फ_2, फ_3, फ_4 और फ_5 ध्रुवों के द्विघात के फल हैं और जिनके वर्ग क्रम से पांचों प्रधान ध्रुव संबन्धी पूरक प्रथम लघु कनिष्ठफल हैं। २०२वें प्रक्रम का अन्तिम उदाहरण देखो।

२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{अ}' & \text{क}' & \text{ख}' \\ \text{अ}'' & 0 & \text{ख} & -\text{क} \\ \text{क}'' & -\text{ख} & 0 & \text{अ} \\ \text{ख}'' & \text{क} & -\text{अ} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\text{अअ}' + \text{कक}' + \text{खख}')(\text{अअ}'' + \text{कक}'' + \text{खख}'')$$

३। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 0 & \text{अ}' & \text{क}' & \text{ख}' & \text{ग}' \\ \text{अ}'' & 0 & \text{ख} & -\text{क} & \text{य} \\ \text{क}'' & -\text{ख} & 0 & \text{अ} & \text{र} \\ \text{ख}'' & \text{क} & -\text{अ} & 0 & \text{ल} \\ \text{ग}'' & -\text{य} & -\text{र} & -\text{ल} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{अय} + \text{कर} + \text{खल})\{\text{य}(\text{क}'\text{ख}'') + \text{र}(\text{ख}'\text{अ}'') + \text{ल}(\text{अ}'\text{क}'')$$
$$+ \text{य}(\text{अ}'\text{ग}'') + \text{र}(\text{क}'\text{ग}'') + \text{ल}(\text{ख}'\text{ग}'')\}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} क+२ख & ख+अ & अ+क \\ क'+२ख' & ख'+अ' & अ'+क' \\ क''+२ख'' & ख''+अ'' & अ''+क'' \end{vmatrix}$$

$$= ३ \begin{vmatrix} अ & क & ख \\ अ' & क' & ख' \\ अ'' & क'' & ख'' \end{vmatrix}$$

२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} कख & १ & क+ख \\ खग & १ & ख+ग \\ कग & १ & क+ग \end{vmatrix}$$

$$= -(क-ख)(ख-ग)(क-ग)$$

३। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & क^२ग^२+अ^२घ^२ & कग+अघ \\ १ & अ^२ग^२+क^२घ^२ & अग+कघ \\ १ & अ^२क^२+ग^२घ^२ & अक+गघ \end{vmatrix}$$

$$=(क-ग)(अ-घ)(ग-अ)(क-घ)(अ-क)(ग-घ)$$

पहिली ऊर्ध्वाधर पंक्ति के अंगों को २अगकघ से गुण कर दूसरे ऊर्ध्वाधर में जोड़ दो तो १८४ प्रक्रम के ८ वां उदाहरण का रूप हो जायगा।

४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (क+ख-अ-घ)^४ & (क+ख-अ-घ)^२ & १ \\ (ख+अ-क-घ)^४ & (ख+अ-क-घ)^२ & १ \\ (अ+क-ख-घ)^४ & (अ+क-ख-घ)^२ & १ \end{vmatrix}$$

$$= ६४(क-ख)(अ-घ)(ख-अ)(क-घ)(अ-क)(ख-घ)$$

यह ठीक १८४ प्रक्रम के ८वां उदाहरण ऐसा है यदि $अ' = (क+ख-अ-घ)^२$ इत्यादि मान लो तो

५। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & अय+क \\ क & ख & कय+ख \\ अय+क & कय+ख & ० \end{vmatrix}$$

$$= -(अख-क^२)(अय^२+२कय+ग)$$

पहिली तिर्यक् पंक्ति को य से गुण कर दूसरी में जोड़ो, योग को तीसरी में घटा दो तो मान सहज में आ जायगा।

६। ऊपर के उदाहरण के ऐसा सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख, & अय^२+२कय+ख \\ क & ख & ग, & कय^२+२खय+ग \\ ख & ग & घ, & खय^२+२गय+घ \\ अय^२+२कय+ख, & कय^२+२खय+ग, & खय^२+२गय+घ & ० \end{vmatrix}$$

$$\equiv -\begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & ग \\ ख & ग & घ \end{vmatrix}(अय^४+४कय^३+६खय^२+४गय+घ)$$

७। सिद्ध करो कि

$$\equiv \begin{vmatrix} \text{अ}_1\text{य}+\text{क}_1, & \text{क}_1\text{य}+\text{ख}_1, & \text{ख}_1\text{य}+\text{ग}_1 \\ \text{अ}_2\text{य}+\text{क}_2, & \text{क}_2\text{य}+\text{ख}_2, & \text{ख}_2\text{य}+\text{ग}_2 \\ \text{अ}_3\text{य}+\text{क}_3, & \text{क}_3\text{य}+\text{ख}_3, & \text{ख}_3\text{य}+\text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} १ & ० & ० & ० \\ \text{अ}_1 & \text{अ}_1\text{य}+\text{क}_1 & \text{क}_1\text{य}+\text{ख}_1 & \text{ख}_1\text{य}+\text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{अ}_2\text{य}+\text{क}_2 & \text{क}_2\text{य}+\text{ख}_2 & \text{ख}_2\text{य}+\text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{अ}_3\text{य}+\text{क}_3 & \text{क}_3\text{य}+\text{ख}_3 & \text{ख}_3\text{य}+\text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

८। सिद्ध करो यदि

$$\text{फ}_1(\text{य}) = \text{अ}_1\text{य}^3 + ३\text{क}_1\text{य}^2 + ३\text{ख}_1\text{य} + \text{ग}_1$$
$$\text{फ}_2(\text{य}) = \text{अ}_2\text{य}^3 + ३\text{क}_2\text{य}^2 + ३\text{ख}_2\text{य} + \text{ग}_2$$
$$\text{फ}_3(\text{य}) = \text{अ}_3\text{य}^3 + ३\text{क}_3\text{य}^2 + ३\text{ख}_3\text{य} + \text{ग}_3$$

तो

$$\begin{vmatrix} \text{फ}_1(\text{य}), & \text{फ}_1'(\text{य}), & \text{फ}_1''(\text{य}) \\ \text{फ}_2(\text{य}), & \text{फ}_2'(\text{य}), & \text{फ}_2''(\text{य}) \\ \text{फ}_3(\text{य}), & \text{फ}_3''(\text{य}) & \text{फ}_3''(\text{य}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv -१८ \begin{vmatrix} १ & -\text{य}, & \text{य}^2, & -\text{य}^3 \\ \text{अ}_1 & \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{अ}_2 & \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{अ}_3 & \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

९। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १ & अ & अ' & अअ' \\ १ & क & क' & कक' \\ १ & ख & ख' & खख' \\ १ & ग & ग' & गग' \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} का & खा \\ का' & खा' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} खा & आ \\ खा' & आ' \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} आ & का \\ आ' & का' \end{vmatrix}$$

जहां $आ = (क - ख)(अ - ग)$, $का = (ख - अ)(क - ग)$

$खा = (अ - क)(ख - ग)$, $आ' = (क' - ख')(अ' - ग')$

$का' = (ख' - अ')(क' - ग')$, $खा' = (अ' - क')(ख' - ग')$

यहां १८७ प्रक्रम की युक्ति से

$आ(क'ख' + अ'ग') + का(ख'अ' + क'ग') + खा(अ'क' + ख'ग')$ $= कफ$ और दिए हुए समीकरणों से $आ + का + खा = ०$ इसे क्रम से $(क'ख' + अ'ग')$, $(ख'अ' + क'ग')$ और $(अ'क' + ख'ग')$ गुण कर कफ में घटा देने से ऊपर के सरूप समीकरण बन जायँगे।

१० । आ, का, खा का मान फैला कर दिखाओ कि ६ वें उदाहरण का कनिष्ठफल

$$\begin{vmatrix} १ & कख + अग, & क'ख' + अ'ग' \\ १ & अख + कग, & अ'ख' + क'ग' \\ १ & अक + खग, & अ'क' + ख'ग' \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा।

११। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} य & अ'_१ & अ'_२ & अ'_३ & १ \\ अ_१ & य & क'_१ & क'_२ & १ \\ अ_१ & क_१ & य' & ख' & १ \\ अ_१ & क_१ & ख_१ & य & १ \\ अ_१ & क_१ & ख_१ & ग_१ & १ \end{vmatrix}$$

$= (य - अ_१)(य - क_१)(य - ख_१)(य - ग_१)$

जहां कफ = ० इसमें $अ_१, क_१, ख_१, ग_१,$ अव्यक्त के मान हैं इसी प्रकार न+१ अक्षर की पंक्ति वाले कनिष्ठफल से भी सिद्ध कर सकते हो कि कनिष्ठफल

$= (य - अ_१)(य - अ_२)(य - अ_३) \cdots (य - अ_न)$

जहां फ(य) = ० इस न घात समीकरण में $अ_१, अ_२$ इत्यादि अव्यक्त के मान हैं।

१२। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ^३ & अ & १ \\ क^३ & क & १ \\ ख^३ & ख & १ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} अ^२ & अ & १ \\ क^२ & क & १ \\ ख^२ & ख & १ \end{vmatrix} (अ + क + ख)$$

१८४ प्रक्रम का ८ वां उदाहरण और १६२ प्रक्रम का ११ वां उदाहरण देखो।

१३। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^{३} & \text{अ}^{२} & १ \\ \text{क}^{३} & \text{क}^{२} & १ \\ \text{ख}^{३} & \text{ख}^{२} & १ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{अ}^{२} & \text{अ} & १ \\ \text{क}^{२} & \text{क} & १ \\ \text{ख}^{२} & \text{ख} & १ \end{vmatrix} (\text{अक} + \text{अख} + \text{कख})$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} (\text{अ} - \text{अ}')^{२} & (\text{अ} - \text{क}')^{२} & (\text{अ} - \text{ख}')^{२} \\ (\text{क} - \text{अ}')^{२} & (\text{क} - \text{क}')^{२} & (\text{क} - \text{ख}')^{२} \\ (\text{ख} - \text{अ}')^{२} & (\text{ख} - \text{क}')^{२} & (\text{ख} - \text{ख}')^{२} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} १ & \text{अ} & \text{अ}^{२} \\ १ & \text{क} & \text{क}^{२} \\ १ & \text{ख} & \text{ख}^{२} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} १ & \text{अ}' & \text{अ}'^{२} \\ १ & \text{क}' & \text{क}'^{२} \\ १ & \text{ख}' & \text{ख}'^{२} \end{vmatrix}$$

$$\{ २ (३\text{अकख} - \text{यौकखयोअ}' + \text{यौक}'\text{ख}'\text{योअ} - ३\text{अ}'\text{क}'\text{ख}') \}.$$

ऊपर का कनिष्ठफल

$$\left.\begin{matrix} \text{अ},^{३} & \text{अ},^{२} & \text{अ}, & १ \\ \text{क},^{३} & \text{क},^{२} & \text{क}, & १ \\ \text{ख},^{३} & \text{ख},^{२} & \text{ख}, & १ \end{matrix}\right\} (१) \quad \left.\begin{matrix} १, & -३\text{अ}', & ३\text{अ}',^{२} & -\text{अ}'^{३} \\ १, & -३\text{क}', & ३\text{क}',^{२} & -\text{क}'^{३} \\ १, & -३\text{ख}', & ३\text{ख}',^{२} & -\text{ख}'^{३} \end{matrix}\right\} (२)$$

इन दोनों के गुणनफल से बना है (१६४ प्रक्रम देखो) इससे कनिष्ठफलों के गुणनफल रूप में मान निकाल गुण्य गुणक रूप खण्ड समझ लो।

१५। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} १+अ_१, & १, & १, & १ \\ १, & १+अ_२, & १, & १ \\ १, & १, & १+अ_३, & १ \\ १, & १, & १, & १+अ_४ \end{vmatrix}$$

$$= अ_१ अ_२ अ_३ अ_४ \left(१ + \frac{१}{अ_१} + \frac{१}{अ_२} + \frac{१}{अ_३} + \frac{१}{अ_४}\right)$$

प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों को और ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में क्रम से घटा कर फिर प्रथम ऊर्ध्वाधर के वश से कनिष्ठफलों का मान निकालो।

इसी प्रकार न अक्षर सम्बन्धी पंक्ति में कनिष्ठफल

$$= अ_१ अ_२ अ_३ \cdots \cdots अ_न \left(१ + यो \frac{१}{अ_१}\right)$$

१६। ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ_१ & य & य & य \\ य & अ_२ & य & य \\ य & य & अ_३ & य \\ य & य & य & अ_४ \end{vmatrix}$$

$$= फ(य) - यफ'(य)$$

जहां $फ(य) = (य - अ_१)(य - अ_२)(य - अ_३)(य - अ_४)$।

१७। १८४ प्रक्रम के ६वें उदाहरण की युक्ति से सिद्ध करो कि यदि $अ_१, अ_२, अ_३$, फ(य)

$$= य^३ - प_१ य^२ + प_२ य - प_३$$

$$= ०$$

इसमें अव्यक्त के मान हों तो

$$\begin{vmatrix} \text{य}^{३} & \text{य}^{२} & \text{य} & १ \\ \text{अ}^{३}_{१} & \text{अ}^{२}_{१} & \text{अ}_{१} & १ \\ \text{अ}^{३}_{२} & \text{अ}^{२}_{२} & \text{अ}_{२} & १ \\ \text{अ}^{३}_{३} & \text{अ}^{२}_{३} & \text{अ}_{३} & १ \end{vmatrix}$$

$$= -(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})(\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})(\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})\ \text{फ}(\text{य})$$

१८। ऊपर के कनिष्ठफल का मान सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^{२}_{१} & \text{अ}_{१} & १ \\ \text{अ}^{२}_{२} & \text{अ}_{२} & १ \\ \text{अ}^{२}_{३} & \text{अ}_{३} & १ \end{vmatrix} \text{य}^{३} - \begin{vmatrix} \text{अ}^{३}_{१} & \text{अ}_{१} & १ \\ \text{अ}^{३}_{२} & \text{अ}_{२} & १ \\ \text{अ}^{३}_{१} & \text{अ}_{३} & १ \end{vmatrix} \text{य}^{२} + \begin{vmatrix} \text{अ}^{३}_{१} & \text{अ}^{२}_{१} & १ \\ \text{अ}^{३}_{२} & \text{अ}^{२}_{२} & १ \\ \text{अ}^{३}_{३} & \text{अ}^{२}_{३} & १ \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \text{अ}^{३}_{१} & \text{अ}^{२}_{१} & \text{अ}_{१} \\ \text{अ}^{३}_{२} & \text{अ}^{२}_{२} & \text{अ}_{२} \\ \text{अ}^{३}_{३} & \text{अ}^{२}_{३} & \text{अ}_{३} \end{vmatrix}$$

इसके तुल्य होगा जो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^{२}_{१} & \text{अ}_{१} & १ \\ \text{अ}^{२}_{२} & \text{अ}_{२} & १ \\ \text{अ}^{२}_{३} & \text{अ}_{३} & १ \end{vmatrix} (\text{य}^{३} - \text{प}_{१}\text{य}^{२} + \text{प}_{२}\text{य} - \text{प}_{३})$$

यदि $\text{य}^{३}$, $\text{य}^{२}$, य, इत्यादि के गुणक रूप कनिष्ठफलों को कफ, $\text{कफ}_{१}$, $\text{कफ}_{२}$, $\text{कफ}_{३}$ कहो और पिछले कनिष्ठफल को $\text{कफ}_{४}$ तो सरूप समीकरण की युक्ति से

$$\text{प}_{१} = \frac{\text{कफ}_{१}}{\text{कफ}_{४}},\ \text{प}_{२} = \frac{\text{कफ}_{२}}{\text{कफ}_{४}},\ \text{प}_{३} = \frac{\text{कफ}_{३}}{\text{कफ}_{४}}$$

१६। सिद्ध करो कि न अक्षरों की पंक्ति में

$$\begin{vmatrix} य & अ & अ & \cdot & अ \\ अ & य & अ & \cdot & अ \\ अ & अ & य & & अ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ अ & अ & अ & & य \end{vmatrix}$$

$$=(य-अ)^{न-१}\{य+अ(न-१)\}$$

२०। सिद्ध करो कि यदि $फ_१$, $फ_२$ और $फ_३$ अकरणीगत धन अ भिन्न फल हों तो

$$\begin{vmatrix} फ_१(अ), & फ_२(अ), & फ_३(अ) \\ फ_१(क), & फ_२(क), & फ_३(क) \\ फ_१(ख), & फ_२(ख), & फ_३(ख) \end{vmatrix}$$

यह (क − ख) (ख − अ) (अ − क) इससे अवश्य निःशेष होगा।

२१। दिखलाओ कि कब $अय^२+कर^२+खल^२+२$ फरल $+२$ गलय $+२$ हयर यह $(अ_१य+क_१र+ख_१ल)$ $(अ'_१य+क'_१र+ख'_१ल)$ इसके समान होगा।

यहां दोनों गुण्य गुणक रूप खण्डों के गुणन से और ऊपर के फल के साथ तुलना करने से

$$\begin{vmatrix} अ_१ & अ'_१ & ० \\ क_१ & क'_१ & ० \\ ख_१ & ख'_१ & ० \end{vmatrix} \begin{vmatrix} अ'_१ & अ_१ & ० \\ क'_१ & क_१ & ० \\ ख'_१ & ख_१ & ० \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} अ & ह & ग \\ ह & क & फ \\ ग & फ & ख \end{vmatrix} = ०$$

ऐसी स्थिति होगी। इसलिये जहां अ, क, इत्यादि से ऊपर का तद्रूप कनिष्ठफल बन जाय वहां गुण्य गुणक रूप के खण्डों में दिया हुआ ध्रुवशचिह्न फल हो सकता है।

२२।

$$\begin{vmatrix} अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} \\ अ_{५} & अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} \\ अ_{४} & अ_{५} & अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} \\ अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} & अ_{१} & अ_{२} \\ अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} & अ_{१} \end{vmatrix}$$

इसके गुण्य गुणक रूप खण्डों को बताओ।

मान लो कि $य^{५} - १ = ०$ इसमें अव्यक्त मान क्रम से $प, प^{२}, प^{३}, प^{४}, प^{५} = १$ हैं। द्वितीय ऊर्ध्वाधर ध्रुवों को पहिले क्रम से प्रथम ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में जोड़ देने से फिर $प, प^{२}, प^{३}, प^{४}$ से क्रम से गुण कर पहिले ऊर्ध्वाधर ध्रुवों में जोड़ देने से १९२वें प्रक्रम के १३ वें उदाहरण की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि गुण खण्ड

$$\begin{vmatrix} अ_{१} + अ_{२} + अ_{३} + अ_{४} + अ_{५} \\ अ_{१} + पअ_{२} + प^{२}अ_{३} + प^{३}अ_{४} + प^{४}अ_{५} \\ अ_{१} + प^{२}अ_{२} + प^{४}अ_{३} + प\,अ_{४} + प^{३}अ_{५} \\ अ_{१} + प^{३}अ_{२} + प\,अ_{३} + प^{४}अ_{४} + प^{२}अ_{५} \\ अ_{१} + प^{४}अ_{२} + प^{३}अ_{३} + प^{२}अ_{४} + प\,अ_{५} \end{vmatrix}$$

ये होंगे।

इस प्रकार से जिस घनिष्ठफल में अक्षरों का विन्यास पंक्तिओं में होता है उस घनिष्ठफल के ध्रुवों को चक्रवाल ध्रुव कहते हैं।

यदि प्रति पंक्ति में न अक्षर के निवेश से चक्रवाल भुज संबन्धी कनिष्ठफल हो तो वहां भी ऊपर ही की युक्ति से $य^{न} - १ = ०$ इसके सब अव्यक्त मान से गुण्य गुणक खण्डों का पता लगा सकते हो।

२३। $$\begin{vmatrix} अ_{न} & क_{न} & ० & ० & ० & \cdot \\ -१ & अ_{न-१} & क_{न-१} & ० & ० & \cdot \\ ० & -१ & अ_{न-२} & क_{न-२} & ० & \cdot \\ ० & ० & -१ & अ_{न-३} & क_{न-३} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

इसका मान बताओ। जहां प्रथम प्रधान भुज के आगे एक भुज संख्यात्मक और बाकी प्रधान भुजों के आगे एक एक संख्यात्मक भुज और पीछे −१ भुज हैं। अवशिष्ट सब भुज शून्य हैं। कनिष्ठफल को यदि $फ_{न}$ और प्रथम ऊर्ध्वाधर भुजों के रूप में $फ_{न}$ के मान में $अ_{न}$, और $क_{न}$ भुजों के वश जो प्रथम लघु कनिष्ठफल न − १ और न − २ अक्षर के पंक्ति का हो तो उन्हें क्रम से $फ_{न-१}$ और $फ_{न-२}$ कहो तो

$$फ_{न} = अ_{न} फ_{न-१} + क_{न} फ_{न-२} ।$$

यदि न = १, $फ_{१} = अ_{१}$, न = २ तो $फ_{२} = अ_{२} अ_{१} + क_{१}$। अब इन दोनों के उत्थापन देने से ऊपर के समीकरण के बल से $फ_{३}, फ_{४}$ इत्यादि के मान जान सकते हो।

ऊपर के $फ_{न}$ के मान में $फ_{न-१}$ का भाग देने से

$$\frac{फ_{न}}{फ_{न-१}} = अ_{न} + \frac{क_{न}}{\frac{फ_{न-१}}{फ_{न-२}}}$$

इसमें न के स्थान में न – १, के उत्थापन से

$$\frac{फ_{न-१}}{फ_{न-२}} = अ_{न-१} + \cfrac{क_{न-१}}{\cfrac{फ_{न-२}}{फ_{न-३}}}$$

यों बार बार क्रिया करने से

$$\therefore \frac{फ_न}{फ_{न-१}} = अ_न + \cfrac{क_न}{\cfrac{फ_{न-१}}{फ_{न-२}}}$$

$$= अ_न + \cfrac{क_न}{अ_{न-१} + \cfrac{क_{न-१}}{\cfrac{फ_{न-२}}{फ_{न-३}}}}$$

$$= अ_न + \cfrac{क_न}{अ_{न-१} + \cfrac{क_{न-१}}{अ_{न-२} + \cfrac{क_{न-२}}{\cfrac{फ_{न-३}}{फ_{न-४}}}}}$$

इस प्रकार $\frac{फ_न}{फ_{न-१}}$ का मान एक वितत भिन्न के रूप में ला सकते हो।

२४।
$$फ_न = \begin{vmatrix} अ & १ & ० & ० & ० & \cdot \\ क & अ & १ & ० & ० & \cdot \\ ० & क & अ & १ & ० & \cdot \\ ० & ० & क & अ & १ & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

इसका मान बताओ।

यहां अ, क, १ ये ही तीन संख्यात्मक ध्रुव हैं। यहां भी ऊपर के उदाहरण ही के संकेत से

$$फ_न = अफ_{न-१} - कफ_{न-२}$$

$फ_१$ और $फ_२$ के मान यहां उदाहरण से अ और $अ^२ - क$ है। फिर इनके वश से ऊपर के समीकरण से $फ_३$, $फ_४$ इत्यादि के मान जान सकते हो, जैसे $फ_३ = अफ_२ - कफ_१ = अ^३ - अक - अक = अ^३ - २\,अक$। $फ_४ = अफ_३ - कफ_२ = अ^४ - २\,अ^२क - क\,(अ^२ - क) = अ^४ - ३\,अ^२क + क^२$ इसलिये साधारण से

$$फ_न = अ^न - (न-१)\,अ^{न-२}क + \frac{(न-३)(न-२)}{२\,!}अ^{न-४}क^२ - \frac{(न-५)(न-४)(न-३)}{३\,!}अ^{न-६}क^३ + \cdots$$

२५। $$फ_न = \begin{vmatrix} अ+य & ह & ग & \cdot \\ ह & क+य & फ & \\ ग & फ & ख+य & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

यह न अक्षर पंक्ति का तद्रूप कनिष्ठफल है। इसके मान में अ+य प्रधान ध्रुव का जो प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल हो उसे $फ_{न-१}$ कहो और इसमें क+य प्रधान ध्रुव का प्रधान लघु कनिष्ठफल हो उसे $फ_{न-२}$, इसी प्रकार $फ_{न-३}$, $फ_{न-४}$ इत्यादि मानो और नीचे एक तिर्यक् पंक्ति अन्त में और एक ऊर्ध्वाधर पंक्ति भी अन्त में और ध्रुवों को बढ़ा दो जिनमें कर्ण गत प्रधान ध्रुव १ और सब शून्य हों क्यों कि ऐसा करने से कनिष्ठफलों

के मान में भेद न पड़ेगा। इस प्रकार से न+१ फल उत्पन्न होंगे जो क्रम से $फ_न$, $फ_{न-१}$, $फ_{न-२}$, $फ_{न-३}$ $\cdots$ $फ_२$, $फ_१$, $फ_०$ ये हैं जिनमें य के घात उनकी संख्या न, न−१ के समान हैं। ऊपर के फलों में यदि य के स्थान में $+\infty$ का उत्थापन दो तो सब धन होंगे जहां $फ_० = १$ सर्वदा धन ही रहेगा और य के स्थान में $-\infty$ का उत्थापन देने से $फ_०$ से गिनती करने में एकान्तर धन और ऋण होंगे; इसलिये यहां न व्यत्यास की हानि होगी।

अब यदि य का कोई ऐसा मान हो कि उसके उत्थापन से $फ_न$ और $फ_०$ को छोड़ कर और कोई शून्य हो जाय तो १२२वें प्रक्रम की युक्ति से उसके आगे और पीछे के फल विरुद्ध चिन्ह के होंगे; इसलिये ऊपर जो फलों की श्रेढी लिखी है उसमें य का मान बढ़ते बढ़ते जब तक उस मान को न लाओगे जिसमें कि $फ_न = ०$ तब तक व्यत्यास की हानि न होगी। इसलिये स्टर्म की युक्ति के ऐसा यहां $-\infty$ और $+\infty$ इसके बीच य के मान में न व्यत्यास की हानि होने से $फ_न = ०$ इसमें न अव्यक्त मान अर्थात् सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे। और फलों की श्रेढ़ी में सब फलों में वैसा ही धर्म है जैसा कि $फ_न = ०$ इसमें है। इसलिये $फ_{न-१} = ०$ इसमें भी न−१ अर्थात् सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे। इसी प्रकार सब फलों में भी यहां पर सब अव्यक्त मान संभाव्य होंगे।

$फ_न = ०$ इसमें संभव है कि मान समान हों। मान लो कि त मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य हैं। तो $फ_{न-१} = ०$ इसमें त−१ मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य होंगे। $फ_{न-२} = ०$ इसमें त−२ मान $अ_१$ के तुल्य होंगे।

२६। सिद्ध करो कि ऊपर के उदाहरण में यदि $फ_त = ०$ इसमें त मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य हों तो किसी प्रथम लघु कनिष्ठफल में त − १ और किसी द्वितीय लघु कनिष्ठफल में त − २, मान प्रत्येक $अ_१$ के तुल्य होंगे।

आ, हा, गा… उत्क्रम कनिष्ठफल में तत्स्थानीय ध्रुवों को मान लो तो उत्क्रम कनिष्ठफल के वश से एक

$$आ का - हा^२ = फ_{त-२} फ_त ।$$

तिर्यक् और ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को हटा हटा कर रखने से यह स्पष्ट है कि प्रधान प्रथम लघु कनिष्ठफल में त − १ बार, $अ_१$ यह समान मान रहेगा। इसलिये ऊपर के समीकरण से सिद्ध कर सकते हो कि हा में भी वह मान त − १ बार आवेगा। और हा यह कोई प्रथम लघु कनिष्ठफल मान सकते हो।

२७। बताओ कैसी स्थिति में

$$\begin{vmatrix} अ+य & ह & ग \\ ह & क+य & फ \\ ग & फ & स+य \end{vmatrix} = ०$$

इसमें य के तीनों मान समान होंगे।

जब किसी प्रथम लघु कनिष्ठफल में त मान समान वहीं हों तो तीनों मान समान होंगे, इसलिये यहां ह के वश से य थक लघु कनिष्ठफल

$$= ह (स + य) - गफ \therefore - य = स - \frac{ग फ}{ह}.$$

ग के वश, प्रथम लघु कनिष्ठफल

$$= ग\,(क + य) - हफ \quad \therefore \; - य = क - \frac{हफ}{ग}$$

फ के वश प्रथम लघु कनिष्ठफल

$$= फ\,(अ + य) - हग \quad \therefore \; - य = अ - \frac{हग}{फ}$$

ये − य जब सब समान होंगे तभी तीनों मान समान हो सकते हैं।

$$\text{इसलिये } अ - \frac{हग}{फ} = क - \frac{हफ}{ग} = ख - \frac{गफ}{ह}$$

२८। १२३ प्रक्रम में (२) प्रकार जो चतुर्घात समीकरण के लिये लिखा है उसमें जो अ, क, ख इत्यादि है उनसे दिखलाओ कि।

$$\begin{vmatrix} १ & १ & ० \\ फ & प' & ० \\ त & त' & ० \end{vmatrix} \begin{vmatrix} १ & १ & ० \\ प' & प & ० \\ त' & त & ० \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} २, & प + प', & त + त' \\ प + प', & २\,प\,प' & पत' + प'त \\ त + त', & पत' + प'त, & २\,त\,त' \end{vmatrix} = ०$$

इस सरूप समीकरण से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख + २\,अफि \\ क, & ख - अफि, & ग \\ ख + २अफि, & ग, & ० \end{vmatrix}$$

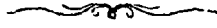
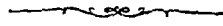
$= ४ अ^{२} फि^{२} - अज्ञाफि + ज्ञा = ०$

२०३—आज कल प्रायः सर्वत्र नये गाणितिको के ग्रन्थों मे लाघव से मान दिखलाने के लिये कनिष्ठफल ही का व्यवहार विशेष रूप से रहता है। इसलिये इस अभ्यास में जहां तक हो सका है कुछ फैलाकर कनिष्ठफल के नियम और उदाहरण दिखलाए गए हैं। जितनी बातें इस विषय पर इस अध्याय मे लिखी गई हैं उनको अच्छी तरह से सीखने से बुद्धिमान् कनिष्ठफल के विषय मे पूर्ण निपुण हो जायगा और इस विषय पर अपने बुद्धिबल से भी अनेक कल्पना और उदाहरण करने की योग्यता सम्पादन कर सकेगा।

बहुत से गाणितिक लोग इस पर हंसेगे कि इस कनिष्ठ-फल के नियमों के बिना ही केवल गुणन, भागहार, और योग वियोग ही से सर्वत्र कार्य निर्वाह हो जाता है फिर कनिष्ठ फलों के नये नये संकेत और नियमो से क्या प्रयोजन, क्यो व्यर्थ ग्रन्थ बढा कर समय नष्ट करना।

इस पर इतना ही कहना पर्याप्त है कि इस गणित शास्त्र मे जितने ही लाघव से गणित का कर्म हो उतनी ही क्रिया की प्रशंसा होती है। इसलिये गुणन, भजन मे व्यर्थ जो काल और स्थान खराब होते हैं उसके स्थान मे यदि ग्रन्थ मे क्रिया की युक्ति दिखलाने के लिये कनिष्ठफल का ग्रहण किया जाय तो बहुत ही अल्प काल और अल्प स्थान मे सब युक्तियाँ दिखलाई जा सकती हैं। भास्कराचार्य ने भी अपने बीज-गणित मे लिखा है कि

"क्वचिदादेः क्वचिन्मध्यात्
क्वचिदन्ततात् क्रिया बुधैः ।
आरभ्यते यथा लब्धी
निर्वहेश्च तथा तथा ॥"

समीकरण-मीमांसा

दूसरा भाग

लेखक

स्वर्गवासी पं० सुधाकर द्विवेदी,

सम्पादक

पद्माकर द्विवेदी

प्रकाशक

विज्ञान परिषत्, प्रयाग।

श्री जानकीवल्लभो विजयते

समीकरण-मीमांसा

दूसरा भाग

जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः

सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः ।

तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय

वदति विविधभेदान् बीजजातानखेदान् ॥

१६—लुप्तीकरण

२०४—न ध्रुव शक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हुई हो जिनमें न अव्यक्त हों अथवा न अध्रुवशक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हो जहां न – १ अव्यक्त हों तो उनके परस्पर मिलाने से जो एक समीकरण प्र=० ऐसा उत्पन्न हो जो समीकरणों के पदो के गुणकों के अकरणीगत और अभिन्नफल के रूप मे है तो प्र को समीकरणों का प्रत्युत्पन्न कहते हैं। जैसे यदि

$$अय^2 + २कय + ख = ०,$$

$$अ'य^2 + २क'य + ख' = ०$$

दिए हुए ऐसे दो समीकरण हों जहां दोनों में य एक ही है तो दोनों पर से य के मान ले आने से और उनको परस्पर समान करने से

$$-\frac{क}{अ}+\frac{\sqrt{क^2-अख}}{अ}=-\frac{क'}{अ'}+\frac{\sqrt{क'^2-अ'ख'}}{अ'}$$

अअ' से गुण कर समशोधन से

$$अक'-अ'क=अ\sqrt{क'^2-अ'ख'}-अ'\sqrt{क^2-अख}$$

वर्ग करने से

$$अ^2क'^2+अ^2क^2अअ'कक'$$

$$=अ^2क'^2-अ^2अ'ख'+अ'^2अ'^2कख$$

$$-2अअ'\sqrt{क'^2-अ'ख'}\sqrt{क^2-अख}$$

समशोधन और अअ' के अपवर्त्तन से

$$अख'+अ'ख-2कक'$$

$$=-2\sqrt{क'^2-अ'ख'}\sqrt{क^2-अख}$$

वर्ग कर एक ओर ले जाने से

$$4(क^2-अख)(क'^2-अ'ख')-(अख'+अ'ख-2कक')^2=0=प्र$$

यह दिए हुए दोनों समीकरणों का प्रत्युत्पन्न हुआ। यहां तो समीकरणों से अव्यक्तमान जान कर तब प्र का मान निकाला गया है। अब ऐसी साधारण क्रिया दिखलाते हैं जिससे विना अव्यक्तमान निकाले प्रत्युत्पन्न का मान आवे।

२०५—तद्रूपफलों से लुप्तीकरण—कल्पना करो कि एक म घात और दूसरा न घात का समीकरण

$$फ(य)=प_0 य^म+प_1 य^{म-1}+प_2 य^{म-2}+प_3 य^{म-3}+ \cdots \cdots +प_म=0$$

$$फा(य)=ब_0 य^न+ब_1 य^{न-1}+ब_2 य^{न-2}+ \cdots \cdots +ब_न=0$$

यह दिया हुआ है। इनमे वह स्थिति जाननी है जब कि अव्यक्त का एक मान दोनों मे एक ही है। इसके लिये मान लो कि $फ(य)=0$। इसमे य के मान क्रम से $अ_1$, $अ_2$, $अ_3 \cdots \cdots$ $अ_म$ हैं तो इनका उत्थापन दूसरे मे देने से निश्चय है कि

$$फा(अ_1),\ फा(अ_2),\ फा(अ_3), \cdots \cdots फा(अ_म)$$

इनमे कोई न कोई मान अवश्य शून्य के तुल्य होगा अर्थात्

$$फा(अ_1),\ फा(अ_2),\ फा(3) \cdots \cdots फा(अ_म)$$

यह अवश्य शून्य के तुल्य होगा क्योंकि $अ_1$, $अ_2$, इत्यादि में से कोई न कोई एक संख्या ऐसी होगी जिसके उत्थापन से $फा(य)=0$ यह स्थिति सत्य होगी अन्यथा दोनों समीकरण मे एक मान का होना कैसे संभव है। अब $फा(अ_1)$, $फा(अ_2)$, $फा(अ_3)$ $\cdots\cdots फा(अ_म)$ इसका रूप अकरणीगत अभिन्न जो कि सर्वथा संभव है, क्योंकि यह $फ(य)=0$ इसके मानों का एक तद्रूपफल है, बनाने से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

यदि $फा(य)=0$ इसमे अव्यक्त मान $क_1$, $क_2$, $क_3 \cdots क_न$ हों तो

$$फा(य)=ब_0(य-क_1)(य-क_2)\cdots\cdots(य-क_न)=0$$

इनमें य के स्थान मे $अ_1$, $अ_2 \cdots\cdots अ_म$ के उत्थापन से

$$फा(अ_1)=ब_0(अ_1-क_1)(अ_1-क_2)\cdots\cdots(अ_1-क_न)$$

$$फा(अ_२)=ब_० (अ_२ - क_१)(अ - क_२) \cdots (अ_२ - क_न)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$फा(अ_म)=ब_० (अ_म - क_१)(अ_म - क_२) \cdots (अ_म - क_न)$$

प्रत्येक गुण खण्ड का चिन्ह बदल कर परस्पर गुण देने से और गुणनफल में $(क_१ - अ_१)(क_१ - अ_२) \cdots (क_१ - अ_न)$ इत्यादि के स्थानों मे

$$\{ फ(य)=०=प_०(य - अ_१)(य - अ_२) \cdots (य - अ_म)$$

$$फ(क_१)=प_०(क_१ - अ_१)(क_१ - अ_२) \cdots (क_१ - अ_म) \}$$

$\frac{फ(क_१)}{प_०}$ इत्यादि का उत्थापन देने से

$$प_०^न फा(अ_१)फा(अ_२) \cdots फा(अ_म)$$

$$=(-१)^{मन} ब_०^म फ(क_१)फ(क_२) \cdots फ(क_न)$$

इसलिये कह सकते हैं कि

$$प्र =(-१)^{मन} ब_०^म फ(क_१) फ(क_२) \cdots \cdots फ(क_न)$$

$$= प_०^न फा(अ_१) फा(अ_२) \cdots \cdots फा(अ_म)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

क्योंकि प्र के दोनों मान अकरणीगत अभिन्न समीकरणों के पदों के फल हैं (क्योंकि अव्यक्तमान समीकरण पदों के गुणकों के रूप में आ जाते हैं) और जो तभी शून्य हो सकते हैं जब कि फ (य) और फा (य) में एक गुण खण्ड उभय निष्ठ होगा और जब $अ_१, अ_२ \cdots$ और $क_१, क_२ \cdots$ के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाए जायंगे तब दोनों प्र के मान एक ही हो जायंगे।

२०६—प्रत्युत्पन्न के गुण—

(१) प्रत्युत्पन्न मे समीकरणो के पदो के गुणकों के वश सब से बड़ा घात अर्थात् सोपान मन होगा यह २०५ प्रक्रम के (१) के रूप ही से स्पष्ट होता है और प्रत्युत्पन्न के पहले रूप मे $(-१)^{नन}$ $ब_०^{म}$ $प_{म}^{न}$ यह और दूसरे में $प_०$ $ब_{न}^{म}$ यह एक पद रहेंगे।

(२) यदि दोनों समीकरणो में अव्यक्तमान द गुणित हो जायं तो प्रत्युत्पन्न का मान दमन गुणित हो जायगा क्योंकि प्रत्युत्पन्न के मान मे ^{मन}गुणकखण्ड प्रत्येक द गुणित हो जाने से अब नया प्रत्युत्पन्न $द^{मन}$ गुणित हो जायगा।

(३) दोनों समीकरणो मे अव्यक्तमान यदि एक ही संख्या से बढ़ाए जायं तो प्रत्युत्पन्न ज्यो का त्यों रहेगा। क्योंकि प्रत्युत्पन्न मे जो फ$(क_१)$, फ$(क_२)$, इत्यादि के

$(क_१ - अ_१)$ $(क_१ - अ_२)$ .... $(क_१ - अ_न)$, $(क_२ - अ_१)$ $(क_२ - अ_२)$... .$(क_२ - अ\ )$ इत्यादि मान हैं उनमें $क_१$, $क_२$.. और $अ_१$, $अ_२$ .. ...मे एक ही संख्या मिलाने से अन्तर मे कुछ विकार न होगा।

(४) ऊपर $क_१$, $अ_१$, इत्यादि के स्थान मे यदि $\frac{१}{क_१}$, $\frac{१}{अ_१}$, इत्यादि का अर्थात् उनके हरात्मक मान का उत्थापन दें तो

$क_१ - अ_१ = \frac{१}{क_१} - \frac{१}{अ_१} = \frac{अ_१ - क_१}{क_१ अ_१}$, इसलिये प्रत्युत्पन्न =

$$प्र' = प_{म}^{न} ब_{न}^{म} (-१)^{मन} \frac{(अ_१ - क_१)(अ_२ - क_१). \ .....}{(अ_१ अ_२ \cdots अ_म)^{न} (क_१ क_२ \cdots क_न)^{म}}$$

परन्तु $अ_1 अ_2 \ldots अ_म = (-1)^म \frac{प_म}{प_0}$ और

$क_1 क_2 \ldots\ldots\ldots क_न = (-1)^न \frac{ब_न}{ब_0}$ इनके उत्थापन से

$$प्र' = प_0^न ब_0^म (-1)^{मन} (अ_1 - क_1)(अ_2 - क_1 \ldots) = (-1)^{मन} प्र$$

इस पर से सिद्ध होता है कि मानों के हरात्मक मानों से जो प्रत्युत्पन्न होता है वह मानों के प्रत्युत्पन्न को $(-1)^{मन}$ इससे गुण देने से उत्पन्न होगा। यदि $प्र = 0$ तो $(-1)^{मन}$ से गुण देने से भी शून्य होगा, इसलिये कह सकते हो कि दोनो प्रत्युत्पन्न एक ही हैं।

(५) दोनों समीकरणों में य के स्थान में $\frac{तय + द}{त'य + द'}$ इसके उत्थापन से जो नये दो समीकरण होंगे उनके प्रत्युत्पन्न $प्र' = (तद' - त'द)^{मन} प्र$ ऐसा होगा। इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$फ(य) = प_0 (य - अ_1)(य - अ_2) \ldots\ldots (य - अ_म)$$

$$फा(य) = ब_0 (य - क_1)(य - क_2) \ldots\ldots (य - क_म)$$

और कोई अभिन्न गुणखण्ड पहिले का $= य - अ_थ$

$$= (त - त'अ_थ)\left(य - \frac{द'अ_थ - द}{त - त'अ_थ}\right)$$

अभिन्न दूसरे का गुणखण्ड $= य - क_थ$

$$= (त - त'क_थ)\left(य - \frac{द'क_थ - द}{त - त'क_थ}\right)$$

एकट्ठा गुण देने से

$प_0$ के स्थान में अब $प_0 (त - त'अ_1) (त - त'अ_2) \cdots (त - त'अ_म)$ होगा, $ब_0$ के स्थान में

$ब_0 (त - त'क_1) (त - त'क_2) \cdots (त - त'क_न)$ होगा और

$अ_थ$ और $क_थ$ बदल के अब $\frac{द'अ_थ - द}{त - त'अ_थ}$ और

$\frac{द'क_थ - द}{त - त'क_थ}$ ये होंगे।

$$इसलिये\ अ_थ - क_थ = \frac{(तद' - त'द)(अ_थ - क_थ)}{(त - त'अ_थ)(त - त'क_थ)}$$

$अ_थ - क_थ$, में थ के स्थान में १, २ ... के उत्थापन से जितने खण्ड होंगे उनके गुणन फल को यदि भा $(अ_थ - क_थ)$ मानो तो

$$प्र' = प_0^न ब_0^म भा (अ_थ - क_थ)$$
$$= प_0^न ब_0^म (तद' - त'द)^{मन} भा (अ_थ - क_थ)$$
$$= (तद' - त'द)^{मन} प्र।$$

इसमें,

$त' = ०, द' = १,$ और $द = ०$ तो (२) उपपन्न होगा।

$त = १, त' = ०$ और $द' = १$ तो (३) उपपन्न होगा।

$त = ०, द = १, त' = १, द' = ०$ तो (४) उपपन्न होगा।

इसलिये (२), (३) और (४) को अलग बालावबोध के लिये लिखा है।

२०७—लुप्तीकरण में ओलर (Euler) की रीति—

जब दो समीकरण फ(य)=० और फा(य)=०, म और न घात के एक मान समान रखते हैं तो मान लो कि

$$\left.\begin{array}{l} फ(य) = (य-प)फ_{1}(य) \\ फा(य) = (य-ष)फा_{1}(य) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(1)$$

जहां $फ_{1}(य)=प_{1}य^{म-1}+प_{2}य^{म-2}+\ldots.+प_{म}$

$फा_{1}(य)=ब_{1}य^{न-1}+ब_{2}य^{न-2}+\ldots.+ब_{न}$

पदों के गुणक इनमें अज्ञात हैं।

$फा_{1}(य)$ और $फ_{1}(य)$ से परस्पर गुण देने से (१) से

$फ(य)फा_{1}(य)=फा(य)फ_{1}(य)$

यह सरूप समीकरण म+न−१ घात का होगा।

इसलिये य के समान घातों के गुणक समान करने से म+न समीकरण म+न स्थिराङ्क $प_{1}, प_{2}.. .प_{म}, ब_{1}, ब_{2}$ ..... $ब_{न}$ से बनेंगे, जहां १९७ वें प्रक्रम की क्रिया से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

जैसे मान लो कि

$फ(य)=अय^{2}+कय+ख=0,$

$फा(य)=अ_{1}य^{2}+क_{1}य+ख_{1}=0$

ये दो समीकरण दिए हैं तो ऊपर की युक्ति से

$फ_{1}(य)=प_{1}य+प_{2}$

$फा_{1}(य)=ब_{1}य+ब_{2}$

$$\therefore\ (\text{ब}_1\text{य}+\text{ब}_2)(\text{अय}^2+\text{कय}+\text{ख})$$
$$=(\text{प}_1\text{य}+\text{प}_2)(\text{अ}_1\text{य}^2+\text{क}_1\text{य}+\text{ख}_1)$$

वा

$$(\text{ब}_1\text{अ}-\text{प}_1\text{अ}_1)\text{य}^3+(\text{ब}_1\text{क}+\text{ब}_2\text{अ}-\text{प}_1\text{क}_1-\text{प}_2\text{अ}_1)\text{य}^2$$
$$+(\text{ब}_1\text{ख}+\text{ब}_2\text{क}-\text{प}_1\text{ख}_1-\text{प}_2\text{क}_1)\text{य}+\text{ब}_2\text{ख}-\text{प}_2\text{ख}_1\equiv 0$$

सब गुणकों को शून्य के समान करने से

$$\text{ब}_1\text{अ}-\text{प}_1\text{अ}_1=0$$
$$\text{ब}_1\text{क}+\text{ब}_2\text{अ}-\text{प}_1\text{क}_1-\text{प}_2\text{अ}_1=0$$
$$\text{ब}_1\text{ख}+\text{ब}_2\text{क}-\text{प}_1\text{ख}_1-\text{प}_2\text{क}_1=0$$
$$\text{ब}_2\text{ख}\qquad-\text{प}_2\text{ख}_1=0$$

इन पर से १९७ प्रक्रम की क्रिया से

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & 0 & \text{अ}_1 & 0 \\ \text{क} & \text{अ} & \text{क}_1 & \text{अ}_1 \\ \text{ख} & \text{क} & \text{ख}_1 & \text{क}_1 \\ 0 & \text{ख} & 0 & \text{ख}_1 \end{vmatrix}=0=\text{प्र}$$

२०८—लुप्तीकरण में सिलवेस्टर (Sylvester) की युक्ति

यह ओलर ही की ऐसी रीति है। परन्तु इससे कुछ लाघव से प्रत्युत्पन्न होता है। मान लो कि

$$\text{फ}(\text{य})=\text{प}_0\text{य}^{\text{म}}+\text{प}_1\text{य}^{\text{म}-1}+\text{प}_2\text{य}^{\text{म}-2}+\cdots+\text{प}_{\text{म}}=0$$
$$\text{फा}(\text{य})=\text{ब}_0\text{य}^{\text{न}}+\text{ब}_1\text{य}^{\text{न}-1}+\text{ब}_2\text{य}^{\text{न}-2}+\cdots\cdots+\text{ब}_{\text{न}}=0$$

पहिले को क्रम से $य^{न-१}, य^{न-२}, \ldots\ldots य^{२}, य, य^{०}$ इनसे और दूसरे को क्रम से

$य^{म-१}, य^{म-२}, \ldots\ldots य^{२}, य, य^{०}$ इनसे गुण देने से म + न समीकरण बनेंगे जिनमें य का सब से बड़ा घात म + न − १ रहेगा। इसलिये इन समीकरणों में $य^{म+न-१}, य^{म+न-२}, \ldots\ldots य^{२}, य$ इतने भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से प्रत्युत्पन्न का मान पूर्ववत् आ जायगा। जैसे $अय^{२} + कय + ख = ०$,

$अ_{१}य^{२} + क_{१}य + ख_{१} = ०$। इनमें ऊपर की युक्ति से पहिले को य, य° से और दूसरे को भी य, य° से गुण देने से

$$अय^{३} + कय^{२} + खय = ०$$
$$अय^{२} + कय + ख = ०$$
$$अ_{१}य^{३} + क_{१}य^{२} + ख_{१}य = ०$$
$$अ_{१}य^{२} + क_{१}य + ख_{१} = ०$$

इनमें $य^{३}, य^{२}, य$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से पूर्ववत्

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ० \\ ० & अ & क & ख \\ अ_{१} & क_{१} & ख_{१} & ० \\ ० & अ_{१} & क_{१} & ख_{१} \end{vmatrix} = ० = प्र।$$

यदि उर्ध्वाधरों को तिर्यक् पंक्तिओं में ले जाव तो यह वही है जो कि ओलर की क्रिया से ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध हुआ है।

२०६—लुप्तीकरण में बेज़ौट की (Bezout) क्रिया

पहिले जब दोनों समीकरण तुल्य ही घात के हैं तो

(१) कल्पना करो कि समीकरण

$$अय^3 + कय^2 + खय + ग = ०;$$

$$अ_1य^3 + क_1य^2 + ख_1य + ग_1 = ०$$

ये हैं।

दोनों को क्रम से

$$अ_1 \text{ और } अ;$$

$$अ_1य + क_1 \text{ और } अय + क$$

$$अ_1य^2 + क_1य + ख_1 \text{ और } अय^2 + कय + ख$$

से गुण कर प्रति बार परस्पर घटाने से और १८७ प्रक्रम के सङ्केत से लिखने से

$$(अक_1)य^2 + (अख_1)य + (अग_1) = ०$$

$$(अख_1)य^2 + \{ (अग_1) + (कख_1) \}य + (कग_1) = ०$$

$$(अग_1)य^2 + (कग_1)य + (खग_1) = ०$$

ये समीकरण हुए, इनमें $य^2$ और य को भिन्न अव्यक्त मानने से १८७ प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} (अक_1), & (अख_1), & (अग_1) \\ (अख_1), & (अग_1)+(कख_1), & (कग_1) \\ (अग_1), & (कग_1), & (खग_1) \end{vmatrix} = ० = प \text{ ।}$$

यह प्रत्युत्पन्न एक तद्रूप कनिष्ठफल के रूप में आया है। प्रत्युपन्न जानने के लिये अनुगम निकालने के लिये और एक उदाहरण लेते हैं ;

कल्पना करो कि

$$अय^4 + कय^3 + खय^2 + गय + घ = 0,$$

$$अ_1य^4 + क_1य^3 + ख_1य^2 + ग_1य + घ_1 = 0 ।$$

ये समीकरण हैं तो बेज़ौट ही की युक्ति से

$$\frac{अ}{अ_1} = \frac{कय^3 + खय^2 + गय + घ}{क_1य^3 + ख_1य^2 + ग_1य + घ_1} ।$$

$$\frac{अय + क}{अ_1य + क_1} = \frac{खय^2 + गय + घ}{ख_1य^2 + ग_1य + घ_1} ।$$

$$\frac{अय^2 + कय + ख}{अ_1य^2 + क_1य + ख_1} = \frac{गय + घ}{ग_1य + घ_1} ।$$

$$\frac{अय^3 + कय^2 + खय + ग}{अ_1य^3 + क_1य^2 + ख_1य + ग_1} = \frac{घ}{घ_1} ।$$

समशोधन कर एक ओर सब पदों के ले जाने से पूर्ववत् चार समीकरण बनेंगे जिनमें $य^3$, $य^2$, $य$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान कर उनका लोप करने से

$$\begin{vmatrix} (अक_1), & (अख_1), & (अग_1), & (अघ_1) \\ (अख_1), & (अग_1) + (कख_1), & (अघ_1) + (कग_1), & (कघ_1) \\ (अग_1), & (अघ_1) + (कग_1), & (कघ_1) + (खग_1), & (खघ_1) \\ (अघ_1), & (कघ_1), & (खघ_1), & (गघ_1) \end{vmatrix}$$

यह जो प्रत्युत्पन्न हुआ है वह यदि ध्यान दे कर देखो तो

$$\begin{vmatrix} (\text{अक}_1), & (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1) \\ (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{कख}_1) \\ (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1) \\ (\text{अघ}_1), & (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1), & (\text{गघ}_1) \end{vmatrix}$$

इसके मध्यवर्ती चार ध्रुवों में

$$\begin{matrix} (\text{कख}_1), & (\text{कग}_1) \\ (\text{कग}_1), & (\text{खग}_1) \end{matrix}$$

इसके क्रम से चारों ध्रुवों को जोड़ देने से उत्पन्न हुआ है। इसी प्रकार

$\text{अ}\text{य}^5 + \text{क}\text{य}^4 + \text{ख}\text{य}^3 + \text{ग}\text{य}^2 + \text{घ}\text{य} + \text{ङ} = 0$

$\text{अ}_1\text{य}^5 + \text{क}_1\text{य}^4 + \text{ख}_1\text{य}^3 + \text{ग}_1\text{य}^2 + \text{घ}_1\text{य} + \text{ङ}_1 = 0$

इसका प्रत्युत्पन्न

$$\begin{vmatrix} (\text{अक}_1), & (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1) & (\text{अङ}_1) \\ (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{अङ}_1) & (\text{कङ}_1) \\ (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{अङ}_1), & (\text{कङ}_1) & (\text{खङ}_1) \\ (\text{अघ}_1), & (\text{अङ}_1), & (\text{कङ}_1), & (\text{खङ}_1) & (\text{गङ}_1) \\ (\text{अङ}_1), & (\text{कङ}_1), & (\text{खङ}_1), & (\text{गङ}_1) & (\text{घङ}_1) \end{vmatrix}$$

इसके मध्यवर्ती नव ध्रुवों में

$$\begin{vmatrix} (\text{कख}_1), & (\text{कग}_1), & (\text{कघ}_1), \\ (\text{कग}_1) & (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1), \\ (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1), & (\text{गघ}_1), \end{vmatrix}$$

क्रम से इसके नवों ध्रुवों के जोड़ने से और योग के मध्यवर्त्ती एक ध्रुव में (खग_1) इसको मिला देने से उत्पन्न होता

है। इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जान लेना चाहिए।

(२) जहाँ दोनों समीकरण भिन्न भिन्न घात के हैं तहां मान लो कि समीकरण

$$\text{अय}^4 + \text{कय}^3 + \text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ} = 0$$

$$\text{अ}_1\text{य}^2 + \text{क}_1\text{य} + \text{ख}_1 = 0 \text{ ये हैं।}$$

दोनो को क्रम से अ_1 और अय^2;

$\text{अ}_1\text{य} + \text{क}_1$ और $(\text{अय} + \text{क})\,\text{य}^2$

से गुण कर अन्तर करने से

$$(\text{अक}_1)\,\text{य}^3 + (\text{अख}_1)\,\text{य}^2 - \text{गअ}_1\text{य} - \text{घअ}_1 = 0$$

$$(\text{अख}_1)\,\text{य}^3 + \{(\text{कख}_1) - \text{गअ}_1\}\,\text{य}^2$$
$$(\text{गक}_1 + \text{घअ}_1)\,\text{य} - \text{घक}_1 = 0$$

और दूसरे को य और १ से गुण देने से

$$\text{अ}_1\text{य}^3 + \text{क}_1\text{य}^2 + \text{ख}_1\text{य} = 0$$

$$\text{अ}_1\text{य}^2 + \text{क}_1\text{य} + \text{ख}_1 = 0$$

अब चार समीकरण हुए जिनमे $\text{य}^3, \text{य}^2, \text{य}$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से

$$\begin{vmatrix} (\text{अक}_1) & (\text{अख}_1) & \text{गअ}_1 & \text{घअ}_1 \\ (\text{अख}_1) & (\text{कख}_1) - \text{गअ}_1 & \text{गक}_1 + \text{घअ}_1 & \text{घक}_1 \\ \text{अ}_1 & \text{क}_1 & -\text{ख}_1 & 0 \\ 0 & \text{अ}_1 & -\text{क}_1 & -\text{ख}_1 \end{vmatrix} = \text{प्र}$$

इसी प्रकार

$फ(य)=प_0 य^म + प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \ldots + प_म = 0$

$फा(य)=ब_0 य^न + ब_1 य^{न-1} + ब_2 य^{न-2} + \ldots + ब_न = 0$

इनमे जहां $म > न$ दूसरे समीकरण को $य^{म-न}$ से गुण देने से $ब_0 य^म + ब_1 य^{म-1} + ब_2 य^{म-2} + \ldots + ब_न य^{म-न} = 0$

यह उसी घात का हो गया जिस घात का प्रथम समीकरण है। इस समीकरण $फा(य)=0$ मे न अव्यक्त मान के साथ $म-न$ अव्यक्त मान जो शून्य के तुल्य हैं और मिले हैं। इसलिए प्रत्युत्पन्न के लिये $फ(य)$ मे $म-न$ बार शून्य के उत्थापन से $प_म$ यही रहेगा। फिर उनके परस्पर गुणन से प्रत्युत्पन्न मे एक गुण्य गुणक रूप मे खण्ड $प_म^{म-न}$ यह रहेगा जो कि व्यर्थ है। इसलिये ऊपर के समीकरणो से (१) युक्ति से नीचे लिखे न समीकरण बनेंगे।

$$\frac{प_0}{ब_0} = \frac{प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \ldots + प_म}{ब_1 य^{म-1} + ब_2 य^{म-2} + \ldots + ब_न य^{म-न}}$$

$$\frac{प_0 य + प_1}{ब_0 य + ब_1} = \frac{प_2 य^{म-2} + प_3 य^{म-3} + \ldots + प_म}{ब_2 य^{म-2} + ब_3 य^{म-3} + \ldots + ब_न य^{म-न}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{प_0 य^{न-1} + प_1 य^{न-2} + \ldots + प_{न-1}}{ब_0 य^{न-1} + ब_1 य^{न-2} + \ldots + ब_{न-1}} = \frac{प_न य^{म-न} + प_{न-1} य^{म-न-1} + \ldots + प_म}{ब_न य^{म-न}}$$

इनमे छेदगम से य का सबसे बड़ा $म-1$ घात होगा। इसलिये

$य^{म-१}, य^{म-२}, \ldots . य$, को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से ऊपर न समीकरणों से और

$$व_० य^{म-१} + व_१ य^{म-२} + व_२ य^{म-३} + \;\; . . = ०$$

$$व_० य^{म-२} + व_१ य^{म-३} \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; = ०$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$व_० य^{न} + व_१ य^{न-१} + \;\; \ldots \ldots + व_म = ०$$

इन म—न समीकरणों से म अक्षर पंक्ति के कनिष्ठफल के रूप में प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं जिनमें अब ऊपरी गुण्य गुणक रूप खण्ड जो कि म—न मान शून्य के मिलाने से आता था न आवेगा।

यदि फ (य) = ०, फा(य) = ० मे जहां दोनों समीकरणों में घात संख्या एक ही म है, प्रत्युत्पन्न प्र हो तो

$$त\,फ(य) + द'\,फा(य) = ०,$$

$$त'\,फ(य) + द'\,फा(य) = ०।$$

इनमें प्रत्युत्पन्न $= प्र' = (तद' - त'द)^{म}प्र$ ऐसा होगा क्योंकि बेज़ौट की युक्ति से पहिले प्रत्युत्पन्न में जो कोई $(अ_{ध} क_{स})$ यह मान था वही इस स्थिति में

$$\begin{vmatrix} त अ_{ध} + द क_{ध}, & त' अ_{ध} + द' क_{ध} \\ त अ_{स} + द क_{स}, & त' अ_{स} + द' क_{स} \end{vmatrix}$$

$$= (तद' - त'द)\,(अ_{ध} क_{स})$$

इसलिये (तद' — त'द) इस गुणक के म बार आने से

$$प्र' = (तद' - त'द^{म})\ प्र \text{ ऐसा होगा।}$$

२१०—२०५वें प्रक्रम से सिद्ध है कि प्रत्युत्पन्न

$$म = प_{\circ}^{न} फा (अ_1), फा (अ_2) \cdots फा (अ_न)$$
$$= (-1)^{मन} व_{\circ}^{म} फ(क_1) फ(क_2) \cdots\cdots फ(क_न)$$

यह है इसमें फा $(अ_1)$, फा$(अ_2)\cdots$ में $अ_1$, $अ_2$ न रहेगा जिनके मान पहिले समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात न ही रहेगा (१६०वां प्रक्रम देखो)। इसी प्रकार फ$(क_1)$, फ$(क_2)$, इत्यादि में $क_1$, $क_2$ इत्यादि के सब से बड़ा घात म के रहने से उनका रूप दूसरे समीकरणों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात म ही रहेगा। और उनमें घातों का परम योग नम रहेगा। इससे सिद्ध होता है कि प्रत्युत्पन्न के मान में घातों का परम योग मन रहेगा और फ$(य') = 0$ इसके गुणकों का सब से बड़ा घात न और फा$(य) = 0$ इसके गुणक का सब से बड़ा घात म रहेगा। यदि किसी और क्रिया से ऊपर की स्थिति न आवै तो समझना चाहिए कि वास्तव प्रत्युत्पन्न किसी ऊपरी गुणक से गुणित आया है जिसे ढूंढ कर अलग कर देना चाहिए। जैसे

$$अय^2 + कय + ख = 0,$$
$$अ_1 य^2 + क_1 य + ख_1 = 0 ।$$

इनमें यदि दोनों को क्रम से $अ_1$, अ और $ख_1$, ख से गुण कर अन्तर करो तो—

$$(अक_1) य + (अख_1) = 0$$
$$(अख_1) य + (कख_1) = 0$$

ऐसे समीकरण होंगे। इनमें यदि य का लोप करो तो

$$\text{म} = (\text{अ ख}_1)^2 - (\text{अक}_1)(\text{कख}_1) = 0$$

यहां देखते हैं कि दोनों समीकरणों के गुणक के घात म और न के २ के तुल्य होने से दो आए हैं और प्रत्येक पद में घातों का परम योग भी मन = ४ है। इसलिये ऊपर की स्थिति के होने से कहेंगे कि प्रत्युत्पन्न ठीक है।

परन्तु यदि $\text{अय}^3 + \text{कय}^2 + \text{खय} + \text{ग} = 0$,

$$\text{अ}_1\text{य}^3 + \text{क}_1\text{य}^2 + \text{ख}_1\text{य} + \text{ग}_1 = 0 \text{।}$$

इनमें दोनों को क्रम से अ_1, अ और ग_1, ग से गुण कर अन्तर करो तो

$$(\text{अक}_1)\text{य}^2 + (\text{अख}_1)\text{य} + (\text{अग}_1) = 0,$$

$$(\text{अग}_1)\text{य}^2 + (\text{कग}_1)\text{य} + (\text{खग}_1) = 0 \text{।}$$

ऐसे समीकरण बनेंगे। इनमें य^2 और य के लोप करने से ऊपर के उदाहरण की युक्ति से

$$\text{म} = \begin{vmatrix} (\text{अक}_1), & (\text{अख}_1) \\ (\text{अग}_1), & \text{खग}_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} (\text{अक}_1) & (\text{अख}^1) \\ (\text{अग}_1) & (\text{कग}_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\text{अख}_1), & \text{अग}_1 \\ (\text{कग}_1), & \text{खग}_1 \end{vmatrix}$$

यहां देखते हैं कि गुणकों का सब से बड़ा घात ४ अर्थात् दोनों समीकरणों के गुणकों के घात मिलाने से ८ और पद के गुणकों के घातों का योग १२ है, परन्तु प्रत्युत्पन्न के वास्तव मान में तो मिला हुआ घात ६ और पद के गुणकों के घातों का योग ९ चाहिए; इसलिये आए हुए प्रत्युत्पन्न में गुणक

गुणक रूप खण्ड कोई बढ़ गया है जिसे अलग करने से तब वास्तव प्रत्युत्पन्न होगा।

यहां ढूंढने से तो जान पड़ेगा कि वह खण्ड $(अग_१)$ यह है जिससे भाग देने से

वास्तव प्रत्युत्पन्न $= (अग_१)^३ - २(अक_१)(खग_१)(अग_१) +$ $कग_१)(खअ_१)(अग_१) + (खअ_१)^२(खग_१) + (अक_१)(कग_१)^२ +$ $(अक_१)(कख_१)(खग_१)$।

२११—यदि $फ(य) = ०$ इसमें एक मान दो बेर हो तो स्पष्ट है कि $फ'(य) = ०$ इसमें भी वह मान एक बेर होगा वा $नफ(य) - यफ'(य) = ०$ इसमें वह मान एक बेर होगा। यह $न - १$ घात का समीकरण है; और $फ'(य)$ भी $न - १$ घात का समीकरण है; इसलिये इन दोनों पर से $य^{न-१}$ $य^{न-२}$ इत्यादि का लोप करने से जो गुणकों से एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा उसे उत्पन्न कहो। वह जिस समय शून्य होगा उस स्थिति में कहेंगे कि वही प्रत्युत्पन्न होगा और $फ(य) = ०$ इसमें एक मान दो बार आवेगा। जैसे

१। $अ_० य^३ + ३अ_१ य^२ + ३अ_२ य + अ_३ = ०$ इसमें उत्पन्न का मान बताओ।

$$फ(य) = अ_० य^३ + ३अ_१ य^२ + ३अ_२ य + अ_३ = ०$$

$$फ'(य) = ३अ_० य^२ + ६अ_१ य + ३अ_२ = ०$$

$$नफ(य) = ३अ_० य^३ + ९अ_१ य^२ + ९अ_२ य + ३अ_३ = ०$$

$$यफ'(य) = ३अ_० य^३ + ६अ_१ य^२ + ३अ_२ य = ०$$

$$नफ' - यफ'(य) = ३अ_१ य^२ + ६अ_२ य + ३अ_३ = ०$$

३ के अपवर्तन से $अ_१ य^२ + २अ_२ य + अ_३ = ०$

$फ'(य)$ में ३ के भाग देने से $अ_० य^२ + २अ_१ य + अ_२ = ०$

२०४वें प्रक्रम से उत्पन्न

$= ४(अ_० अ_२ - अ^२_१)(अ_१ अ_३ - अ^२_२) - (अ_० अ_३ - अ_१ अ_२)^२$

यही जब शून्य के तुल्य होगा तब फ(य) = ० इसमें एक मान दो बार आवेगा।

वही प्रत्युत्पन्न २०८ वें प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} अ_० & २अ_१ & अ_२ & ० \\ ० & अ_० & २अ_१ & अ_२ \\ अ_१ & २अ_२ & अ_३ & ० \\ ० & अ_१ & २अ_२ & अ_३ \end{vmatrix} = ०$$ ऐसा होगा।

इसी प्रकार और उदाहरणों में भी जानना चाहिए।

२१२। २०८ प्रक्रम में जो प्रत्युत्पन्न का मान एक कनिष्ठफल के रूप में आया है उसके प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ संख्यात्मक ध्रुव $प_०$ और $व_०$ ये ही दो होंगे। और सब शून्य होंगे। इसलिये यदि $प_०$ ध्रुव का प्रथम लघु कनिष्ठफल $पा_०$ और $व_०$ का प्रथम लघु कनिष्ठफल $वा_०$ कहो तो प्रत्युत्पन्न $= प_० पा_० + व_० वा_०$ ऐसा होगा (१८६ प्रक्रम देखो) जहां $पा_०$ और $वा_०$ दिए हुए समीकरणों के पद गुणकों के फल हैं।

$प_० पा_० + व_० वा_० = प्र \cdots\cdots (१)$

इसे स्मरण कर रक्खो।

२१३—यदि

$$स = प_म य^म + प_{म-१} य^{म-१} + \ldots\ldots + प_० \qquad = ०$$

$$स_१ = व_न य^न + व_{न-१} य^{न-१} + \ldots\ldots + व_० \qquad = ०$$

इन दोनों का प्रत्युत्पन्न प्र हो तो २१२वें प्रक्रम से

$प्र = प_म पा_म \; व_न वा_न$ जहां $पा_म$ और $वा_न$ समीकरणों के पद

गुणकों के फल हैं। इनके हरात्मक समीकरणों का प्रत्युत्पन्न $=\text{प}_{0}\text{पा}_{0}+\text{ब}_{0}\text{बा}_{0}$ जो कि २०६ प्रक्रम के (४) से इनके प्रत्युत्पन्न के समान है। इस प्रत्युत्पन्न में प_{0} और ब_{0} के स्थान में $\text{प}_{0}-\text{स}$ और $\text{ब}_{0}-\text{म}$ का उत्थापन देने से

$$0=\text{प}_{0}\text{पा}_{0}-\text{सपा}_{0}+\text{ब}_{0}\text{बा}_{0}-\text{स}_{1}\text{बा}_{0}$$

$$\therefore\ \text{प}_{0}\text{पा}_{0}+\text{ब}_{0}\text{बा}_{0}=\text{प्र}=\text{सपा}_{0}+\text{स}_{1}\text{बा}_{0}$$

$\text{प}_{\text{त}}$ और $\text{प}_{\text{त}+1}$ गुणक के वश तात्कालिक संबन्ध, चलन-कलन से, निकालने से

$$\frac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{\text{त}}}=\text{य}^{\text{त}}\text{पा}_{0}+\text{स}\frac{\text{तापा}_{0}}{\text{ताप}_{\text{त}}}+\text{स}_{1}\frac{\text{ताबा}_{0}}{\text{ताप}_{\text{त}}}$$

$$\frac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{\text{त}+1}}=\text{य}^{\text{त}+1}\text{पा}_{0}+\text{स}\frac{\text{तापा}_{0}}{\text{ताप}_{\text{त}+1}}+\text{स}_{1}\frac{\text{ताबा}_{0}}{\text{ताप}_{\text{त}+1}}$$

मान लो कि जब य=अ तो दोनों समीकरण शून्य होते हैं अर्थात् अ यह दोनों समीकरणों में य का एक मान है तब इसके उत्थापन से

$$\frac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{\text{त}}}=\text{अ}^{\text{त}}\text{पा}_{0}\ \text{और}\ \frac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{\text{त}+1}}=\text{अ}^{\text{त}+1}\text{पा}_{0}$$

$$\therefore\ \text{अ}=\frac{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{\text{त}+1}}}{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{\text{त}}}}$$

त के स्थान में ०, १, २, ३ ... के उत्थापन से

$$\text{अ}=\frac{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{1}}}{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{0}}}=\frac{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{2}}}{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{2}}}=\frac{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{1}}}{\dfrac{\text{ताप्र}}{\text{ताप}_{2}}}=\text{इत्यादि}$$

इस पर से दोनों समीकरणों में जो अव्यक्तमान एक ही है उसका मान जान सकते हो। इस प्रकार फ (य)=० का यदि एक मूल दो बार हो तो उस मूल का भी पता २११ प्रक्रम के दोनों समीकरणों से लगा सकते हो।

२१४। यदि दिए हुए दो समीकरणों के मूलों के तद्रूपफल का मान निकालना हो तो नीचे की क्रिया करो।

कल्पना करो कि

$$\text{फ}\,(\text{य}) = \text{प}_0\text{य}^{\text{म}} + \text{प}_1\text{य}^{\text{म}-1} + \text{प}_2\text{य}^{\text{म}-2} + \cdots + \text{प}_{\text{म}} = 0 \quad (1)$$

जिसके मूल $\text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \cdots\cdots \text{अ}_{\text{म}}$ हैं।

$$\text{और फा}(\text{र}) = \text{ब}_0\text{र}^{\text{न}} + \text{ब}_1\text{र}^{\text{न}-1} + \text{ब}_2\text{र}^{\text{न}-2} + \cdots + \text{ब}_{\text{न}} = 0 \quad (2)$$

जिसके मूल $\text{क}_1, \text{क}_2, \text{क}_3 \cdots\cdots\cdots \text{क}_{\text{न}}$ हैं।

कल्पना करो कि एक नया मूल ल ऐसा है कि जिसके वश से $\text{ल} = \text{तय} + \text{दर}$ ऐसा समीकरण बनता है।

इससे ल और य के रूप में र का मान जान (२) में उत्थापन देने से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें य का सब से बड़ा घात न रहेगा और जिसमें त, द और ल के भी सब से बड़े घात न होंगे।

अब (१) और इस नये समीकरण में ऊपर के प्रक्रमों की किसी युक्ति से य का लोप करो तो एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें ल का सब से बड़ा घात मन होगा; इसलिये ल का मान जो $\text{त}\text{अ}_1 + \text{द}\text{क}_1$ इस प्रकार का है वह म न विध होगा।

अब यदि ऐसी इच्छा हो कि फ (य) और फा (र) के पद गुणकों के रूप में यौ $\text{अ}_1^{\text{य}}\,\text{क}_1^{\text{ध}}$ इसका मान जानें तो ल के वश से जो समीकरण बना है उसमें अव्यक्तमानों के (य+ध)

घात के योग का मान निकालें उसमें $त^{य}द^{ध}$ का जो गुणक होगा वही स्पष्ट है कि यौ अ, $क^{ध}$, का मान होगा।

उदाहरण

१। $अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$ । $य^{५} = १$

इनमें य का लोप करो।

पहिले समीकरण

$अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$ इसे य से गुण देने से

और $य^{५} = १$ से $अ + कय^{४} + खय^{३} + गय^{२} + घय = ०$

फिर य से गुणने से, $अय + क + खय^{४} + गय^{३} + घय^{२} = ०$

फिर य से " $अय^{२} + कय + ख + गय^{४} + घय^{३} = ०$

फिर य से " $अय^{३} + कय^{२} + खय + ग + घय^{४} = ०$

घात क्रम से लिखने से

$$अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$$
$$कय^{४} + खय^{३} + गय^{२} + घय + अ = ०$$
$$खय^{४} + गय^{३} + घय^{२} + अय + क = ०$$
$$गय^{४} + घय^{३} + अय^{२} + कय + ख = ०$$
$$घय^{४} + अय^{३} + कय^{२} + खय + ग = ०$$

इनमें $य^{४}$, $य^{३}$, $य^{२}$ और य के लोप करने से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & घ \\ क & ख & ग & घ & अ \\ ख & ग & घ & अ & क \\ ग & घ & अ & क & ख \\ घ & अ & क & ख & ग \end{vmatrix} = ०$$

नीचे से तिर्यक् पंक्तिओं को एक एक उठा कर ऊपर की तिर्यक पंक्ति के नीचे रक्खो तो वह ठीक २०२ प्रक्रम के २०वें उदाहरण के ऐसा हो जायगा।

२। ऊपर ही की युक्ति से दिखलाओ कि $अय^2 + कय + ख = 0$ और $य^3 = 1$

इनका प्रत्युत्पन्न

$$= \begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & अ \\ ख & अ & क \end{vmatrix} = 0$$

३। ओलर की रीति से दिखलाओ कि किस स्थिति में

$$फ(य) = अय^3 + कय^2 + खय + ग = 0$$
$$फा(य) = अ'य^3 + क'य^2 + ख'य + ग' = 0$$

इनमें दो अव्यक्तमान उभयनिष्ठ होंगे।

यहां $(य - ष)(य - ष_1)$ इस प्रकार के दो खण्ड दोनों में उभयनिष्ठ होंगे। इसलिये तीसरा खण्ड क्रम से $दय + त$ और $द'य + त'$ मान लिये जायँ तो

$$(द'य + त')\, फ(य) = (दय + त)\, फा(य)$$

जहां $द, त, द'$ और $त'$ अज्ञात हैं। ऊपर के सरूप समीकरण से

$$\begin{array}{llll} द'अ & & - दअ' & = 0 \\ द'क + त'अ & - दक' & - तअ' & = 0 \\ द'ख + त'क & - दख' & - तक' & = 0 \\ द'ग + त'ख & - दग' & - तख' & = 0 \\ \quad त'ग & & - तग' & = 0 \end{array}$$

इन पांचो समीकरणों में से कोई चार लेकर द', त', द और त का लोप कर सकते हो। इस प्रकार लोप करने में पांच कनिष्ठफल बनेंगे जिनके मान शून्य होनेसे उदाहरण की स्थिति ठीक होगी। पांचों कनिष्ठफलों को लाघव से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & ० \\ ० & अ & क & ख & ग \\ अ' & क' & ख' & ग' & ० \\ ० & अ' & क' & ख' & ग' \end{vmatrix} = ०$$

यहां यह दिखलाता है कि एक एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को मिटा देने से जो पांच कनिष्ठफल होंगे उनके मान शून्य हैं।

४। सिद्धकरो कि

$$\begin{vmatrix} अ^२ & २ अक & क^२ \\ अअ' & अक' + अ'क & कक' \\ अ'^२ & २ अ'क' & क'^२ \end{vmatrix} = (अक' - अ'क)^३ = क फ.$$

$$अय + कर = ०,$$

$$अ'य + क'र = ० ।$$

इन दोनों से १६६ प्रक्रम की युक्ति से

$$(अक' - अ'क) य = \begin{vmatrix} ० & क \\ ० & क' \end{vmatrix} = ०$$

$$\therefore \quad (अक' - अ'क) य^२ = ० \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

और $(अय + कर)^२ = ०,$

$$(अय + कर)(अ'य + क'र) = ०$$

$$(अ'य + क'र)^२$$

इन तीनों में $य^२$, यर और $र^२$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से १९६ प्रक्रम की युक्ति से

$$कफय^२ = ०$$

$$\therefore कफय^२ = ० \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (२)$$

(१) और (२) के समता से ऊपर का सरूप समीकरण सिद्ध हो जायगा।

५। ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ^३ & ३अ^२क & ३अक^२ & क^३ \\ अ^२अ' & अ^२क' + २अअ'क & २अकक' + अ'क^२ & कक' \\ अअ'^२ & अ'^२क + २अअ'क' & २अ'कक' + अक'^२ & कक'^२ \\ अ'^३ & ३अ'^२क' & ३अ'क'^२ & क'^३ \end{vmatrix} \equiv (अक' - अ'क)^६$$

यहां $अय + कर = ०,$

$$अ'य + क'र = ० \text{ ।}$$

इन समीकरणों से

$$(अय + कर)^३ = ०,$$
$$(अय + कर)^२ (अ'य + कर) = ०$$
$$(अय + कर)(अ'य + क'र)^२ = ०$$
$$(अ'य + क'र)^३ = ०$$

ये चार समीकरण बना कर इनमें $य^३$, $य^२र$, $यर^२$, $र^३$ का लोप करो तो बाईं ओर का कनिष्ठफल उत्पन्न होगा फिर पिछले उदाहरण की युक्ति से और बातें जानो।

६। $फ(य) = ०$, $फ'(य) + फ''(य)\frac{र}{१\cdot२} + फ'''(य)\frac{र^२}{३!} + \cdots = ०$

इनमें य को लोप कर नया समीकरण बनाओ और सिद्ध करो कि उसमें अव्यक्त मान फ (य)= ० इसके दो दो मूलों के अन्तर के समान होंगे।

मान लो कि फ (य) = (य − अ$_{१}$) (य − अ$_{२}$) ··· (य − अ$_{न}$) य के स्थान में र + अ$_{१}$, र + अ$_{२}$, र + अ$_{३}$ ... र + अ$_{न}$ के उत्थापन से

$$\left.\begin{array}{l} फ\,(र+अ_{१}) = र\,\{र+(अ_{१}-अ_{२})\}\,\{र+(अ_{१}-अ_{३})\}\cdots \\ फ\,(र+अ_{२}) = र\,\{र+(अ_{२}-अ_{१})\}\,\{र+(अ_{२}-अ_{३})\}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ फ\,(र+अ_{न}) = र\,\{र+(अ_{न}-अ_{१})\}\,\{र+(अ_{न}-अ_{२})\}\cdots \end{array}\right\}$$

और साधारण से $\frac{१}{र}$ फ (र + अ$_{त}$) = फ$'$ (अ$_{त}$) +

$$फ''\,(अ_{त})\,\frac{र}{१\,२} + फ'''\,(अ_{त})\,\frac{र^{२}}{३!} + \cdots\cdots\cdots$$

इसमें त को १, २, ३, ... न मान कर दहिने पक्षों के घात को (१) इसके दहिने पक्ष के घात के समान करो।

२१५—यदि दो समीकरण ऐसे हों जिनमें दो अव्यक्त य, र हों उनमें यदि एक समीकरण में केवल य^{म} घात हो और कहीं किसी पद में य न रहे तो समीकरण की युक्ति से य^{म} का मान र के रूप में आवेगा और इस पर से य का मान जान इसका उत्थापन दूसरे में देने से एक ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें केवल र ही रहेगा। इस प्रकार दोनों समीकरणों से एक नया समीकरण बन गया जिसमें से य निकल गया। फिर इस समीकरण की आकृति से र का ठीक ठीक वा आसन्न मान पिछले अध्यायों की युक्ति से आ जायगा जिससे य के मान का भी ज्ञान हो जायगा।

कल्पना करो कि उन दोनों समीकरणों के रूप आ = ०, का = ० ऐसे हैं जहां आ और का दोनों य और र के फल हैं और गुण्य गुणक रूप खण्डों में आ = स स′ स″ और का = श श′ ऐसा हो जाता है तो दिए हुए समीकरणों के सब मूल स = ०, और श = ०, स = ० और श′ = ०, स′ = ० और श = ० स′ = ० ।और श′ = ०, स″ = ० और श = ०, स″ = ० और श′ = ० इन समीकरणों से आ जायंगे जो कि पहिले दोनों समीकरणों की अपेक्षा अल्प घात के होंगे।

संभव है कि दोनों समीकरण के गुण खण्डों में कोई समान हों जैसे ऊपर के उदाहरण में संभव है कि स=श ऐसा हो, ऐसी स्थिति में जो य और र के मान आ = ० इसे सत्य रक्खेंगे वे का = ० इसे भी सत्य रखेंगे; इसलिये स = ० इसमें चाहे र का जो मान मान उसके उत्थापन से तत्सम्बन्धी य का मान जान सकते हैं। इस प्रकार कुट्टक की युक्ति से यहां अनेक य और र के मान आवेंगे। यदि इस स्थिति में स = ० इसमें एक ही अव्यक्त हो तो उसका मान तो स = ० इससे परिमित होंगे और दूसरे का मान चाहे जो मान सकते हो।

२१६—कल्पना करो कि $फ_1(य,र)=0$ और $फ_2(य,र)=0$ इनमें $य = अ_1$, $र = क_1$ तो समीकरण ठीक रहते हैं। तो $फ_1(य,क_1)=0$ और $फ_2(य,क_1)=0$ ये दोनों य के $अ_1$ तुल्यमान में सत्य रहेंगे। इसलिये दोनों समीकरण $य-अ_1$ इससे निःशेष होंगे अर्थात् $फ_1(य,क_1)$ और $फ_2(य,क_1)$ का महत्तमापवर्त्तन अवश्य $य-अ_1$ होगा। अर्थात् $फ_1(य,क_1)$ और $फ_2(य,क_1)$ का महत्तमापवर्त्तन जो हो उसे शून्यके

समान करने से य का एक मान अ, वा अनेक मान ऐसे आवेंगे जिनके वश से जब र = क, तब दोनों समीकरण ठीक रहेंगे।

कल्पना करो कि फ$_1$(य,र) और फ$_2$(य,र) में य के अपचित घात क्रम से पदों को रख कर महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये क्रिया करना आरम्भ किया और करते करते अन्त में ऐसा शेष बचा जो केवल र का फल है अर्थात् शेष = फ(र) ऐसा हुआ तो जब तक फ(र) = ० ऐसा न होगा तब तक फ$_1$(य,र), फ$_2$(य,र) का कोई महत्तमापवर्त्तन न होगा; इसलिये य के एक ही मानमें दोनों शून्य के समान नहीं हो सकते। यह कुछ नियम नहीं कि फ(र) = ० इसमें जितने र के मान आवेंगे सब से दोनों समीकरणों को समता ठीक रहेगी क्योंकि संभव है कि क्रिया करने में य के किसी घात का गुणक जो र के रूप में है भिन्न हो और र का कोई फल हर में हो जिसमें फ (र) = ० इसके एक अव्यक्त मान के उत्थापन से फल शून्य के समान हो ऐसी दशा में उस राशि का मान अनन्त होगा जो कि यहाँ पर उचित नहीं। जैसे यदि

फ$_1$ (य,र) = लफ$_2$, (य,र) + फ (र)

तो यदि ल = लब्धि अभिन्न हो तो परिमिति के मान के उत्थापन से अनन्त नहीं होगा; इसलिये फ (र) = ० और फ$_2$ (य,र) = ० इन परसे जो य, और र के मान होंगे उनके उत्थापन से फ$_1$ (य,र) = ० यह ठीक शून्य ही होगा; इसलिये कहेंगे कि य और र के मान ठीक हैं। परन्तु यदि ल भिन्न हो और उसके हर में र का कोई फल हो तो संभव है कि फ(र) = ० फ$_1$(य,र) = ० इनसे जो र का मान हो उसके

उत्थापन से ल$फ_2$(य,र) = ∞ वा ल$फ_2$(य,र) = $\frac{0}{0}$ ऐसा हो, ऐसी स्थिति में $फ_1$(य,र)=∞ वा $फ_1$(य,र)= $\frac{0}{0}$ ऐसा होगा जो कि समीकरण की स्थिति से अशुद्ध है। यदि एक गुणक ख, जो कि केवल र का फल है इससे $फ_1$(य,र) को गुण $फ_2$(य,र) इसका भाग दें जिसमें लब्धि अभिन्न आवे तो अब

ख$_1$$फ_1$(य,र) = ल $फ_2$ (य,र) + फ(र)ऐसी स्थिति होगी। यहां फ(र) = ०, $फ_2$(य,र) = ० इनसे जो य और र आवेंगे उनके उत्थापन से अवश्य अब ल के अभिन्न होने से ल $फ_2$ (य,र) + फ(र) = ० ऐसाहोगा; इसलिये ख$_1$$फ_1$(य,र) यह भी शून्य के समान होगा परन्तु यह नहीं कह सकते कि $फ_1$(य,र) =० ऐसा हो क्योंकि संभव है कि ख$_1$ =० हो। इसलिये यहां पर यह विचारणीय है कि कौन य और र के मान ठीक होंगे।

य और र के मान जानने के लिये M. M. Labatie and Sarrus की रीति दिखलाते हैं। महत्तमापवर्त्तन जानने के लिये यदि लब्धि भिन्न आती हो तो ख जो कि र का कोई फल है उससे भाज्य को गुण कर तब भाग दो और शेष में यदि शि जो कि र का फल है इसका निःशेष भाग जाता हो तो उससे भाग दे कर लब्धि को शेष कहो।

२१८—मान लो कि आ = ०, का = ० ये दो समीकरण हैं जिन दोनों में ऐसे कोई गुण खण्ड नहीं हैं जो केवल र के फल हों और आ की अपेक्षा का में य का अल्प घात है। ख गुणक से आ को गुणने से और का का भाग देने से लब्धि क और शेष शिशे जहां शि र का कोई फल है।

फिर शे से का में भाग देने से ऊपर के सब पदार्थ स$_1$, ख$_1$ शि$_1$, शे$_1$ समझो। इस तरह किया करते करते मान लो कि चौथे बार शि$_3$ और शे=१ तो

$$\left.\begin{array}{l} \text{स आ} = \text{ल का} + \text{शि शे} \\ \text{स}_1 \text{ का} = \text{ल}_1 \text{ शे} + \text{शि}_1 \text{ शे}_1 \\ \text{स}_2 \text{ शे} = \text{ल}_2 \text{ शे}_1 + \text{शि}_2 \text{ शे}_2 \\ \text{स}_3 \text{ शे}_1 = \text{ल}_3 \text{ शे}_2 + \text{शि}_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

अब मान लो कि स और शि का महत्तमापवर्त्तन ग, $\frac{\text{सस}_1}{\text{ग}}$ और शि$_1$ का महत्तमापवर्त्तन ग$_1$, $\frac{\text{सस}_1\text{स}_2}{\text{गग}}$ और शि$_2$ का महत्तमापवर्त्तन ग$_2$ और $\frac{\text{सस}_1\text{स}_2\text{स}_3}{\text{गग}_1\text{ग}_2}$ और शि$_3$ का महत्तमापवर्त्तन ग$_3$ है तो

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{शि}}{\text{ग}} = 0, \text{ और का} = 0 \\ \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1} = 0, \text{ और शे} = 0 \\ \frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2} = 0, \text{ और शे}_1 = 0 \\ \frac{\text{शि}_3}{\text{ग}_3} = 0, \text{ और शे}_2 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

इन समीकरणों से य और र के जो मान होंगे वे ही आ=० और का=० इन दोनों में भी य और र के मान होंगे।

(१) इन में से पहिले समीकरण में ग का भाग देने से

$$\frac{\text{स}}{\text{ग}}\text{आ} = \frac{\text{ल}}{\text{ग}}\text{का} + \frac{\text{शि}}{\text{ग}}\text{ शे} \ldots\ldots (3)$$

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग है; इसलिये $\frac{ख}{ग}$, $\frac{शि}{ग}$ के अभिन्न होने से $\frac{ल}{ग}$ भी अभिन्न होगा क्योंकि ग केवल र का फल है और का में केवल र के फल का गुणखन्ड नहीं है ऐसा पहले ही मान लिया है, इसलिये का और ग परस्पर दृढ़ हैं। (३) से स्पष्ट है कि $\frac{शि}{ग} = 0$, का $= 0$ य और र के जितने मान आवेंगे उनके उत्थापन से $\frac{ख}{ग}$ आ यह भी शून्य होगा परन्तु ग के महत्तमापवर्त्तन होने से $\frac{ख}{ग}$ और $\frac{शि}{ग}$ इनमें अब उभय-निष्ठ गुणखण्ड कोई न होंगे। इसलिये जिस मान में $\frac{शि}{ग}$ शून्य होगा उस मान में $\frac{ख}{ग}$ यह शून्य न होगा; इसलिये (३) के सत्य होने से आ $= 0$ ऐसा होगा; इसलिये $\frac{शि}{ग} = 0$ और का $= 0$ इनमें के सब व्यक्त मान आ $= 0$, का $= 0$ इनमें भी रहेंगे। (३) के दोनों पक्षों को $ख_1$ से गुण देने से और $ख_1$ का के स्थान में (१) के दूसरे समीकरण का उत्थापन देने से $\frac{ख ख_1}{ग}$-आ $= \frac{ख_1 शि + ल ल_1}{ग}$शे $+ \frac{ल}{ग} शि_1 शे_1$

शि और ल के ग से अभिन्न होने से $\frac{ख_1 शि + ल ल_1}{ग}$ यह अभिन्न होगा और दोनों पक्षों में $ग_1$ के भाग से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि $\frac{ख_1 शि + ल ल_1}{ग ग_1}$ यह भी अभिन्न होगा।

$मा = \frac{ल}{ग}$ और $\frac{ख, शि + ल ल_१}{ग ग_१} = मा_१$ मान लेने से

$$\frac{ख ख_१}{ग ग_१} आ = मा_१ शे + \frac{शि_१}{ग_१} मा शे_१ \quad \ldots \quad \ldots (४)$$

(१) के दूसरे समीकरण को $\frac{ख}{ग}$ से गुण देने से

$$\frac{ख ख_१}{ग} का = \frac{ख ल_१}{ग} शे + \frac{ख}{ग} शि_१ शे_१$$

$ग_१$, $\frac{ख ल_१}{ग}$ और $शि_१$ को निःशेष करता है, इसलिये शे के केवल र का फल न होने से $\frac{ख ल_१}{ग}$ को भी $ग_१$ निःशेष करेगा, इसलिये लाघव से $\frac{ख}{ग} = ना$, $\frac{ख ल_१}{ग ग_१} = ना_१$ मान लेने से

$$\frac{ख ख_१}{ग ग_१} का = ना_१ शे + \frac{शि_१}{ग_१} ना शे_१ \quad \ldots (५)$$

(४) और (५) से स्पष्ट है कि $\frac{शि_१}{ग_१} = ०$ शे $= ०$। इनसे य और र के जितने मान होंगे सब के उत्थापन से ऊपर की युक्ति से आ = ० और का = ० ठीक रहेंगे, इसलिये $\frac{शि_१}{ग_१} = ०$, शे = ०, इनके सब मूल आ = ०, का = ० इनमें होंगे।

(४) के दोनों पक्षों को $ख_२$ से गुण देने से $ख_२$ का उत्थापन (१) के तीसरे समीकरण से देने से

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1} आ = \left(ल_2 मा_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} मा \right) शे_1$$
$$+ शि_2 मा_1 शे_2$$

महत्तमापवर्त्तन होने से $ग_2$ प्रथम पक्ष और $शि_2$ को निःशेष करता है; इसलिये ऊपर ही की युक्ति से $ग_2$, $शे_1$ में केवल र का फल गुण खण्ड न होने से, $\left(ला_2 मा_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} मा \right)$ को निःशेष करेगा।

मान लो कि निःशेष करने से लब्धि $मा_2$ है तो

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1 ग_2} आ = मा_2 शे_1 + \frac{शि_2}{ग_2} मा_1 शे_2 \cdots (६)$$

(५) के दोनों पक्षों को $ख_2$ से गुण देने से और $ख_2$ शे के स्थान में (१) के तीसरे समीकरण का उत्थापन देने से

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1} का = \left(ल_2 ना_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} ना \right) शे_1$$
$$+ शि_2 ना_1 शे_2$$

पूर्ववत् फिर सिद्ध कर सकते हो कि $\left(ल_2 ना_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} ना \right)$ यह $ग_2$ से निःशेष होगा और मान लो कि लब्धि $ना_2$ आई तो

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1 ग_2} का = ना_2 शे_1 + \frac{शि_2}{ग_2} ना_1 शे_2 \cdots\cdots\cdots (७)$$

(६) और (७) से स्पष्ट है कि $\frac{शि_{२}}{ग_{२}} = ०$, $शे_{१} = ०$, इनमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे सब आ = ० और का = ० इनमें भी होंगे।

इसी प्रकार (८) और (९) के दोनों पक्षों को $ख_{३}$ से गुण कर और $ख_{३}$ $शे_{१}$ का उत्थापन (१) के चौथे समीकरण से देने से पूर्ववत् क्रिया करने से

$$\frac{ख\,ख_{१}\,ख_{२}\,ख_{३}}{ग\,ग_{१}\,ग_{२}\,ग_{३}} आ = मा_{३}\,शे_{२} + \frac{शि_{३}}{ग_{३}} मा_{२} \ldots\ldots (८)$$

$$\frac{ख\,ख_{१}\,ख_{२}\,ख_{३}}{ग\,ग_{१}\,ग_{२}\,ग_{३}} का = ना_{३}\,शे_{२} + \frac{शि_{३}}{ग_{३}} ना_{२} \ldots\ldots (९)$$

ऐसे समीकरण बनेंगे जिन से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि $\frac{शि_{३}}{ग_{३}} = ०$ और $शे_{२} = ०$ इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब आ = ० और का = ० इनमें भी अव्यक्तमान होंगे। इससे सिद्ध हुआ कि (२) समीकरण परम्परा से जितने अव्यक्तमान आवेंगे सब के उत्थापन से आ = ० और का = ० ये दोनों समीकरण सत्य रहेंगे।

अब इतना और दिखाना है कि आ = ०, का = ०, इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब (२) समीकरण परम्परा के अव्यक्तमानों के अन्तर्गत हैं।

(३) को थोड़ा परिवर्तन करने से

$$ना\,आ - मा\,का = \frac{शि}{ग} शे \ldots\ldots\ldots\ldots (१०)$$

ऐसे लिख सकते हो।

(४) को का और (५) वें को आ से गुण कर घटा देने स

$$(\text{मा}_1\text{का} - \text{ना}_1\text{आ})\,\text{शे} + (\text{मा का} - \text{ना आ})\,\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}\,\text{शे}_1 = 0$$

(१०) वें से

$$(\text{मा}_1\,\text{का} - \text{ना}_1\,\text{आ})\,\text{शे} - \frac{\text{शि शि}_1}{\text{ग ग}_1}\,\text{शे शे}_1 = 0$$

इसलिये

$$\text{मा}_1\text{का} - \text{ना}_1\text{आ} = \frac{\text{शि शि}_1}{\text{ग ग}_1}\,\text{शे}_1 \quad \ldots\ldots\ldots (११)$$

(६) वें को का से और (७) वें को आ से गुण कर घटा देने से

$$(\text{मा}_2\text{का} - \text{ना}_2\text{आ})\,\text{शे}_1 + (\text{मा}_1\text{का} - \text{ना}_1\text{आ})\,\frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2}\,\text{शे}_2 = 0$$

और (११) वें से

$$(\text{मा}_2\text{का} - \text{ना}_2\text{आ})\,\text{शे}_1 + \frac{\text{शिशि}_1\text{शि}_2}{\text{गग}_1\text{ग}_2}\,\text{शे}_1\text{शे}_2$$

इसलिये

$$\text{मा}_2\text{का} - \text{ना}_2\text{आ} = -\frac{\text{शिशि}_1\text{शि}_2}{\text{गग}_1\text{ग}_2}\,\text{शे}_2 \quad \ldots\ldots\ldots (१२)$$

इसी प्रकार (८) वें और (९) वें से

$$\text{मा}_3\text{का} - \text{ना}_3\text{आ} = \frac{\text{शिशि}_1\text{शि}_2\text{शि}_3}{\text{गग}_1\text{ग}_2\text{ग}_3} \quad \ldots\ldots\ldots (१३)$$

(१३) वें से स्पष्ट है कि जितने स और र के मान में आ

और $व_1$ शून्य होंगे उतने मानों में $\frac{शिशि_1 शि_2 शि_3}{गग_1 ग_2 ग_3}$ यह भी शून्य होगा, इसलिये इसके गुण खण्डों $\frac{शि}{ग}$, $\frac{शि_1}{ग_1}$, $\frac{शि_2}{ग_2}$ और $\frac{शि_3}{ग_3}$ में एक एक अवश्य शून्य होंगे।

इसलिये $\frac{शि}{ग}=0$, $\frac{शि_1}{ग_1}=0$, $\frac{शि_2}{ग_2}=0$ और $\frac{शि_3}{ग_3}=0$, इनसे जितने र के मान आवेंगे उनके अन्तर्गत ही आ=0 और का=0 के र के मान होंगे।

कल्पना करो कि जब य=अ, और र=क तब आ=0 और का=0 ये ठीक हो जाते हैं तो यदि $\frac{शि}{ग}=0$ इसमें भी एक मान क हो तो य=अ, और र=क में $\frac{शि}{ग}=0$ और का=0 ऐसा होगा।

यदि क, $\frac{शि}{ग}=0$ इसमें का अव्यक्त मान न हो किन्तु $\frac{शि_1}{ग_1}=0$ इसमें का एक अव्यक्त मान हो तो क के उत्थापन से $\frac{शि}{ग}$ के न शून्य होने से (10) वें से य=0 और र=क में $\frac{शि_1}{ग_1}=0$ और शे = 0 होगा।

यदि क, $\frac{शि}{ग}=0$, $\frac{शि_1}{ग_1}=0$, इन दोनों में अव्यक्त मान न हो किन्तु $\frac{शि_2}{ग_2}=0$ इसमे का एक अव्यक्त मान हो तो ऊपर ही

की युक्ति से और (११) वें से य = अ, और र = क में $\frac{शि_२}{ग_२} = ०$ और शे$_१$ = ० होगा।

फिर कल्पना करो कि क, $\frac{शि}{ग} = ०, \frac{शि_१}{ग_१} = ०, \frac{शि_२}{ग_२} = ०$

इन में का अव्यक्त मान नहीं है किन्तु $\frac{शि_३}{ग_३} = ०$ इसमें का अव्यक्त मान है तो य = अ और र = क में (१२) वें से $\frac{शि_३}{ग_३} = ०$ और शे$_२$ = ० होगा। इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो जाती है।

$\frac{शि}{ग} \frac{शि_१}{ग_१} \frac{शि_२}{ग_२} \frac{शि_३}{ग_३} = ०$ इस समीकरण को जिस पर से र के सब मान आते हैं र के रूप में प्रधान समीकरण कहते हैं।

उदाहरण

१। $(र-१) य^२ + र य + र^२ - २ र = ०, \ (र-१) य + र = ०$ इन में य और र का मान बताओ।

यहां $अ = (र-१) य^२ + र य + र^२ - २ र$

$क = (र-१) य + र$

ख = १, ल=य, शि = $र^२ - २ र$, शे = ०

∴ ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग = १

(२) समीकरण परम्परा से

$\frac{शि}{ग} = र^2 - २र = ०$ और $श = (र - १) य + र = ०$ इन से य और र का मान जान लो।

२। $(र - १) य^3 + र (र + १) य^2 + (३ र^2 + र - २)य + २र = ०$ ...... (१)

और $(र - १) य^2 + र (र + १) य + ३ र^2 - १ = ०$ ......(२)

इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

(१) को अ और (२) को क कहो तो

ख = १, ल = य, शिशे = (र - १) य + २र .. शि = १ और शे = (र - १) य + २र।

फिर $ख_1 = १$, $ल_1 = य + र$, $शि_1 शे_1 = र^2 - १$ $\therefore शि_1 = र^2 - १$, $शे_1 = १$।

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग = १, परन्तु र के न रहने से यह व्यर्थ है।

$\frac{ख_1}{ग} = \frac{१}{१} = १$ और $शि_1 = र^2 - १$ का महत्तमापवर्त्तन

$ग_1 = १$

इसलिये $\frac{शि_1}{ग_1} = र^2 - १ = ०$, $शे = (र - १) य + २र = ०$।

इन पर से य और र के मान जान लो।

३। $रय^2 - (र^2 - ३र - १)य + र = ०$, $य^2 - र^2 + ३ = ०$

इनमें ख=१, ल=रय, शि=१, शे=य + र।

$ख_१=१$, $ल_१=य-र$, $शि_१=१$, $शे_१=१$

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन $ग=१$ और $\frac{खख_१}{ग}=१$ और

$शि_१=१$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_१=१$, इसलिये यहाँ $\frac{शि}{ग}=१=०$ यह

असंभव और $\frac{शि_१}{ग_१}=१=०$ यह भी असंभव होने से कहेंगे कि

प्रश्न खिल है।

४। $य^३+३रय^२-३य^२+३र^२य-६रय-य+र^३-३र^२$
$-र+३=०=अ$,

और $य^३-३रय^२+३य^२+३र^२य-६रय-य-र^३+३र^२$
$+र-३=०=क$।

इनमें $ख=१$, पहिला शेष अर्थात् $शिशे=$
$२(र-१)(३य^२र^२-२र-३)$

$\therefore$ $शि=र-१$, $शे=३य^२+र^२-२र-३$।

$ख_१=३$, $शि_१शे_१=८(र^२-२र)य$, $\therefore$ $शि_१=र^२-२र$, $शे_१=८य$

$ख_२=८$, $शि_२शे_२=र^२-२र-३$ $\therefore$ $शि_२=र^२-२र-३$,

$शे_२=१$, $ख=१$ और $शि=र-१$ का महत्तमापवर्त्तन $ग=१$ और

$\frac{खख_१}{ग}=३$ और

$शि_१=र^२-२र$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_१=१$ और $\frac{खख_१ख_२}{गग_१}$

$=१\times ३\times ८=२४$ का और $शि_२=र^२—२र—३$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_२=१$ हुआ।

इसलिये $\frac{शि}{ग}=र—१=०$, का$=०$, $\frac{शि_१}{ग_१}=र^२—२र=०$, शे

$=३य^२+र^२—१र—३=०$ और $\frac{शि_२}{ग_२}=र^२—२र—३=०$. $शे_१$

$=८य$ वा $य=०$

और प्रधान समीकरण र के रूप मे

$(र-१)(र^२—२र)(र^२—२र-३)=०$ यह हुआ।

५। $(र—२)य^२—२य+४र-२=०=$आ

और $रय^२-४य+४र=०=$का इनमें य और र के लिये समीकरण परम्परा बनाओ।

यहां आ को र से गुणकर तब का के भाग देने से ल अभिन्न आता है, इसलिये ख$=$र और शि शे$=(३र—१०)य+र^२+८र$ शि$=१$, शे$=(३र—१०)र+र^२+८र$। शे का भाग का में देने के लिये और $ल_१$ को अभिन्न होने के लिये का को पहिले $३र—१०$ से गुण देने से फिर $३र—१०$ से गुण देने से अर्थात् का को $(३र—१०)^२$ से गुण देने से $ख_१=(३र-१०)^२$,

$शि_१शे_१=र^५+१२र^४+८७र^३-२००र^२+१००र$।

इसलिये $शि_१=र^५+१२र^४+८७र^३—२००र^२+१००र$ और $शे_१=१$।

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन $ग=१$। और $\frac{खख_१}{ग}=$

$\frac{र(३र-१०)^२}{र} = र(३र-१०)^२$ और $शि_१$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_१ = र$ है।

इसलिये $\frac{शि}{ग} = \frac{१}{१} = १ = ०$ असंभव होने से

$$\frac{शि_१}{ग_१} = \frac{र^५ + १२र^४ + ८७र^३ - २००र^२ + १००र}{र}$$

$= र^४ + १२र^३ + ८७र^२ - २००र + १०० = ०$, शे =

$(३र-१०)य + र^२ + ६र = ०$

इनसे य और र के मान विदित हो जायंगे।

३२०। ३१९ प्रक्रम के (३) से जब सिद्ध है कि $\frac{ल}{ग}$ यह अभिन्न $ल'$ के बराबर होगा तब कह सकते हो कि ख का एक छोटा मान ऐसा हो सकता है कि जिसके वश से सर्वदा $ग=१$ हो। इसी प्रकार $ख_१$, $ख_२$ ...... के मान ऐसे ले सकते हैं जिसमें $ख_१$, और $शि_२$ का, $ख_२$ और $शि_२$ का, इत्यादि का महत्तमापवर्त्तन १ ही हो। इसलिये $\frac{ख ख_१}{ग}$ और $शि_१$ का महत्तमापवर्त्तन $= ग_१$ ($ग = १$ और $ख_१$ और $शि_१$ के परस्पर दृढ़ होने से) वही होगा जो कि ख और $शि_१$ को होगा। और $\frac{ख ख_२}{ग_१}$ और $शि_२$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_२$ होगा। इस प्रकार आगे भी जान लेना चाहिए।

यदि अन्त में शि जैसा कि ३१९ वें प्रक्रम में मान लिया

है कि शि_3 यह य से स्वतन्त्र है, शून्य के तुल्य हो तो शे_2 यह आ और का का महत्तमापवर्त्तन होगा। इसलिये $\text{शे}_2=0$ इस पर से २१७ प्रक्रम की युक्ति से य और र के अनन्त मान आ सकते हैं, और $\frac{\text{आ}}{\text{श}_2}=0$, और $\frac{\text{का}}{\text{श}_2}=0$ इन समीकरणों से पूर्ववत् क्रिया करने से य और र के परिमित मान भी आवेंगे और तब (२) की समीकरण परम्परा में श_2 के भाग दे देने से

$$\frac{\text{शि}}{\text{ग}}=0 \text{ और } \frac{\text{का}}{\text{शे}_2}=0,\ \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}=0 \text{ और } \frac{\text{शे}}{\text{शे}_2}=0,\ \frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2}=0 \text{ और } \frac{\text{शे}_1}{\text{शे}_2}=0$$

इनसे य और र के उन परिमित मानों का पता लगा सकते हो।

जैसे $\text{य}^3+\text{र}\,\text{य}^2-(\text{र}^2+1)\,\text{य}+\text{र}-\text{र}^3=0=\text{आ}$

$\text{य}^3-\text{र}\text{य}^2-(\text{र}^2+6\,\text{र}+6)\,\text{य}+\text{र}^3+6\text{र}^2+6\text{र}=0=\text{का}$

यहां का से आ में भाग देने से $\text{ल}=1$ और पहिला शेष

$=2\{\text{र}\text{य}^2+(3\text{र}+4)\text{य}-(\text{र}^3+3\text{र}^2+4\text{र})\}$

इसलिये $\text{शि}=2$, $\text{शे}=\text{र}\text{य}^2+(3\text{र}+4)\text{य}-(\text{र}^3+3\text{र}^2+4\text{र})$

शे से का में भाग देने में का को र से गुण देने से फिर एक बार भाग दे देने पर अभिन्न लब्धि के लिये र से गुण देने से अर्थात् का को र^2 से गुण देने से।

$$\text{ल}_1=\text{[illegible]},\ \text{शि}_1\text{शे}_1=8(\text{र}^2+3\text{र}+2)(\text{य}-\text{र})$$

इसलिये $\text{शि}_1=8(\text{र}^2+3\text{र}+2)$ और $\text{शे}_1=\text{य}-\text{र}$

शे, से शे में भाग देने से शेष कुछ नहीं बचता इसलिये शि$_2$=० तब ऊपर की क्रिया से शे$_1$=य—र=० इस पर से य और र के अनेक मान आवेंगे और $\frac{शि_1}{ग_1}=८(र^2+३र+२)=०$

वा $र^2+३र+२=0$ और $\frac{शे}{शे_1}=यर+र^2+३र+४=0$ इनसे परिमित य और र भी आवेंगे।

२१८ प्रक्रम की क्रिया में यह मान लिया गया है कि य और र के अनन्त मान नहीं हैं। अर्थात् आ और का के महत्तमापवर्तन से आ और का को भाग देकर जो लब्धि आवे उसे आ और का के स्थान में रख कर तब २१८ वें प्रक्रम से सर्वदा क्रिया का आरम्भ करो।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि $य+र=0$, $य^2-र^2+१=0$ ऐसे दो समीकरण नहीं हो सकते।

२। $य+र-४=0$, $य^4+र^4-८२=0$ इनमें य और र के मान बताओ।

यहाँ शि $=(४-र)^4+र^4-८२$, स=१

$\therefore \frac{शि}{ग}=(४-र)^4+र^4-८२=0$, का $=य+र-४=0$

३। $य^2+यर+र^2-४९=0$, $य^4+य^2र^2+र^4-९३१=0$ इनमें य और र के मान बताओ।

यहाँ स = १, शि = −९८, शे = यर—१५, स$_1$र^2,

शि$_1$=र^4−१५र^2+२२५,.

शे$_1$ = १, ख और शि का महत्तमापवर्तन ग = १,

$\frac{ख ख_1}{ग}$ = र^2, शि$_1$ = र^4 − ३४र^2 + २२५ का महत्तमापवर्तन ग$_1$ = १

∴ $\frac{शि_1}{ग_1}$ = र^4 − ३४ र^2 + २२५ = ० और शे = य र − १५ = ०

४। य^2 + र^2 − (य + र) − अ = ०, य^4 + र^4 + य + र − २(य^2 + र^2) − क = ० इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ ख = १, शि = २ (र^2 − र − अ)^2 + २अ (र^2 − र − अ) + अ^2 − अ − क, शे = १, ख और शि का महत्तमापवर्तन ग = १

∴ $\frac{शि}{ग}$ = २ (र^2 − र − अ)^2 + २अ (र^2 − र − अ) + अ^2 − अ − क = ०

और का = य^2 + र^2 − (य + र) − अ = ०

यदि समीकरण को तोड़ कर अव्यक्त के मान ले आओ तो

य (य − १) = $\frac{1}{2}$ {अ ± √(२ अ + २ क − अ^2)}

र (र − १) = $\frac{1}{2}$ {अ ∓ √(२ अ + २ क − अ^2)}

५। य^3 + ३रय^2 + (३र^2 − र + १)य + र^3 − र^2 + २र = ०,

य^2 + २रय + र^2 − र = ०, इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ र^2 − र = ०, य + २र = ० ऐसे समीकरण बनेंगे।

६। य^3 + २रय^2 + २र(र − १)य + र^2 − ४ = ०

य^2 + २रय + २र^2 − ५र + २ = ० इनमें य और र के मान जानने के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ $र - २ = ०$, $य^२ - २रय + २र^२ - ५र + २ = ०$ और $र^२ - ५र + ६ = ०$, $य + र + २ = ०$ ऐसे समीकरण बनेंगे। और र के रूप में प्रधान समीकरण

$$(र-२)(र^२-४र+४)=० \text{ ऐसा होगा।}$$

१७—प्रकीर्णक।

२२१। चलस्पर्द्धी, अचलस्पर्द्धी।

१२६ वें प्रक्रम में जो म का मान है उसे लाघव से

$$(अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots, अ_न)(य, १)^न$$

इस सङ्केत से प्रकाश करते हैं।

इसी प्रकार $(अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots, अ_न)(य, र)^न$

$$= अ_० य^न + न अ_१ य^{न-१} र + \frac{न(न-१)}{२!} अ_२ य^{न-२} र^२$$

$+ \ldots\ldots + न अ_{न-१} य र^{न-१} + अ_न र^न$ ऐसा मान सकते हो।

$स_न = (अ_०, अ_१, अ_२ \ldots\ldots न_न)(य, १)^न$ इसमें अव्यक्त मान क्रम से $इ_१, इ_२, इ_३, \ldots इ_न$ समझो तो यदि इनके अन्तर से बना एक तद्रूप और भुजशक्तिक फल फा हो जिसमें सोपान की संख्या सो हो तो फा में $इ_१, इ_२, \ldots\ldots इ_न$ के स्थान में $\frac{१}{इ_१-य}, \frac{१}{इ_२-य}, \ldots\ldots \frac{१}{इ_न-य}$ इनके उत्थापन से जो फा का

मान हो उसे अभिन्न करने के लिये $स_न^{मो}$ इससे गुण देनेसे यदि गुणनफल में य रहे तो गुणनफल को $स_न$ का चलस्पर्द्धी और यदि य न रहे तो उसे $स_न$ का अचलस्पर्द्धी कहते हैं।

यदि फा में प्रत्येक अव्यक्तमान का समान ही घात सो हो तो ऊपर की परिभाषा से $स_न$ का अचलस्पर्द्धी $अ_०^{सो}$ फा ($अ_१$, $अ_२$,····· $अ_न$) ऐसा होगा।

यदि स =०, स =०, $स_भ$=० इत्यादि के मूलों के अन्तर का तद्रूपफल फा हो जिनमें सो, सो', सो'' इत्यादि सोपान हों तो ऊपर की परिभाषा से प्रत्येक अव्यक्त मान इ इत्यादि के स्थानमें $\frac{१}{इ-य}$ इत्यादि के उत्थापन से और अभिन्न के लिये। $स_प^{सो} स_ब^{सो'} स_भ^{सो''}$

इत्यादि से गुण देने से यदि गुणन फल में य रहे तो $स_प$ $स_ब$ $स_भ$ इत्यादि परम्परा का चलस्पर्शी और य न रहे तो उन्हीं परम्परा का वह गुणन फल अचलस्पर्शी होगा। (सोपान के लिये १६६ वाँ प्रक्रम देखो)

२२१। कल्पना करो कि

$$अ_०^{सो} फा (इ_१, इ_२, इ_३, \ldots\ldots इ_न) = फि\ अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, \ldots अ_न$$

इनमें अव्यक्त मानों $इ_१$, $इ_२$ इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मान के उत्थापन से और $अ_०$, $अ_१$, $अ_२$,...इत्यादि के स्थानों में

$अ_न, अ_{न-१}, अ_{न-२}$ इत्यादि के उत्थापन से $अ_०^{सो} फि(इ_१, इ_२, \ldots इ_न)$ $= फी(अ_न, अ_{न-१}, अ_{न-२}, \ldots अ_०)$ जहाँ अव्यक्त मानों का कोई तद्रूप फल फि है और फी तत्संबन्धी समीकरण के गुणकों के रूप में मान है।

अब फिर $इ_१, इ_२, \ldots$ इत्यादि के स्थान में $इ_१-य, इ_२-य, \ldots इ_न-य$ इत्यादि के उत्थान से और $अ_न, अ_{न-१}\ldots$ इत्यादि के स्थानों में १२६ वें प्रक्रम से $स_न, स_{न-१}\ldots$ इत्यादि के उत्थापन से $स_न$ का चलस्पर्शी

$अ_०^{सो} फि(इ_१-य, इ_२-य, \ldots इ_न-य) = फि(स_न, स_{न-१}, \ldots स_१, स_०)$ ऐसा होगा। जैसे

१। $स_३ = अ_० य^३ + ३अ_१ य^२ + ३अ_२ य + अ_३ = ०$

इसमें यदि य के मान $इ_१, इ_२, इ_३$ मान लो तो इनके अन्तर का फल

$$फा = अ_०^२ \{(इ_१ - इ_२)^२ + (इ_१ - इ_३)^२ + (इ_२ - इ_३)^२\}$$

ऐसा हो तो १७१ वें प्रक्रम से

$$फा = १८(अ_१^२ - अ_० अ_२)।$$

इसलिये मानों को उनके हरात्मक मानों में बदल देने से और $अ_०, अ_१, \ldots$ इत्यादि के स्थानों में $अ_न, अ_{न-१}, \ldots$ के रखने से

$$अ_३^२ \left\{ \frac{इ_३^२(इ_२ - इ_१)^२}{इ_१^२ इ_२^२ इ_३^२} + \frac{इ_२^२(इ_३ - इ_१)^२}{इ_१^२ इ_२^२ इ_३^२} + \frac{इ_१^२(इ_३ - इ_२)^२}{इ_१^२ इ_२^२ इ_३^२} \right\}$$

$$= अ_०^२ \{इ_३^२ (इ_२ - इ_१)^२ + इ_२^२ (इ_३ - इ_१)^२ + इ_१^२ (इ_३ - इ_२)^२\}$$

$= १८ (अ^२_{न-१} — अ_न अ_{न-२}) = १८ (अ^२_२ — अ_१ अ_३)$

इसमें $इ_१, इ_२, इ_३$ इनके स्थान में $इ_१ — य, इ_२ — य, इ_३ — य$ इनके उत्थापन से

$अ^२_० \{ (इ_३ — य)^२ (इ_२ — इ_१)^२ + (इ_२ — य)^२ (इ_३ — इ_१) + (इ_१ — य)^२ (इ_३ — इ_२)^२ \} = १८ (स^२_२ — स_१ स_३)$

इसके दूसरे पक्ष में $स_२, स_१, स_३$ इनका उत्थान १२६ प्रक्रम से देने से और लाघव के लिये १८ को निकाल देने से

$स^२_२ - स_१ स_३ = (अ_० अ_२ — अ^२_१) य^२ + (अ_० अ_३ — अ_१ अ_२) य + (अ_१ अ_३ — अ^२_२)$ यह $स_३$ का चलस्पर्द्धी हुआ।

२। इसी प्रकार चतुर्घात समीकरण में अर्थात् $स_४ = ०$ इस में यदि य के मान $इ_१, इ_२, इ_३, इ_४$ हों और इन के अन्तर का फल=फा=$अ^२_० यो (इ_२ - इ_३)^२ (इ_२ — इ_४)^२$ तो १७१ वें प्रक्रम से

फा $= २४ (अ_४ अ_० - ४ अ_३ अ_१ + ३ अ^२_२) = २४$ भा (१२२ प्र. देखो)। इसमें $इ_१, इ_२$, इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मानों का और $अ_०, अ_१, ...$ इत्यादि के स्थानों में उनके स्पर्द्धी $अ_न, अ_{न-१}$ ..इत्यादि का उत्थापन दें तो फा ज्यों का त्यों रहता है; इसलिये यहां फा=फि, पुनः फि में $इ_१, इ_२, ..$ इत्यादि के स्थानों में $इ_१ — य, इ_२ — य$ ..इत्यादि के उत्थापन से भी अन्तर करने से $इ_१, इ_२$ ...इत्यादि के अन्तर के रहने से और य के न रहने से $स_४$ का अचलस्पर्द्धी $अ_४ अ_० - ४ अ_३ अ_१ + ३ अ^२_२$ = भा यह होगा।

३। इसी प्रकार यदि चतुर्घात समीकरण $स_४ = ०$ इसमे

$$\text{फा} = \text{अ}_0^3 \{(\text{इ}_3 - \text{इ}_1)(\text{इ}_2 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_1 - \text{इ}_2)(\text{इ}_3 - \text{इ}_4)\}$$
$$\{(\text{इ}_1 - \text{इ}_2)(\text{इ}_3 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_2 - \text{इ}_3)(\text{इ}_1 - \text{इ}_4)\}$$
$$\{(\text{इ}_2 - \text{इ}_3)(\text{इ}_1 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_3 - \text{इ}_1)(\text{इ}_2 - \text{इ}_4)\}$$

$$= -४३२ \text{अ}_0 \text{अ}_2 \text{अ}_4 + २\text{अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_3 - \text{अ}_0 \text{अ}_3^2 - \text{अ}_1^2 \text{अ}_4 - \text{अ}^3)$$
= छा (१२२ वां प्र. देखो)

तो यहां स_4 का अचलस्पर्द्धी होगा।

२२२। चलस्पर्द्धी वा अचलस्पर्द्धी में अव्यक्त मानों के ध्रुव शक्तिक फल फा होता है और उनके अन्तर का भी यही फल होता है। इसलिये चलस्पर्द्धी का रूप

$$\frac{\text{स}^{\text{सो}}}{\text{य}^{\text{ध्रु}}} \text{फा}\left(\frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \ldots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_न - \text{य}}\right)$$ ऐसा हो सकता है जहाँ सो सोपान और ध्रु ध्रुवशक्ति का द्योतक है।

अव्यक्त के मानों के अन्तर का फल फा होने से प्रत्येक ध्रुव $\frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}$ इत्यादि में एक जोड़ने से भी फा में भेद न होगा; इसलिये १ जोड़ने से और प्रत्येक को य से गुण और भाग देने से चलस्पर्द्धी

$$\frac{\text{स}^{\text{सो}}}{\text{य}^{\text{ध्रु}}} \text{फा}\left(\frac{\text{इ}_1 \text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{इ}_2 \text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \ldots\ldots, \frac{\text{इ}_न \text{य}}{\text{इ}_न - \text{य}}\right)$$ ऐसा होगा।

जिसका लघुतम रूप

$$(-१)^{\text{ध्रु}} स^{\text{सो}}_{\text{ल}} य^{\text{नसो}-२\text{ध्रु}} \text{फा}\left(\frac{१}{\frac{१}{इ_१}-\frac{१}{य}}, \frac{१}{\frac{१}{इ_१}-य}, \ldots\ldots, \frac{१}{\frac{१}{इ_न}-य} \right)$$ ऐसा होगा जहाँ

$$स_{\text{ल}} = अ_न \left(\frac{१}{य}-\frac{१}{इ_१}\right)\left(\frac{१}{य}-\frac{१}{इ_२}\right)\ldots\ldots\left(\frac{१}{य}-\frac{१}{इ_न}\right)।$$

इस पर से सिद्ध होता है कि

$$\text{चलस्पद्ध}\ \frac{स^{\text{सो}}}{य^{\text{ध्रु}}}\ \text{फा}\left(\frac{य}{इ_१-य}, \frac{य}{इ_१-य}, \frac{य}{य_३-य}, \ldots\ldots, \frac{य}{इ_न-य} \right)$$

$$= म^{\text{सो}} \text{फा}\left(\frac{१}{इ_१-य}, \frac{१}{इ_२-य}, \ldots\ldots, \frac{य}{इ_न-य} \right)$$

यह अविकृत रहता है यदि $इ_१, इ_२, \ldots, इ_न$, य इनके स्थान में इनके हरात्मक मानों का उत्थापन दें और $अ_०, अ_१, अ_२, \ldots अ_न$ इनके स्थान में $अ_न, अ_{न-१}, अ_{न-२} \ldots\ldots अ_०$ का उत्थापन दें और उत्पन्न फल को $(-१)^{\text{ध्रु}} य^{\text{न सो}-२\text{ ध्रु}}$ इससे गुण दें।

इसलिये यदि म घात के किसी चलस्पर्द्धी का पद

$(\text{का}_0, \text{का}_1, \text{का}_2, \ldots \text{का}_\text{म})(\text{य}, १)^\text{म} \ldots\ldots\ldots (१)$

ऐसा हो तो $\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots \text{अ}_\text{न}$, य के स्थान में $\text{अ}_\text{न}, \text{अ}_{\text{न}-१}, \ldots\ldots, \text{अ}_0, \frac{१}{\text{य}}$ के उत्थापन से वही

$$(-१)^{\text{धु}} \text{य}^{\text{नसे}-२\text{धु}} (\text{खा}_0, \text{खा}_1, \ldots\ldots \text{खा}_\text{म})(\tfrac{१}{\text{य}}, १)^\text{म} \ldots (२)$$

इस रूप का होगा। इसे (१) के साथ तुलना करने से

$$\text{म}=\text{न से}-२\text{धु},\ \text{का}_0=(-१)^{\text{धु}}\text{खा}_\text{म}, \ldots\ldots \text{का}_\text{त}=(-१)^{\text{धु}}\text{खा}_{\text{म}-\text{त}} \ldots\ldots\ldots (३)$$

(२) को (१) का संबद्ध कहते हैं और (१) को (२) का संबद्ध कहते हैं।

(३) से सिद्ध होता है कि यदि (१) के किसी पद का गुणक

$\text{फी}(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots \text{अ}_\text{न}) = \text{का}_\text{त}$ हो तो इसके संबद्ध रूप

$\text{खा}_{\text{म}-\text{त}} = \text{फी}(\text{अ}_\text{न}, \text{अ}_{\text{न}-१}, \ldots . \text{अ}_0)(-१)^{\text{धु}}$ यह होगा

(१) यदि $\text{अ}_0^{\text{से}}$ फा यह अचलस्पर्द्धी हो तो इसका संवद्ध भी अचलस्पर्द्धी होगा; इसलिये $\text{म}=0=\text{नसे}-२\text{धु} \therefore \text{नसे}=२\text{धु}$

(२) विषमघात समीकरण के अचलस्पर्द्धी में सम सोपान रहेगा। क्योंकि (१) से यहां पर नसे=२धु ऐसा होगा। परन्तु न विषम है, इसलिये से अवश्य सम होगा। और धु न का अपवर्त्य होगा।

(३) समघात समीकरण का चलस्पर्द्धी भी समघात का होगा। क्योंकि न के सम होने से चलस्पर्द्धी का घात

म=न सेा—२ध्रु यह भी सम ही होगा।

(४) दो चलस्पर्द्धियों का प्रत्युत्पन्न भी सम ही घात का मुख्य समीकरण के पद गुणकों के रूप में होगा। क्योंकि प्रत्युत्पन्न के घात की संख्या यदि दोनों चलस्पर्द्धियों में सोपान और ध्रुवशक्ति को क्रम से सेा, सेा,' ध्रु, ध्रु' मानेा तेा

सेा (नसेा' — २ध्रु') + सेा'(नसेा—२ध्रु)=२(नसेासेा' — सेाध्रु'—सेा'ध्रु)
यही होगी जो सम है।

उदाहरण।

१। दिखलाओ कि दो समीकरणों का प्रत्युत्पन्न उन दोनों का अचलस्पर्द्धी है। (२१६ प्र० देखेा)

२। यदि स=अय³ + ३अय² + ३खय + ग=० इसमें अव्यक्त मान $अ_1$, $अ_2$, $अ_3$ हों और स'=अ'य² + २क'य + ख'=० इसमें अव्यक्तमान $अ'_1$, $अ'_2$ हों तो

$$(अ_2—अ_3)^2 (अ_1—अ'_1) (अ_1—अ'_2) + (अ_3—अ_1)^2$$
$$(अ_2—अ'_1) (अ_2 — अ'_2) + (अ_1 — अ_2)^2 (अ_3 — अ'_1)$$

$(अ_3—अ'_2)$=फ इसका मान समीकरण के पद गुणकों के फल में ले आवो।

यहां १६८ वें प्रक्रम से

$$—अ^2अ'फ' = ६\{अ'(कग — ख^2) — क'(अग — कख) +$$
$$ख'(अख — क^2)\}$$

२२० वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से दोनों समीकरणों का यही चलस्पर्द्धी होगा।

२२३। $(अ_0, अ_1, अ_2, \cdots अ_न)(य, १)^न = ०$ इसमें अव्यक्त मान $इ_1, इ_2 \cdots इ_न$ हों तो

$$अ_0^{सा} \text{ फा } (इ_1, इ_2, \cdots, इ_न) = \text{फी } (अ_0, अ_1, \cdots अ_न)$$

इसमें $इ_1, इ_2, \cdots इ_न$ के स्थान में $इ_1 - य, इ_2 - य, \cdots$ $इ_न - य$ इत्यादि के उत्थापन देने से १२६ वें प्रक्रम से

$$अ_0^{सा} \text{ फा } (इ_1 - य, इ_2 - य, \cdots, इ_न - य)$$

$$= \text{फी } (स_0, स_1, स_2, \cdots, स_न)$$

चलनकलन के ६८ वें प्रक्रम से और फी में $य^2$ इत्यादि के छोड़ देने से

$$स_0 = अ_0, \quad स_1 = अ_1 + अ_0 य, \quad स_2 = अ_2 + २अ_1 य, \cdots$$

$स_न = अ_न + नअ_{न-1}य$ ऐसा मानने से $\frac{ता \text{ फा}}{ता \text{ } इ_1} + \frac{ता \text{ फा}}{ता \text{ } इ_1} + \frac{ता \text{ फा}}{ता \text{ } इ_2} +$

$$\cdots + \frac{ता \text{ फा}}{ता \text{ } इ_न} = \left(\frac{ता}{ता \text{ } इ_1} + \frac{ता}{ता \text{ } इ_2} + \cdots + \frac{ता}{ता \text{ } इ_न}\right) \text{फा}$$

इस सङ्केत से प्रकाश करने से और $\frac{ता}{ता \text{ } इ_1} + \frac{ता}{ता \text{ } इ_2} + \cdots$

$+ \frac{ता}{ता \text{ } इ_न} = -$वि मान लेने से और

$$अ_0 \frac{ता \text{ फी}}{ता \text{ } अ_1} + २ अ_1 \frac{ता \text{ फी}}{ता \text{ } अ_2} + ३ अ_2 \frac{ता \text{ फी}}{ता \text{ } अ_3} + \cdots +$$

$$न \text{ } अ_{न-1} \frac{ता \text{ फी}}{ता \text{ } अ_न}$$

$$=\left(अ_0 \frac{ता}{ता\, अ_1} + २\, अ_1 \frac{ता}{ता\, अ_2} + \cdots\cdots +\right.$$

$$\left. न\, अ_{न-१} \frac{ता}{ता\, अ_न}\right) फी$$ और

$$अ_0 \frac{ता}{ता\, अ_1} + २\, अ_2 \frac{ता}{ता\, अ_2} + \cdots\cdots\cdots +$$

$$न\, अ_{न-१} \frac{ता}{ता\, अ_न} = वी$$

ऐसा हो तो यदि $फा_0 = फा\,(इ_1, इ_2, इ_3, \ldots\ldots इ_न)$

और $फी_0 = फी\,(अ_0, अ_1, अ_2 \ldots\ldots\ldots अ_न)$

$$तो\, {}^{सो}_{अ_0} \left(फा_0 + य\, वि\, फा_0 + \frac{य^2}{१\cdot२} वि^2 फा_0 + \cdots\cdots\right)$$

$= फी_0 + य\, वी\, फी_0 + \ldots\ \ldots\ldots$ दोनों समीकरणों में य के गुणक मान करने से

$$अ_0^{सो}\ वि\, फा\, (इ_1, इ_2, \ldots\ldots\ इ_न) =$$
$$वी\, फी\, (अ_0, अ_1, अ_2 \ldots\ldots, अ_न)$$

यह समीकरण दिखलाता है कि फा के वि से अव्यक्त मानों के रूप में जो तद्रूप फल होगा वही फी के वी से समीकरण के पदगुणकों के रूप में आवेगा।

फा और फी के स्थान में वि फा और वी फी के लेनेसे ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि $वि^2 फा = वी^2 फी$, इत्यादि उत्पन्न होंगे।

यदि त्रि फा=० तो त्रि²फा इत्यादि भी शून्य होंगे; इसलिये ऐसी स्थिति में

फा ($इ_1$—य, $इ_2$—य, ... $इ_न$—य) इसमें य का नाश हो जायगा, परन्तु य का न रहना तभी सम्भव है जब कि फा ($इ_1$, $इ_2$, $इ_3$, ... $इ_न$) यह अव्यक्तमानों के अन्तर का फल हो। इस पर से सिद्ध होता है कि यदि $अ_0^{सा}$ फा$_0$=वी फी$_0$=० वा $अ_0^{सा}$ वी फी=० तो कहेंगे कि अव्यक्तमानों के उत्तर का फल यह फा है। जैसे

उदाहरण

१। अव्यक्तमानों के अन्तर के उस फल का मान बताओ जिसमें सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तीन हैं।

मान लो कि वह फल =फ=आ $अ_0^2अ_3$ + का $अ_0अ_1अ_2$ + खा $अ_1^3$ (२६६ प्र० देखो।

तो वी फ=(३आ+का) $अ_0^2अ_2$ + (२का+३खा) $अ_1^2अ_0$=०

इसलिये ३आ+का=०। २का+३खा=०।

यदि मान लो कि अ=१ तो का=—३, खा=२। इनके उत्थापन से

फ=$अ_0^2अ_3$—३ $अ_0अ_1अ_2$ + २ $अ_1^3$।

यदि $अ_0य^3$ + ३$अ_1य^2$ + ३$अ_2य$ + $अ_3$=० ....(१)

इस पर से ३८ वें प्रक्रम की युक्ति से एक ऐसा नया समी·

करण बनाओ जिसमे दूसरा पद न रहे तो वह समीकरण

$$र^3 + \frac{3}{अ_1^2}(अ_0 अ_2 - अ_1^2) र + \frac{1}{अ_0^2}(अ_0^2 अ_3 - 3 अ_0 अ_1 अ_2$$
$$+ 2 अ_1^3) \dots \dots \dots (2)$$

ऐसा होगा। इसमें यदि

$अ_0 अ_2 - अ_1^2 =$ हा और $अ_0^2 अ_3 - 3 अ_0 अ_1 अ_2 + 2 अ_1^3 =$ गा

तो ऊपर जो फल आया है वह गा के तुल्य ही है। ऊपर के घन समीकरण में यदि $अ_0 र = ल$ तो $र = \frac{ल}{अ_0}$, इसके उत्थापन से

$$\frac{ल}{अ_0^3} + \frac{3}{अ_0^3} हाल + \frac{गा}{अ_0^3} = \text{ वा } ल^3 + 3 हाल + गा = 0 \dots (3)$$

हा और गा ये घन समीकरणों में बड़े उपयोगी हैं।

२२४। २·१ वें प्रक्रम से $स_न$ का चलस्पर्द्धी फी ($स_न, स_{न-1} \dots \dots \dots स_0$) यह है जिसे यदि फी कहें और जब य=0 तब फी को फी$_0$=फी ($अ_न, अ_{न-1}, \dots \dots अ_0$) कहें और ऊपर के प्रक्रम का सङ्केत वी ग्रहण करें जिसका नाम कारक कहो तो चलनकलन से और वी कारक से

$$फी = फी_0 + य\, वी\, फी_0 + \frac{य^2}{2!} वी^2 फी_0 + \dots + \frac{य}{वी_न} फ_0$$
$$+ \dots \dots \dots$$

यहां फी$_0$ का वार वार वी लेने से मान बदलता बदलता जब फी ($अ_0, अ_1, \dots \dots, अ_न$) ऐसा होगा तब यह अव्यक्त

के मानों का अन्तर होगा। ८२३ वें प्रक्रम की युक्ति से फिर आगे इसका वी शून्यके तुल्य होगा और फी के श्रेढी रूप मान में आगे के सब पद उड़ जायँगे। इसका मान $\text{फा}(\text{इ}_1, \text{इ}_2, \ldots\ldots \text{इ})$ के वि कारक से जान सकते हैं। जैसे

उदाहरण

१। $\text{अ}_0\text{य}^3 + 3\text{अ}_1\text{य}^2 + 3\text{अ}_2\text{य} + \text{अ}_3 = 0$ इसमें यदि $\text{अ}_0\text{अ}_2 - \text{अ}_1^2 = \text{हा}$ और १२० वें प्रक्रम के उदाहरण को लेने से

$$\text{अ}_0^2 \text{यौ}\,\text{इ}_1^2 (\text{इ}_2 - \text{इ}_3)^2 = 18 (\text{अ}_2^2 - \text{अ}_1 \text{अ}_3)$$

तो यहां $\text{फि}_0 = \text{अ}_0^2\ \text{यौ}\ \text{इ}_1^2\ (\text{इ}_2 - \text{इ}_3)^2 = \text{फी}_0$

$$= 18 (\text{अ}_2^2 - \text{अ}_1\text{अ}_3) = \text{फी}_0$$

बायें पक्ष का वि और दहिने पक्ष का वी लेने से

$$-\text{अ}_0^2\ \text{यौ}\ 2\,\text{इ}_1 (\text{इ}_2 - \text{इ}_3)^2 = 18 (\text{अ}_1\text{अ}_2 - \text{अ}_0\text{अ}_3) = \text{वी}\,\text{फी}_0$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से

$$(\text{अ}_0^2 \text{यौ}\ 1\ (\text{इ}_2 - \text{इ}_3)^2 = 36 (\text{अ}_1^2 - \text{अ}_0\text{अ}_2) = \text{वी}^2\text{फी}_0$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से दोनों पक्ष शून्य के तुल्य होंगे। इनका उत्थापन फी में देने से और -18 का भाग दे देने से

$$(\text{अ}_1\text{अ}_3 - \text{अ}_2^2) + (\text{अ}_0\text{अ}_3 - \text{अ}_1\text{अ}_2)\text{य} + (\text{अ}_0\text{अ}_2 - \text{अ}_1^2)\text{य}^2$$

यह चलसपर्द्धी का रूप हुआ जो कि १२० वें प्रक्रम के उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। देखो ऊपर के चलसपर्द्धी के य^2 का गुणक हा है और हा का वी शून्य होता है; इसलिये हा को

प्रधान गुणक कहते हैं। इसी प्रधान हा से फी ($अ_0, अ_1, \ldots\ldots$ $अ_न$) यह बना है। इसी में $अ_0$, $अ_1 \ldots\ldots$ इत्यादि के स्थान में इनके स्पर्द्धी $अ_न$, $अ_{न-1} \ldots\ldots$ इत्यादि के उत्थापन से फी$_\circ$ बनता है। फिर फी में $अ_न$, $अ_{न-1} \ldots\ldots$ इत्यादि के स्थान में $स_न$, $स_{न-1}$, ...इत्यादि के उत्थापन से चलस्पर्द्धी का रूप होता है।

२। $अ_0 य^4 + 4 अ_1 य^3 + 6 अ_2 य^2 + 4 अ_3 य + अ_4 = 0$ इस चतुर्घात समीकरण का वह चलस्पर्द्धी बनाओ जिसमें प्रधान गुणक हा हो।

$हा = अ_0 अ_2 - अ_1^2$, और चलस्पर्द्धी चतुर्घात का समीकरण होगा। क्योंकि यहा सो=२ और घु=२; इसलिये २२२ वें प्रकम से $स = न\ सो - 2\ घु = 4 \times 2 - 2 \times 2 = 4$।

$अ_0, अ_2, अ_1$ इनके स्थान में इनके स्पर्द्धी $अ_4, अ_2, अ_3$ के उत्थापन से

$$फी_\circ = अ_4 अ_2 - अ_3^2$$

$$वी\ फी_\circ = 2 अ_1 अ_4 - 6 अ_2 अ_3 + 4 अ_3 अ_2 = 2 (अ_1 अ_4 - अ_2 अ_3)$$

$$वी^2 फी_\circ = 2 (अ_0 अ_4 - 2 अ_1 अ_3 - 3 अ_2^2 + 4 अ_3 अ_1)$$
$$= 2 (अ_0 अ_4 + 2 अ_1 अ_3 - 3 अ_2^2)$$

$$वी^3 फी = 2 (4 अ_0 अ_3 + 2 अ_0 अ_3 - 12 अ_1 अ_2 + 6 अ_1 अ_2)$$
$$= 4 (3 अ_0 अ_3 - 3 अ_1 अ_2) = 12 (अ_0 अ_3 - अ_1 अ_2)$$

$$वी^{४} फी_{०} = १२(३ अ_{०}अ_{२} - २ अ_{१}^{२} - अ_{०}अ_{२})$$
$$= २४ (अ_{०}अ_{२} - अ_{१}^{२})$$

इनके उत्थापन से चलस्पर्द्धी

$$(अ_{०}अ_{२} - अ_{१}^{२}) य^{४} + २(अ_{०}अ_{३} - अ_{१}अ_{२}) य^{३} + (अ_{०}अ_{४} + २ अ_{१}अ_{३} - ३ अ_{२}^{२}) य^{२}$$

$$+ २ (अ_{१}अ_{४} - अ_{२}अ_{३}) य + (अ_{२}अ_{४} - अ_{३}^{२}) = हा$$

२२५। कल्पना करो कि $(अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}, \ldots, अ_{न})\ (य, र)^{न}$ के दो चलस्पर्द्धी

$(का_{१}, का_{१}, का_{२} \ldots, का\ )\ (य, र)^{प} \equiv का_{०}\ (य - क_{१}र)\ (य - क_{२}र) \ldots\ldots य - क\ \ र)$

और $(खा_{०}, खा_{१}, खा_{२}, \ldots, खा_{न})\ (य, र) \equiv खा_{०}\ (य - ख_{१}\ र)\ (य - ख_{२}\ र) \ldots (य - ख\ \ र)$ है तो

$$का_{०}क_{१}\ र + पका_{१}क_{१}^{प-१}र = + \frac{प(प-१)}{२!} का_{२}\ क_{१}^{प-२}र^{प} + \ldots\ldots + का_{प}र^{प} = ०$$

र का भाग दे देने से

$$का_{०}\ क_{त} + प\ का_{१}\ क_{त}^{प-१} + \frac{प(प-१)}{२!} का_{२}क_{त}^{प-२} + \ldots\ldots + का = ० \ldots\ldots\ldots (१)$$

२२३ वें प्रक्रम की युक्ति से $का_{०}, का_{१}, \ldots, का_{प}$ को मुख्य समीकरण$(अ_{०}, अ_{१}, \cdot अ\ )(य, न)$ के अव्यक्त मानों के फल

होने से $वि का_0 = 0$, $प वि का_1 = प का_0$, $\frac{प(प-१)}{२!} वि का_2 = प का_1 (प-१)$

इसलिये

$$वि \left\{ का_0 क_त + प का_1 क_त^{प-१} + \frac{प(प-१)}{२!} का_2 क_त^{प-२} + \ldots\ldots + का_प \right\}$$

$$= प का_0 क_त^{प-१} वि क_त + प का_0 क_त^{प-१} +$$
$$प(प-१) का_1 क_त^{प-२} वि क_त + प(प-१) का_1 क_त^{प-२} + \ldots\ldots$$
$$= प का_0 क_त^{प-१} (१ + वि क_त) + \{प(प-१) का_1 क_त^{प-२}\} (१ + वि क_त) + \ldots\ldots$$

$$प \left\{ का_0 क_त^{प-१} + (प-१) का_1 क_त^{प-२} + \frac{(प-१)(प-२)}{२!} \times का_2 क_त^{प-३} + \ldots\ldots + का_{प-१} \right\} (१ + वि क_त) = 0$$

इसलिये $वि क_त + १ = 0 \quad \therefore \quad वि क_त = -१$

इसी प्रकार $वि ख_थ + १ = 0 \quad वि ख_थ = -१$

$$\therefore वि (क_त - ख_थ) = 0$$

परन्तु $क_त - ख_थ$ का वि तभी शून्य होगा जब $क_त - ख_थ$ यह मुख्य समीकरण के मानों के अन्तर का फल होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि

दो चलरपद्धियोंआकेक्‍व्य मानों के अन्तर का फल

मुख्य समीकरण के अव्यक्त मानों के अन्तरों का फल होगा।

२२६। वर्णान्तर के उत्थापन से $स_न$ का मान जो $स'_न$ होता है उसका अचलस्पर्द्धी $स_न$ के अचलस्पर्द्धी को $\begin{vmatrix} द & त \\ द' & त' \end{vmatrix}$ इस कनिष्ठफल के भु घात से गुण देने से होता है।

कल्पना करो कि $स_न$ के $य=\frac{दय'+त}{द'य'+त'}$, ऐसा मान कर समीकरण का रूपान्तर किया और $स_न$ का अचलस्पर्द्धी

$$आ=अ_0^{सो} गौ (इ_1-इ_2)^{अ}(इ_2-इ_3)^{क}\ldots\ldots(इ_1-अ_न)^{ट}$$

जहां प्रत्येक अव्यक्त मान के सो तुल्य परमघात आए हैं। तो रूपान्तर किए हुए समीकरण को $से'_न$ कहो तो इसमें किसी दो अव्यक्त $इ'_थ$ और $इ'_ध$ के मान ऊपर के य मान से जो

$$य'=\frac{त'य-त}{द-द'य}$$ यह सिद्ध होता है उसमे उत्थापन देने से

$$इ'_थ=\frac{त'इ_थ-त}{द-द'इ_थ},\ इ'_ध=\frac{त'इ_ध-त}{द-द'इ_ध}$$

$$\therefore इ'_थ-इ'_ध=\frac{(दत'-द'त)(इ_थ-इ_ध)}{(द-द'इ_थ)(द-द'इ_ध)}$$

और $स'_न=अ'_0(य'-इ'_1)(य'-इ'_2)\ldots\ldots(य'-इ'_न)$
(यदि अभिन्न में रूप बनाओ तो)

जहां $अ'_0=अ_0(द-द'इ_1)(द-द'इ_2)\cdots\cdots(द-द'इ_न)$

अब यदि $इ'_{य} - इ'_{ध}$ इसमे थ और ध के स्थान में १,२, २,३ इत्यादि के उत्थापन से $स'_{न}$ का अचलस्पर्द्धी आ' बनाओ और $अ_{०}$ के स्थान में $अ'_{०}$ का उत्थापन दो तो हर के उड़ जाने से

$$आ' = (दत' - द'त)^{भु} आ \text{ ....} (१)$$

ऐसा होगा।

इसी प्रकार यदि स का चलस्पर्द्धी

$$फी (य) = \frac{अ_{०}^{सो} यौ (इ_{१} - इ_{२})^{अ} (इ_{२} - इ_{३})^{क} \ldots\ldots\ldots}{(य - इ_{१})^{प} (य - इ_{१})^{व}}$$

जो कि फी (य) के आधार अव्यक्त मानोंके फल फीमें $इ_{१}$, $इ_{२}$, . . $इ_{न}$ इत्यादि के स्थान में $- य + इ_{१}$, $- य + इ_{२}$, ... $- य + इ_{न}$ के उत्थापन से उत्पन्न हुआ है। (२२१ वाँ प्र० देखो)

तो स' का चलस्पर्द्धी $= (दत' - द'त)^{भु}$ फी (य) होगा। क्योंकि ऊपर की युक्ति से जब फी (य) के आधार फल फि में $इ'_{१}$, $इ'_{२}$,......इत्यादि का उत्थापन दोगे तो हर में

$(द - द'इ_{१})(द - द'इ_{२}) \ldots\ldots (द - द'इ_{न})$ इसका तो घात रहेगा जो $अ'^{सो}_{०}$ इस गुणक के कारण नाश हो जाएगा। केवल गुणक $अ^{मो}_{०}$ यह रह जायगा और $(दत' - द'त)$ का भु घात गुणक होगा। २२४ वें प्रकम में $फी_{०}$ के मी से जो चलस्पर्द्धी आया है उस से भी यही सिद्ध होता है।

२२७। यदि

$$स_न = अ_0 य^न + न अ_1 य^{न-१} र + \frac{न(न-१)}{२!} अ_2 य^{न-२} र^२ + \cdots\cdots$$
$$+ अ_न र^न$$

ऐसा ध्रुवशक्तिक फल हो तो

$\frac{दय' + त}{द'य' + त'} = य$ इसके स्थान से $स_न$ को अभिन्न करने के लिये

$\frac{य}{र} = \frac{दय' + तर'}{द'य' + त'र'} = ल = \frac{दल' - त}{द'ल' + त'}$ ऐसा मानना चाहिए

जहाँ $य = दय' + तर'$ और $र = द'य' + त'र'$ और

$$स_न = र^न (अ_0 ल^न + न अ_1 ल^{न-२} + \ldots\ldots + अ_न)$$

$$= (द'य' + त'र')^न \left\{ \frac{अ_0 (दय' + तर')^न}{(द'य' + त'र')^न} + \frac{न अ_1 (दय' + तर')^{न-१}}{(द'य' - त'र')^{न-१}} \right.$$

$$= अ_0 (दय' + तर')^न + न अ_1 (दय' + तर')^{न-१} (द'य' + त'र') + \cdots\cdots$$

इस पर से कह सकते हो कि एक अव्यक्त के फलों को दो वर्णान्तरों के ध्रुवशक्तिक फलों के रूप में बदल सकते हैं।

अर्थात् यदि $स = अ_0 य \times न अ_1 य^{न-१} र + \cdots\cdots + र$ इसका अचलस्पर्शी आ हो और $य = \frac{दय' + तर'}{द'घ' + त'र'}$ ऐसा मान कर उत्थापन से $स'$ का अचलस्पर्शी आ' बनाओ तो

$आ' = (दत' - द'त)^{ध्रु}$ आ इसमें त और त' के स्थान में त र और त'र के उत्थापन से

$आ' = (द त' - द' त)^{अ' भ} र^{' भ} आ$ ऐसा होगा।

$स_न = र^न (अ_० ल^न + न अ_१ ल^{न-१} + \cdots + अ_न) = ०$

तो $र^न$ के अपवर्त्तन से $अ_० ल^न + न अ_१ ल^{न-१} + \cdots + अ_न = ०$ इसमें ल के वे ही मान होंगे जो $अ_० य^न + न अ_१ य^{न-१} + \cdots + अ_न = ०$ इसमें होंगे ; इसलिये

$(अ_०, अ_१, \cdots, अ_न)(य, १)^न$ इसका जो अचलस्पर्द्धी होगा वही $(अ_०, अ_१, \cdots, अ_न)(ल, १)^न$ इसका अचलस्पर्द्धी होगा।

$(अ_०, अ_१, अ_२, \cdots, अ_न)(य, १)^न$ इसके $इ_१, इ_२, इ_३, \cdots इ_न$ के मानों के र गुणित तुल्य मान $(अ_०, अ_१, \cdots अ_न)(य, र)^न$ इसके होंगे। इसलिये इसका अचलस्पर्द्धी पहिले अचलस्पर्द्धी को $र^{भु}$ इससे गुण देने से होगा।

$अ_० ल^न + न अ_१ ल^{न-१} + \cdots + अ_न = ०$ इसमें $ल = \frac{य}{र}$ के स्थान में $\frac{द य' + त र'}{द' य' + त' र'}$ अर्थात् य के स्थान में $द य' + त र'$ का और र के स्थान में $द' य' + त' र'$ का उत्थापन देने से इस नये समीकरण का अचलस्पर्द्धी $= (द त' - द' त)^{अ भ} र^{भ} आ$ जहाँ $अ_० ल^न + न अ_१ ल^{न-१} + \cdots + अ_न$ का अचलस्पर्द्धी आ है। इससे नीचे लिखी बातें सिद्ध होती हैं :—

(१) किसी बहुपद अव्यक्तराशि का अचलस्पर्द्धी पदों के गुणकों का ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं को व्यक्तांक गुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दें तो नये समीकरण के पद गुणकों का वैसा ही फल, पहिले फल को $द त' - द' त$ इसके

एक कोई घात ध्रु से गुण देने से जो गुणनफल होगा उसके तुल्य होगा।

(२) चलस्पर्द्धी बहुपद अव्यक्तराशि के पदों के गुणकों का और अव्यक्तों का एक ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं के स्थान में व्यक्ताङ्कगुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दें तो इसमें उसी फल के ऐसा पद गुणकों का और नये अव्यक्त राशिओं का जो फल हो वह पूर्वफल को दत′ − द′त के ध्रु घात से गुण देने से जो हो उसके तुल्य होगा।

दत′ − द′त इसे समीकरणों के परिपर्त्तन का मध्यस्थ कहते हैं।

उदाहरण

१। यदि य = दया + तरा, र = द$_१$या + त$_१$रा और अय^२ + २कयर + खर^२ = आया^{२} + २कायारा + खारा^{२} तो पहिले का अचलस्पर्द्धी अख − क^२ यह होगा, क्योंकि २२२वें प्रक्रम के पहिले उदाहरण में यही हा है और हा का वी शून्य होता है। इसलिये ऊपर (१) नियम से ध्रुवशक्ति दो होने से आखा − का^{२} = (दत$_१$ − द$_१$त)^२(अख − क^२) ऐसा होगा।

२। (अ,क,ख,ग,घ) (य,र)^४ = (आ,का,खा,गा,घा) (या,रा)^४

जहां य = दया + तरा, र = द′या + त′रा।

यहां २१० प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से पहिले का अचलस्पर्द्धी अघ − ४कग + ३ख^२ यह है और ध्रु = ४ और मध्यस्थ = (दत$_१$ − द$_१$त),

इसलिये आघा − ४कागा + ३खा^{२} = (दत$_१$ − द$_१$त)^४
× (अघ − ४कग + ३ख^२)

३। दूसरे उदाहरण में २२० प्रक्रम के तीसरे उदाहरण से $अखघ + २कखग - अग^२ - क^२घ - ख^३$ यह भी पहिले का अचलस्पर्द्धी है जहां $भु = ६$; इसलिये

$$आखाघा + २काखागा - आगा^२ - का^२घा - खा^३$$
$$= (दत_१ - द_१न)^६ (अखघ + २कखग - अग^२ - क^२घ - ख^३)$$

४। ऊपर ही के रूपान्तर से यदि

$$अय^२ + २कयर + खर^२ = आया^२ + २कायारा + खारा^२ \cdots\cdots\cdots (१)$$
$$अ_१य^२ + २क_१यर + ख_१र^२ = आ_१या^२ + २का_१यारा + खा_१रा^२ \cdots\cdots (२)$$

तो (१) में इ गुणित (२) को जोड़ देने से

$$(अ + इअ_१)य^२ + २(क + इक_१)यर + (ख + इख_१)र^२$$
$$= (आ + इआ_१)या^२ + २(का + इका_१)यारा + (खा + इखा_१)रा^२$$

(१) उदाहरण से

$$\{दन_१ - द_१त\}^२ \{(अ + इअ_१)(ख + इख_१) - (क + इक_१)^२\}$$
$$= (आ + इआ_१)(खा + इखा_१) - (का + इका_१)^२$$

दोनों पक्षों में इ के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$आखा_१ + आ_१खा - २काका_१ = (दन_१ - द_१त)^२ \times (अख_१ + अ_१ख - २कक_१)$$

और $आ_१खा_१ - का_१^२ = (दत_१ - द_१त)^२(अ_१ख_१ - क_१^२)$ जो कि प्रथम उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है।

५। $अय^२ + कर^२ + खल^२ + २फरल + २गयल + २हयर$ इस ध्रुवकिक समीकरण में $य = द_१या + त_१रा + थ_१ला$, $र = द_२या +$

$\text{त}_2\text{रा}+\text{थ}_2\text{ला}$ और $\text{ल}=\text{द}_3\text{या}+\text{त}_3\text{रा}+\text{थ}_3\text{ला}$ ऐसे मानों से समीकरण को बदलने से यदि समीकरण का रूपान्तर $\text{आया}^2+\text{कारा}^2+\text{खाला}^2+\text{२फाराला}+\text{२गायाला}+\text{२हायारा}$ ऐसा हो तो सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{द}_1 & \text{द}_2 & \text{द}_3 \\ \text{त}_1 & \text{त}_2 & \text{त}_3 \\ \text{थ}_1 & \text{थ}_2 & \text{थ}_3 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{आ} & \text{हा} & \text{गा} \\ \text{हा} & \text{का} & \text{फा} \\ \text{गा} & \text{फा} & \text{खा} \end{vmatrix}$$

पहिले समीकरण में अव्यक्त के नये मानों का उत्थापन देकर गुणकों का परस्पर सम्बन्ध जान कर ऊपर के कनिष्ठ-फलों की समता सहज में जान सकते हो। इससे यह भी जान पड़ता है कि दिए हुए तीन अव्यक्त सम्बन्धी समीकरणों का

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix}$$ यह अचलस्पर्द्धी है।

२२८—यदि $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न})(\text{य},\text{र})^\text{न} = \text{स}_\text{न}$ इसमें $\text{य}=\text{या}+\text{चरा}$, $\text{र}=0\text{या}+\text{रा}$ तो $\text{स}_\text{न}$ का रूपान्तर $(\text{आ}_0, \text{आ}_1, \text{आ}_2, \ldots\ldots, \text{आ}_\text{न})(\text{या},\text{रा})^\text{न}$ ऐसा होगा जहां १२६वें प्रक्रम से $\text{आ}_0=\text{अ}_0$, $\text{आ}_1=\text{अ}_1+\text{अ}_0\text{च}$, $\text{आ}_2=\text{अ}_2+\text{२अ}_1\text{च}+\text{अ}_0\text{च}^2$; इत्यादि।

अब यदि $\text{स}_\text{न}$ का चलस्पर्द्धी $\text{फी}(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots \text{अ}_\text{न}, \text{य},\text{र})$ यह हो तो १२६वें प्रक्रम के (२) नियम से मध्यस्थ $\text{दत}'-\text{द}'\text{त}$ के १ के तुल्य होने से

$$\text{फी}(\text{अ}_0,\text{अ}_1,\text{अ}_2,\ldots\ldots\text{अ}_\text{न},\text{य},\text{र})$$
$$=\text{फी}(\text{आ}_0,\text{आ}_1,\text{आ}_2,\ldots\ldots\text{आ}_\text{न},\text{या},\text{रा})$$
$$=\text{फी}(\text{आ}_0,\text{आ}_1,\text{आ}_2,\ldots\ldots\text{आ}_\text{न},\text{य}-\text{चर},\text{र})$$

दहिने पक्ष का रूप चलनकलन के ६८वें प्रक्रम से च के घात वृद्धि में ले आने से

$$\text{फी} = \text{फी} + \text{च}\left(\text{वीफी} - \text{र}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताया}} + \text{हा}_2\text{च}^2 + \text{हा}_3\text{च}^3 + \ldots\ldots\right.$$

जहां $\text{हा}_2, \text{हा}_3$, इत्यादि $\text{च}^2, \text{च}^3$ इत्यादि के गुणक हैं।

च के किसी मान में यह समीकरण ठीक होगा। इसलिये फी को दोनों पक्षों मे घटाकर च का भाग देकर लब्धि में च को शून्य मानने से $\text{वीफी} - \text{र}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताय}} = 0$

$$\therefore \text{र}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताय}} = \text{वीफी} = \text{अ}_0\frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_1} + 2\text{अ}_1\frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_2} + 3\text{अ}_2\frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_3}$$

$$+ \ldots\ldots + \text{नअ}_{\text{न}-1}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_\text{न}} \ldots\ldots (1)$$

यदि फी को $(\text{का}_0, \text{का}_1, \text{का}_2, \text{का}_3, \ldots\ldots \text{का}_\text{म})(\text{य}, \text{र})^\text{म}$ ऐसा कल्पना करें तो

$$\text{र}\frac{\text{ताफी}}{\text{ताय}} = \text{मका}_0\text{य}^{\text{म}-1}\text{र} + \text{म}(\text{म}-1)\text{का}_1\text{य}^{\text{म}-2}\text{र}^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \text{मका}_{\text{म}-1}\text{र}^\text{म}$$

$$= \text{वीफी} = \text{वीका}_0\text{य}^\text{म} + \text{मवीका}_1\text{य}^{\text{म}-1}\text{र} + \ldots\ldots + \text{वीका}_\text{म}\text{र}^\text{म}$$

य के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$\text{वीका}_0 = 0, \text{वीका}_1 = \text{का}_0, \text{वीका}_2 = 2\text{का}_1, \ldots\ldots, \text{वीका}_\text{म} = \text{मका}_{\text{म}-1}$$

यही बात २२४वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुई है।

यदि ऊपर के $स_न$ के मान में $य = ०या + रा, र = या + ०रा$ ऐसा मानें तो यहां मध्यस्थ -१ होगा और $(अ_०, अ_१, \cdots अ_न)$ $(य,र)^न = (अ_न, अ_{न-१}, \ldots\ldots, अ_०)(या, रा)_न$ और तब $स_न$ का चलस्पर्द्धी

$$(-१)^{भु} फी(अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots अ_न, य, र)$$

$$= फी(अ_न, अ_{न-१}, \ldots\ldots, अ_०, या, रा)$$

$$= (-१)^{भु} फी(अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots, अ_न, रा, या)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि

चलस्पर्द्धी के आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक, संख्या में समान होंगे (यदि $भु$ विषम होगा तो विरुद्ध चिन्ह के होंगे) ।

यदि किसी एक मान में $अ_०, अ_१$ इत्यादि के स्थान में उनके स्पर्द्धी $अ_न, अ_{न-१}$ इत्यादि रख दिए जांय । र के स्थान में य और य के स्थान में र को रख देने से और $अ_०, अ_१, \ldots$ इत्यादि के स्थान में $अ_न, अ_{न-१}$ इत्यादि के ग्रहण करने से (१) समीकरण से

$$य \frac{ताफी}{तार} = अ_न \frac{ताफी}{ताअ_{न-१}} + २अ_{न-१} \frac{ताफी}{ताअ_{न-२}} + ३अ_{न-२} \frac{ताफी}{ताअ_{न-३}}$$

$$+ \ldots\ldots + नअ_१ \frac{ताफी}{ताअ_०}$$

यदि $स_न$ का फी$(अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots, अ_न)$ यह अचलस्पर्द्धी हो तो ऊपर जो य और र के परिवर्त्तन से नया $स_न = स'_न$ ऐसा बनेगा, उसको अचलस्पर्द्धी, मध्यस्थ का मान एक होने से

२२५ प्रक्रम के (१) समीकरण से $स'_न$ और $स_न$ के अचल-स्पर्द्धिओं में

$$फी(आ_०, आ_१, आ_२, \cdots आ_न) = फी(अ_०, अ_१, अ_२, अ_३ \cdots अ_न)$$

ऐसा समीकरण बनेगा।

और ऊपर के (१) समीकरण से अब

$$अ_० \frac{ताफी}{ताअ_१} + २अ_१ \frac{ताफी}{ताअ_२} + ३अ_२ \frac{ताफी}{ताअ_३} + \cdots\cdots + नअ_{न-१} \frac{ताफी}{ताअ_न} = ०$$

$$अ_न \frac{ताफी}{ताअ_{न-१}} + २अ_{न-१} \frac{ताफी}{ताअ_{न-२}} + ३अ_{न-२} \frac{ताफी}{ताअ_{न-३}} + \cdots + नअ_१ \frac{ताफी}{ताअ_०} = ०$$

और $स_न$ में यदि य=रा, र=या तो मध्यस्थ का मान −१ होगा; इसलिये तब दोनों के अचलस्पर्द्धिओं में

$$फी(अ_न, अ_{न-१}, \cdots, अ_०) = (-१)^{ध्रु} फी(अ_०, अ_१, अ_२, \cdots, अ_न)$$

इससे सिद्ध होता है कि

$अ_०, अ_१, अ_२ \cdots\cdots$ इत्यादि के स्थान में यदि $अ_न$, $अ_{न-१}$, $अ_{न-२}$ इत्यादि का उत्थापन दें तब जो $स'_न$ होगा उसका अचलस्पर्द्धी $स_न$ के अचलस्पर्द्धी के समान ही होता है। जब ध्रु विषम होता है तब केवल दोनों, संख्या में तुल्य, विरुद्ध चिन्ह के होंगे।

२२९—इस प्रक्रम में चलस्पर्द्धी और अचलस्पर्द्धिओं के विषय में जो कुछ लिख आए हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखलाते हैं।

उदाहरण

१। $स_२ = अ_० य^२ + २अ_१ य + अ_२ = ०$ इसमें अव्यक्त मान $इ_१, इ_२$ हों तो सिद्ध करो कि किसी वर्ग समीकरण में एक ही प्रधान अचलस्पर्द्धी होता है और चलस्पर्द्धी उस वर्ग समीकरण को छोड़ कर और कोई नहीं होता।

यहां $स_२ = अ_०(य - इ_१)(य - इ_२)$

और $इ_१ - इ_२ = २\sqrt{\dfrac{अ^२_१ - अ_२ अ_०}{अ^२_०}}$

इसलिये यहां अचलस्पर्द्धी वा चलस्पर्द्धी $(इ_१ - इ_२)^{२प}$ इस रूप से होगा क्योंकि अव्यक्त के मानान्तर का विषम घात समीकरण के पद गुणकों का अकरणीगत फल नहीं होता। इसलिये $(इ_१ - इ_२)^{२प}$ इसमें $इ_१, इ_२$ के स्थान में $इ_१ - य, इ_२ - य$ के उत्थापन से और भिन्न को दूर करने के लिये $स^{प}_२$ से गुण देने से स्पर्द्धी का रूप $स^{प}_२\left(\dfrac{१}{इ_१ - य} - \dfrac{१}{इ_२ - य}\right)^{२प}$

$$= \frac{अ^{२प}_०(इ_२ - इ_१)^{२प}}{(इ_१ - य)^{२प}(इ_२ - य)^{२प}} (इ_१ - य)^{२प}(इ_२ - य)^{२प}$$

$$= अ^{२प}_०(इ_२ - इ_१)^{२प} = २^{२प} अ^{२प}_० (अ^२_१ - अ_२ अ_०)^{प}$$

स्थिर गुणकों को हटा देने से अचलस्पर्द्धी $अ_0 अ_2 - अ^2_1$ यह होगा।

इसके घात प के तुल्य जो ऊपर अचलस्पर्द्धी है वह इसी से बना है। इसलिये प्रधान अचलस्पर्द्धी $अ_0 अ_2 - अ^2_1$ यही होगा और यदि $फी_0 = अ_0$ तो २२३वें प्रक्रम से $फी_0 = अ_2$, $बीफी_0 = २अ_1$, $बी^2फी_0 = २अ_0$। इसलिये $स_2$ का चलस्पर्द्धी $फी = फी_0 + य\, बी\, फी_0 + \frac{य^2}{१ \cdot २} बी^2 फी_0 = अ_2 + २अ_1 य + अ_0 य^2$, यह $स_2$ ही है।

२। घन समीकरण में चलस्पर्द्धिओं के रूपों को बताओ, जहां $स_3 = अ_0 य^3 + ३अ_1 य^2 + ३अ_0 य + अ_3 = 0$ और अव्यक्त मान $इ_1, इ_2, इ_3$ हैं।

यहां अव्यक्त के कोई दो मान $इ_1$ और $इ_2$ के अन्तर $इ_1 - इ_2$ में $\frac{१}{इ_1 - य}$, $\frac{१}{इ_2 - य}$ इनके उत्थापन से

$$\frac{१}{इ_1 - य} - \frac{१}{इ_2 - य} = \frac{इ_2 - इ_1}{(य - इ_1)(य - इ_2)}$$

$$= \frac{-(इ_2 इ_3 + इ_1 य) + (इ_1 इ_3 + इ_2 य)}{(य - इ_1)(य - इ_2)(य - इ_3)}$$

भिन्न को हटाने के लिये $स_3$ से गुण देने से

$अ_0 \{-(इ_2 इ_3 + इ_1 य) + (इ_1 इ_3 + इ_2 य)\}$ ऐसा होगा। यहां बृहत्कोष्ठकान्तर्गत जो राशि है वह देखो $इ_1 - इ_2$ इसमें

$-इ_1$, और $इ_2$ के स्थान में $इ_2इ_3 + इ_1य$ और $इ_1इ_3 + इ_2य$ के उत्थापन से बनी है। इसी प्रकार $इ_2 - इ_3$ इसमें भी $-इ_3$ के स्थान में $इ_1इ_2 + इ_3य$ और $इ_2$ के स्थान में ऊपर जो लिख आए हैं उनके उत्थापन से तत्सम्बन्धी ऊपर का फल बन जायगा। इसलिये घन समीकरण के चलस्पर्द्धिओं के लिये $-इ_1, -इ_2$ और $-इ_3$ इनके स्थान में ऊपर की राशिओं का उत्थापन दे सकते हैं।

(१) यदि अव्यक्त मानों के अन्तर का फल हा वा गा हो (२२२ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो) तो सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तुल्य होंगे। और $अ_0^2$ यौ $(इ_1 - इ_2)^2$

$$= २अ_0^2 (इ_1^2 + इ_2^2 + इ_3^2 - इ_1इ_2 - इ_1इ_3 - इ_2इ_3)$$

$$\therefore अ_0^2(इ_1^2 + इ_2^2 + इ_3^2 - इ_1इ_2 - इ_1इ_3 - इ_2इ_3)$$

$$= अ_0^2(इ_1 + घाइ_2 + घा^2इ_3)(इ_1 + घा^2इ_2 + घाइ_3)$$

$$= ९(अ_1^2 - अ_0अ_2)$$

जहां घा, घा^{2}, १ के घनमूल हैं।

चलस्पर्द्धी बनाने के लिये ऊपर लिखे हुए मानों से बदलनेसे

$$स_0^2 \{(इ_1 + घाइ_2 + घा^2इ_3)य + इ_2इ_3 + घाइ_1इ_3 + घा^2इ_1इ_2\}$$

$$\times \{(इ_1 + घा^2इ_2 + घाइ_3)य + इ_2इ_3 + घा^2इ_1इ_3 + घाइ_1इ_2\}$$

$$= ९(स_2^2 - स_3स_1)$$

२२०वें प्रक्रम के उदाहरण से $स_2^2 - स_3स_1$ का रूप बनाने से और

$$इ_1 इ_3 + घा इ_1 इ_3 + घा^2 इ_1 इ_2 = ता_1, इ_1 + घा इ_2 + घा^2 इ_3 = ता$$
$$इ_2 इ_3 + घा^2 इ_1 इ_3 + घा इ_1 इ_2 = मा_1, इ_1 + घा^2 इ_2 + घा इ_3 = मा$$

ऐसा मानने से $हा$ से चलस्पर्द्धी

$$हा_य = (अ_0 अ_2 - अ_1^2) य^2 + (अ_0 अ_3 - अ_1 अ_2) य + (अ_1 अ_3 - अ_2^2)$$

$$= (ताय + ता_1)(माय + मा_1)$$

इस प्रकार $हा_य$ को दो गुण्य गुणक रूप खण्डों में बना सकते हैं।

यदि $स_3$ किसी राशि का पूरा घन हो तो $इ_1 = इ_2 = इ_3$ ऐसा होने से $हा_य$ के प्रत्येक पद के गुणक शून्य होंगे।

(२) यदि २२२ प्रक्रम के $ग$ से चलस्पर्द्धी $गा_य$ बनाओ तो ऊपर ही की युक्ति से

$$अ_0^3 \{(इ_1 + घा इ_2 + घा^2 इ_3)^3 + (इ_1 + घा^2 इ_2 + घा इ_3)^3\}$$
$$= -२७\, अ_0^2 अ_3 + २अ_1^3 - ३अ_0 अ_1 अ_2)$$

इसे बदल देने से

$$अ_0^3 \{(ताय + ता_1)^3 + (माय + मा_1)^3\}$$
$$= -२७\,(स_3^2 स_0 + २स_2^3 - ३स_1 स_2 स_3) = २७ गा_य$$

२२३ प्रक्रम की युक्ति से जिसमें प्रधान गुणक $गा$ हो ऐसा चलस्पर्द्धी बनाओ तो

$$गा_य = (अ_0^2 अ_3 - ३अ_0 अ_1 अ_2 + २अ_1^3) य^3 +$$
$$३\,(अ_0 अ_1 अ_3 + अ_1^2 अ_2 - २अ_0 अ_2^2) य^2$$

$$-(अ_१^२ अ_० - ३अ_१अ_२अ_३ + २अ_२^३)$$
$$-३(अ_३अ_२अ_० + अ_२^२अ_१ - २अ_३अ_१^२)य$$

ऊपर के ता और मा से

$$ता^३ - मा^३ = \sqrt{-२७(इ_२ - इ_३)(इ_३ - इ_१)(इ_१ - इ_२)}$$

ऊपर ही की युक्ति से $इ_१, इ_२, इ_३$ को दूसरे $इ_२इ_३ + इ_१य$ इत्यादि मानों से बदल देने से और मानों के अन्तरों को पद गुणकों के रूप में लाने से

$$(ताय + ता_१)^३ - (माय + मा_१)^३ = २७\frac{स_३\sqrt{गा^२ + ४हा^२}}{अ_०^३}$$

$$= २७\frac{स_३\sqrt{\triangle}}{अ_०^३}, यदि \sqrt{गा^२ + ४हा^२} = अ_०\sqrt{\triangle}$$

(४) अव्यक्त मानों के अन्तरादि वर्गों के घात को पद गुणकों के रूप में ले आने से

$$अ_०^६(इ_२ - इ_३)^२(इ_३ - इ_१)^२(इ_१ - इ_२)^२$$
$$= -२७(गा^२ + ४हा^२) = -२७अ_०^२\triangle$$

इसे ऊपर के उदाहरणों के ऐसा बदल देने से

$$अ_०^६(इ_२ - इ_३)^२(इ_३ - इ_१)^२(इ_१ - इ_२)^२(य - इ_१)^२$$
$$(य - इ_२)^२(य - इ_३)^२ = २७(गा_य^२ + ४हा_य^३)$$

इसलिये $$\triangle स_३^२ = गा_य^२ + ४हा_य^३$$

(५), (२) और (३) उदाहरणों से

$$२अ_०^२(ता_य + ता_१)^२ = २७(स_३\sqrt{\Delta} - गा_य)$$

$$वा \; -२अ_०^२(मा_य + मा_१)^२ = ८७(स_३\sqrt{\Delta} - गा_य)$$

दोनों के योग से स्पष्ट है कि $(स_३\sqrt{\Delta} + गा_य)^{\frac{१}{३}}$

$+(स_३\sqrt{\Delta} - गा_य)^{\frac{१}{३}}$ इससे

$(ता_य + ता_१)^२ - (मा_य + मा_१)^२$ यह अर्थात् $\frac{२७स_३\sqrt{\Delta}}{अ_०^२}$

यह वा $स_३$ यह निःशेष हो जायगा।

३—चतुर्घात समीकरण और इसके चल और अचल स्पर्द्धी।

१२०वें प्रक्रम के (२) उदाहरण में दिखला आए हैं कि चतुर्घात समीकरण का दो अचल स्पर्द्धी क्ष और छ हैं। और २२२ प्रक्रम के हा प्रधान गुणक से २२३वें प्रक्रम में चलस्पर्द्धी $हा_य$ का भी साधन कर चुके हैं। उसी प्रकार यदि गा प्रधान गुणक से चलस्पर्द्धी $गा_य$ बनावें तो

$$गा_य = ३स_१स_२स_३ - स_१^२स_१ - २स_२^३$$

यदि $स_२, स_३$ इत्यादि के मानों का उत्थापन दो तो

$$गा_य = आ_०य^६ + आ_१य^५ + आ_२य^४ + आ_३य^३ + आ_४य^२ + आ_५य + आ_६$$

जहां २२३वें प्रक्रम की क्रिया से

$$आ_३ = -अ_०^२अ_१ + ३अ_०अ_१अ_२ - २अ_१^३,$$

$$अ_४ = -अ_०^२अ_० - २अ_०अ_१अ_१ - ६अ_१^२अ_० + ९अ_०अ_१^२$$

$$आ_४ = -५अ_४अ_३अ_० - १०अ_३^२अ_१ + १५अ_४अ_२अ_१,$$

$$आ_३ = -१०अ_०अ_३^२ + १०अ_१^२अ_४,$$

$$आ_२ = ५अ_०अ_१अ_४ + १०अ_१^२अ_३ - १५अ_०अ_२अ_३,$$

$$आ_१ = अ_०^२अ_४ + २अ_०अ_१अ_३ + ६अ_१^२अ_२ - ९अ_०अ_२^२,$$

$$आ_० = अ_०^२अ_३ - ३अ_०अ_१अ_२ + २अ_१^३ ।$$

यहां $आ_६, आ_५, आ_४, आ_३$ के मान जान लेने पर २२७ प्रक्रम की युक्ति से ध्रुवशक्ति ३ विषम होने से चिन्ह बदल देने से $आ_२, आ_१$ और $आ_०$ के मान बिना गणना किए ही आ जायँगे ।

ग के मान को यदि $स_४$ के अव्यक्त मानों अर्थात् $इ_१, इ_२, इ_३, इ_४$ के रूप में लाओ तो स्पष्ट है कि ग में गुण्य गुणक खण्ड $इ_२ + इ_३ - इ_१ - इ_४$, $इ_३ + इ_१ - इ_२ - इ_४$, $इ_१ + इ_२ - इ_३ - इ_४$ ये होंगे और $इ_१, इ_२, इ_३$ और $इ_४$ के स्थान में

$$\frac{१}{य - इ_१}, \frac{१}{य - इ_२}, \frac{१}{य - इ_३} \text{ और } \frac{१}{य - इ_४} \text{ क्रम से}$$

इनके उत्थापन से और हर को हटाने के लिये प्रत्येक को $\frac{स_४}{अ_०}$ इससे गुण देने से $ग_य$ में गुण्य गुणक रूप खण्ड

$$स_४\left(\frac{१}{य - इ_२} + \frac{१}{य - इ_३} - \frac{१}{य - इ_१} - \frac{१}{य - इ_४}\right) = अ_०ग$$

$$स_४\left(\frac{१}{य - इ_३} + \frac{१}{य - इ_१} - \frac{१}{य - इ_२} - \frac{१}{य - इ_४}\right) = अ_०ग$$

$$स_४\left(\frac{१}{य-इ_१}+\frac{१}{य-इ_२}-\frac{१}{य-इ_३}-\frac{१}{य-इ_४}\right)=अ_०म$$

ये होंगे। इन पर से और $स_४=अ_०(य-इ_१)(य-इ_२)(य-इ_३)(य-इ_४)$ मान लेने से

$$ब=(इ_२-इ_४)(य-इ_१)(य-इ_३)-(इ_१-इ_३)(य-इ_२)(य-इ_४)$$

$$भ=(इ_१-इ_४)(य-इ_२)(य-इ_३)-(इ_२-इ_३)(य-इ_१)(य-इ_४)$$

$$म=(इ_१-इ_४)(य-इ_२)(य-इ_३)+(इ_२-इ_३)(य-इ_१)(य-इ_४)$$

और $३२गा_य=अ_०^३$ बभम। $हा_य=-\frac{अ^२}{४८}(ब^२+भ^२+म^२)$

इन पर से अनेक और उपयोगी समीकरण बना सकते हो।

५—न घात के एक अवशक्तिक बहुपद राशि फ (य,र) में यदि य = दया + तरा, र = द'या + त'रा इनका उत्थापन देते हैं तो फ (य,र) का मान फा (या,रा) होता है और (य,र) का एक दूसरा फल जो स है वह उसी उत्थापन से सा होता है तो सिद्ध करो कि

$$मा^न फ\left(\frac{तास}{तार},-\frac{तास}{ताय}\right)=फा\left(\frac{तासा}{तारा},-\frac{तासा}{ताया}\right)$$

जहां मा परिवर्तन में मध्यस्थ है अर्थात् मा = दत' − द'त।

यहां य = दया + तरा, र = द'या + त'रा

इसलिये माया = स'य − तर, मारा = −द'य + दर।

और चलनकलन से

$$मा\frac{ताया}{ताय} = स', मा\frac{ताया}{तार} = -स, मा\frac{तारा}{ताय} = -द', मा\frac{तारा}{तार} = द।$$

$$\frac{तास}{ताय} = \frac{तासा}{ताया}\frac{ताया}{ताय} + \frac{तासा}{तारा}\frac{तारा}{ताय}$$

$$= -\left\{द'\left(\frac{१}{मा}\frac{तासा}{तारा}\right) + स'\left(-\frac{१}{मा}\frac{तासा}{ताया}\right)\right\}$$

$$\frac{तास}{तार} = \frac{तासा}{ताया}\frac{ताया}{तार} + \frac{तासा}{तारा}\frac{तारा}{तार}$$

$$= द\left(\frac{१}{मा}\frac{तासा}{तारा}\right) + स\left(-\frac{१}{मा}\frac{तासा}{ताया}\right)$$

और फ(दया + सरा, द'या + स'रा) ≡ फा(या, रा)

इसमें या और रा के स्थान में $\frac{१}{मा}\frac{तासा}{तारा}$ और $-\frac{१}{मा}\frac{तासा}{ताया}$

क्रम से इनके उत्थापन से ध्रुवशक्ति न होने से

$$मा^{न}\left(\frac{तास}{तार}, -\frac{तास}{ताय}\right) \equiv फा\left(\frac{तासा}{तारा}, -\frac{तासा}{ताया}\right) \ldots\ldots\ldots (१)$$

यदि या और रा के स्थान में क्रम से $\frac{१}{मा}\frac{ता}{तारा}$ और $-\frac{१}{मा}\frac{ता}{ताया}$

इनका उत्थापन दें तो

$$मा^{न} फ\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right) स$$

$$= फा\left(\frac{ता}{तारा}, -\frac{ता}{ताया}\right) सा \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

यहां $फ\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)$, $फा\left(\frac{ता}{तारा}, -\frac{ता}{ताया}\right)$ से गतिपरम्परासम्बन्धी फलों का ग्रहण किया है अर्थात् फ और फि के मान के उत्थापन से $\frac{ता}{तार}, \frac{ता}{ताय}$, इत्यादि के तो $\frac{ता^{न}}{तार^{न}}, \frac{ता^{न}}{तार^{न-१}}$ इत्यादि मान आवेंगे उनसे उतनी बार उन चलराशियों के वश से तात्कालिक सम्बन्ध के मान समझो (चलनकलन का ७० वां प्रक्रम देखो)

(२) यदि तीसरी बहुपद राशि के फ (य, र) और स चलस्पर्द्धी हों जहां मान लो कि दोनों चलस्पर्द्धियों में से एक के समान श हो जाता है और वे ही दोनों चलस्पर्द्धियों के मान या और स और नये पदगुणकों के वश से क्रम से $फा_{च}$ (या, रा) और $सा_{च}$ होता है जब य और र के परिवर्त्तन से श का एक नया रूप होगा। तो चलस्पर्द्धी क्रम से २२५वें प्रक्रम से

$$मा^{व} फा (या, रा) = फा_{च} (या, रा) \text{ और } मा^{व} सा = सा_{च}$$

इस रूप के होंगे। (१) इन समीकरणों से आए हुए स्वरूपों का उत्थापन (१) में देने से

$$मा^{थ} फ\left(\frac{तास}{तार}, -\frac{तास}{ताय}\right) = फा_{च}\left(\frac{तासा_{च}}{तारा}, -\frac{तासा_{च}}{ताया}\right)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि श का एक चलस्पर्द्धी

$फ\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)$ यह है।

इसी प्रकार (२) से सिद्ध होगा कि $फ\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)स$। यदि यह स न घात का हो तो श का अचलस्पर्द्धी होगा और यदि स न से अधिक घात का होगा तो वही श का चलस्पर्द्धी होगा। यहां श के घात का द्योतक न है अर्थात् श के मान में अव्यक्त का जो सब से बड़ा घात है उसका द्योतक न है।

(१) यदि $फ(य,र) = (अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, अ_४)(य,र)^४$ और $फ = फा$, $स = सा$ तो श का एक अचलस्पर्द्धी

$$(अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, अ_४)\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)^४ सा$$

$$= ४८\,(अ_०अ_४ - ४अ_१अ_३ + ३अ_२^२) = झा।$$

(२) यदि स को चतुर्घात समीकरण का चलस्पर्द्धी $हा_य$ मान लें और $फ(य,र) = (अ_०, अ_१, \ldots, अ_४)(य,र)^४$ तो ऊपर की युक्ति से जब $फ(य,र) = श$ तो

$$(अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, अ_४)\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right) हा_य$$

$$= ७२\,(अ_०अ_२अ_४ + २अ_१अ_२अ_३ - अ_०अ_३^२ - अ_४अ_१^२ - अ_२^३) = छा।$$

(३) सिद्ध करो कि यदि $(अ, क, ख, ग)(य,र)^३$ का चलस्पर्द्धी $गा_य$ हो तो

$$(\text{अ},\text{क},\text{ख},\text{ग})\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}},\ -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)\text{गा}_{\text{य}}$$

$$= -12\,(\text{अ}^2\text{ग}^2 - 6\text{अकखग} + 4\text{अख}^3 + 4\text{कग}^3 - 3\text{क}^2\text{ख}^2)$$

६—यदि $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots \text{अ}_\text{न})(\text{य},\text{र})^\text{न}$ का अचलस्पर्द्धी फि $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न})$ हो और स कोई (य,र) का फल न वा न से अधिक घात का हो तो

$$\text{फि}\left(\frac{\text{ता}^\text{न}\text{स}}{\text{ताय}^\text{न}},\ \frac{\text{ता}^\text{न}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-1}\text{तार}},\ \frac{\text{ता}^\text{न}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-2}\text{तार}^2}\ \ldots\ldots,\ \frac{\text{ता}^\text{न}\text{स}}{\text{तार}^\text{न}}\right)$$

यह स का अचल वा चलस्पर्द्धी होगा।

इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$\text{य} = \text{दया} + \text{तरा},\ \text{य}' = \text{दया}' + \text{तरा}',\ \text{र} = \text{द}'\text{या} + \text{त}'\text{रा},$$

$$\text{र}' = \text{द}'\text{या}' + \text{त}'\text{रा}'।$$

फिर (५) वें उदाहरण ही की युक्ति से इन मानों से समीकरणों के बदलने से और उत्थापन से सा = स.

$$\text{य}'\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} + \text{र}'\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{या}'\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} + \text{रा}'\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}$$

इसलिये उन्हीं संकेतों से $\left(\text{या}'\frac{\text{ता}}{\text{ताया}} + \text{रा}'\frac{\text{ता}}{\text{तारा}}\right)^\text{न}\text{सा}$

$$= \left(\text{य}'\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} + \text{र}'\frac{\text{ता}}{\text{तार}}\right)^\text{न}\text{स}$$

दोनो पक्षों को फैलाने से

$$\text{फि}\ (\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \ldots\ldots, \text{घा}_{\text{न}})\ (\text{या}', \text{रा}')^{\text{न}}$$
$$= (\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \ldots\ldots, \text{घा}_{\text{न}})\ (\text{य}', \text{र}')^{\text{न}}$$

इसलिये २२५ प्रक्रम से

$$\text{फि}\ (\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \ldots\ldots, \text{घा}_{\text{न}}) = \text{मा}^{\text{ब}}\ \text{फि}(\text{घ}_0, \text{घ}_1, \text{घ}_2, \ldots, \text{घ}_{\text{न}})$$

इससे सिद्ध होता है कि फि$(\text{घ}_0, \text{घ}_1, \text{घ}_2, \ldots\ldots, \text{घ}_{\text{न}})$ यह स का अचल वा चलस्पर्द्धी जहां $\text{घ}_0 = \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$, $\text{घ}_1 = \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-1}}$ इत्यादि हैं।

यहां इस प्रकार के जो (य, र) और (य′, र′) हैं इन्हें स्पर्द्धी चल कहते हैं।

(१) कल्पना करो कि $\text{अ}_0\text{य}^2 + 2\text{अ}_1\text{य} + \text{अ}_2$ यह य के रूपान्तर से $\text{आ}_0\text{य}^2 + 2\text{आ}_1\text{य} + \text{आ}_2$ ऐसा हुआ तो २२६वें प्रक्रम के (१) उदाहरण से

$$\text{आ}_0\text{आ}_2 - \text{आ}_1^2 = \text{मा}^2\ (\text{अ}_0\text{अ}_2 - \text{अ}_1^2) = \text{उ}$$

और ऊपर के समीकरण से

$$\text{या}'^2 \frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{ताया}^2} + 2\text{या}'\text{रा}' \frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{ताया}\cdot\text{तारा}} + \text{रा}'^2 \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारा}}$$
$$= \text{य}'^2 \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + 2\text{य}'\text{र}' \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} + \text{र}'^2 \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2}$$

अब ऊपर के उ से

$$\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{ताया}^2} \frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{तारा}^2} - \left(\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{तायातारा}}\right)^2$$
$$= \text{मा}^2 \left\{ \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} \frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} - \left(\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}}\right)^2 \right\}$$

इसे सा का हा सम्बन्धी चलस्पर्द्धी कहते हैं।

(२) ऊपर के उदाहरण में यदि $स = (अ,क,ख,ग)\,(य,र)^{३}$ हो तो चलस्पर्द्धी कैसा होगा।

यहां $स = अय^{३} + ३कय^{२}र + ३खयर^{२} + गर^{३}$ । इसलिये चलन-कलन से

$$स = अय^{३} + ३कय^{२}र + ३खयर^{२} + गर^{३}$$

$$\frac{तास}{ताय} = ३अय^{२} + ६कयर + ३खर^{२};\ \frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} = ६अय + ६कर$$

$$\frac{तास}{तार} = ३गर^{२} + ६खयर + ३कय^{२};\ \frac{ता^{२}स}{ताय} = ६गर + ६खय$$

$$\frac{ता^{२}स}{तायतार} = ६कय + ६खर,\ \frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}\,\frac{ता^{२}स}{तार^{२}} = ३६\{(अग + कख)\,यर + अखय^{२} + कगर^{२}\}$$

$$\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}}\,\frac{ता^{२}स}{तार^{२}} - \left(\frac{ता^{२}स}{तायतार}\right)^{२} = ३६\,\{(अख - क^{२})य^{२} + (अग - कख)यर + (कग - ख^{२})र^{२}\}$$

(३) इसी प्रकार सिद्ध करो यदि $स = (अ\ क,ग,,घ)\,(य,र)^{४}$ तो चलस्पर्द्धी

$$= (अख - क^{२})य^{४} + २\,(अग - कख)य^{३}र + (अघ + २कग - ३ख^{२})\,य^{२}र^{२} + २\,कघ - खग)यर^{३}(ख + घ - ग^{२})र^{४}$$ ।

७—यदि अव्यक्त राशि $शा = सा + अ(\,यर' - य'र\,)^{न}$ ऐसा हो जहां

$सा = (अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}\ \ldots, अ_{न})\,(\,य,र\,)^{न}$ और $(\,य,र\,)$ और $(य',र')$ परस्पर स्पर्द्धीचल हैं।

यदि श का कोई अचलस्पर्द्धी बनाया जाय तो उसमें अ के भिन्न भिन्न घातों के गुणक य' और र' के घुवशक्तिक फल होंगे वे सब अलग अलग सा के चलस्पर्द्धी होंगे। क्योंकि गुण-गुणित युत वर्णान्तर जब य, और र को बदलेंगे तो

$$सा=(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न)(य, र)^न$$

$$=(आ_0, आ_1, आ_2, \ldots\ldots, आ_न)(या, रा)^न$$

और यर' — य'र = म (यारा' — या'रा)। इसलिये सा + अ(यर' — य'र)^न यह $(आ_0, आ_1, \ldots\ldots, आ_न)(या, रा)^न$ + अमा^{न} (यारा' — या'रा)^न ऐसा होगा।

इसलिये कोई अचलस्पर्द्धी फा दोनों के बनाए जायँ तो अ के घात वृद्धि में २२६ वें प्रक्रम से

$$(फा_0, फा_1, फा_2, \ldots\ldots, फा_प)(१, अ)$$

$$= मा^{भु}(फि_0, फि_1, फि_2, \ldots\ldots, फि_प)(१, मा^न अ)$$

जिनसे सिद्ध है कि $फा_थ = मा^{व} फि_थ$ ऐसा होगा। इसलिये $फा_थ$ यह एक चलस्पर्द्धी है।

यदि (यर' — य'र)^न इसके स्थान में $(क_0, क_1, क_2, \ldots\ldots, क_न)(य, र)^न$ को रक्खें तो ऊपर ही की क्रिया से यह सिद्ध कर सकते हो कि

यदि फा $(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न)$ यह $(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न)(य, र)^न$ इसका अचलस्पर्द्धी हो तो फा $(अ_0 + नक_0, अ_1 + नक_1, \ldots\ldots, अ_न + नक_न)$

इसमें ज के भिन्न भिन्न घातों के गुणक $(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न)$ $(य, र)^न$ और $(क_0, क_1, क_2, \ldots\ldots, क_न)$ $(य, र)^न$ इन दोनों के अचलस्पर्द्धी होंगे।

चलनकलन से यदि ज का घात वृद्धि में फा को ले आओ और

$$क_0 \frac{ताफा}{ताअ_0} + क_1 \frac{ताफा}{ताअ_1} + \ldots\ldots + क_न \frac{ताफा}{ताअ_न} = बी_1 \quad \text{तो}$$

$$फा\,(अ_0 + जक_0, अ_1 + जक_1, \ldots\ldots, अ_न + जक_न)$$
$$= फा\,(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न) + जबी_1$$
$$+ \frac{ज^2}{२!} बी_1^2 + \frac{ज^3}{३!} बी_1^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{ज^ध}{ध!} बी_1^ध + \ldots\ldots$$

ऐसा होगा। इस पर से सब अचलस्पर्द्धियों का पता लग जायगा।

८—यदि फे (य, र) और फै (य, र) भुवशक्तिक फल हों तो

$$\begin{vmatrix} \frac{ताफे}{ताय}, & \frac{ताफे}{तार} \\ \frac{ताफै}{ताय}, & \frac{ताफै}{तार} \end{vmatrix}$$

यह कनिष्ठ फल दोनों का चलस्पर्द्धी होगा। क्योंकि यदि दोनों फलों में

$य = दया + तरा, र = द'या + त'रा$ इनका उत्थापन दो तो

$$फो\,(या, रा) = फे\,(य, र),\; फौ\,(या, रा) = फै\,(य, र)$$

जिनसे $\frac{\text{ताफो}}{\text{ताया}} = \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताय}}{\text{ताया}} + \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताया}} = \text{द} \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{द}' \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}$

$$\frac{\text{ताफो}}{\text{तारा}} = \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताय}}{\text{तारा}} + \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{तारा}} = \text{त} \frac{\text{ताफे}}{\text{ताया}} + \text{त}' \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}} = \text{द} \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{द}' \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}} = \text{त} \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{त}' \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}$$

इसलिये

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{ताफो}}{\text{ताया}}, & \frac{\text{ताफो}}{\text{तारा}} \\ \frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}}, & \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{द} \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{द}' \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}, & \text{त} \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{त}' \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}} \\ \text{द} \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{द}' \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, & \text{त} \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{त}' \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}} \end{vmatrix}$$

$$= \text{म}' \left(\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}} \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} \right)$$

इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो जाती है।

इसे जकोबी (Jacobi) ने निकाला है। इसलिये इसे जकोबी का चलस्पर्द्धी कहते हैं।

न चलराशियों के यदि भिन्न भिन्न न फल हों तो भी ऊपर की युक्ति से न संख्या पंक्ति से जो कनिष्ठ फल होगा वह उन समीकरण परम्पराओं का चलस्पर्द्धी होगा।

२२९—चलराशियों का अकरणीगत और ध्रुव-शक्तिक एक फल न है जहाँ ध्रुवशक्ति दो है। इसे एक

ध्रुवशक्ति संबन्धी वर्णों के पृथक् पृथक् फलों के वर्ग योग रूप में प्रकाश कर सकते हैं।

कल्पना करो कि वह फल $य_1, य_2, .., य_न$ राशियों का $भा = पा_1 य_1^2 + 2 बा_1 य_1 + ता_1$ है, जहां $पा_1$ कोई स्थिर संख्या, $बा_1$ एक ध्रुवशक्ति संबन्धी पृथक् पृथक् $य_2, य_3 .. य_न$ चलराशियोंका फल और $ता_1, य_2, य_3, .., य_न$ चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है तो

$$भा = पा_1 य_1^2 + 2 बा_1 य_1 + ता_1$$

$$= \left(य_1 \sqrt{पा_1} + \frac{बा_1}{\sqrt{पा_1}}\right)^2 + ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1}$$

$$= \left\{ \left(य_1 + \frac{बा_1}{पा_1}\right) \sqrt{पा_1} \right\}^2 + ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1}$$

$$= \left(या_1 \sqrt{पा_1}\right)^2 + भा_1$$

यदि $या_1 = य_1 + \frac{बा_1}{_1}$, $भा_1 = ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1}$

यहां $भा_1$, $न - 1$ चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है। $ता_1$, $न - 1$ चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है और $बा_1$ का जो $न - 1$ चलराशियों का एक घात का ध्रुवशक्तिक फल है, वर्ग करने से वर्ग $न - 1$ चलराशियों का दो घात का ध्रुवशक्तिक फल होगा। इसलिये

$भा_1 = पा_2 य_2^2 + 2 बा_2 य_2 + ता_2$ इस प्रकार लिख सकते हो और ऊपर की युक्ति से

$$भा_1 = \left\{ \left(य_2 + \frac{बा_2}{पा_2}\right)\sqrt{पा_2} \right\}^2 + ता_2 - \frac{बा_2^2}{पा_2}$$

$$= \left(या_2\sqrt{पा_2}\right)^2 + भा_2$$

यदि $या_2 = य_2 + \frac{बा_2}{पा_2}$ और $भा_2 = ता_2 - \frac{बा_2^2}{पा_2}$ ।

इसी प्रकार $भा_2$ से $या_3$ और $भा_3$ इत्यादि बनेंगे।

इसलिये $भा = (या_1\sqrt{पा_1})^2 + (या_2\sqrt{पा_2})^2$
$+ (या_3\sqrt{पा_3})^2 + \dots\dots + (या_न\sqrt{पा_न})^2$

जहाँ $या_न = य_न$ । इसपर से सिद्ध हुआ कि भा को न राशियों के वर्गयोग के समान बना सकते हो।

२३०—$फ(य) = य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \dots\dots\dots$
$+ प_{न-1} य + प_न = 0$

इसमें $य^न, य^{न-1}, य^{न-1}$ इत्यादि के मान $य^{न-1}$ और इससे अल्पघातों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं क्योंकि

$$फ(य) = 0 = य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \dots\dots प_{न-1} य + प_न$$

$$\therefore य^न = -प_1 य^{न-1} - प_2 य^{न-2} \dots\dots\dots - प_{न-1} य - प_न \dots\dots\dots\dots (1)$$

य से गुण देने से

$$य^{न+1} = -प_1 य^न - प_2 य^{न-1} - \dots\dots - प_{न-1} य^2 - प_न य$$

$$= -प_1 \left(प_0 \frac{न}{य}{}^{-1} - प_2 \frac{य}{न}{}^{2} - \dots\dots प_{न-1}य - प^{न}\right)$$

$$-प_2 य^{न-1} - प^{3} य^{न-2} - \dots\dots - प_{न-1} य - प_न य$$

(१) से

$$= (प_1^2 - प_2)\, य^{न-1} + (प_1 प_2 - प_3)\, य^{न-2} + \dots\dots$$
$$+ (य_1 प_{न-1} - प_न) य - प_न$$

इस प्रकार से $य^{न+1}$ का मान $य^{न-1}$ और इससे अल्प घातों के रूप में आया।

फिर दोनों पक्षों को य से गुण देने से $य^{न+2}$ का मान $य^न$ और $य^{न-1}$ इत्यादि एकापचित घातों के रूप में आवेगा। उसमें $य^न$ के स्थान में (१) के उत्थापन से $य^{न+2}$ का मान $य^{न-1}$ और इससे अल्प घातों में आवेगा। इस प्रकार आगे क्रिया फैलाने से य का न से आगे चाहे जौन का अभिन्न घात का मान य के न − १ और इससे अल्प घात के रूप में प्रकाश कर सकते हैं।

२३१—कल्पना करो कि

$$य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \dots\dots + प_{न-1} य + प_न = 0 \dots\dots\dots (१)$$

यह एक समीकरण है और मान लो कि

$$र = अ_0 + अ_1 य + अ_2 य^2 + \dots\dots + अ_म य^म \dots\dots\dots (२)$$

जहां न से अल्प म है और $अ_0, अ_1, अ_2, \dots, अ_म$ ये स्थिर संख्या हैं जो अभी अविदित हैं।

चाहते हैं कि य का लोप कर र के रूप में एक समीकरण बनावें। समीकरण (२) से स्पष्ट है कि य के जितने मान हैं उनके उत्थापन से उतने ही मान र के होंगे। इसलिये र के रूप में जो समीकरण बनेगा उसमें र का सब से बड़ा घात न ही होना चाहिए।

(२) समीकरण का १, २,……न घात करने से और घातों में य के न − १ घात से जितने अधिक घात हैं उनका रूप २३० प्रक्रम से य के न − १ और इससे अल्प घात में बनाने से

$$\left.\begin{array}{l} र^2 = क_0 + क_1 य + क_2 य^2 + \cdots\cdots + क_{न-1} य^{न-1} \\ र^3 = ख_0 + ख_1 य + ख_2 य^2 + \cdots\cdots + ख_{न-1} य^{न-1} \\ \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ र^न = ज_0 + ज_1 य + ज_2 य^2 + \cdots\cdots + ज_{न-1} य^{न-1} \end{array}\right\} \cdots\cdots (3)$$

यहां $क_0, क_1, \ldots\ldots क_{न-1}$ दो घात का अकरणीगत ध्रुव शक्तिक $अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न$ अव्यक्तों का फल है। $ख_0, ख_1, ख_2, \ldots\ldots, ख_{न-1}$ तीन घात का अकरणीगत ध्रुव शक्तिक $अ_0, अ_1, अ \ldots\ldots अ_न$ का फल है। इसी प्रकार आगे भी समझ लेना चाहिए।

कल्पना करो कि (१) समीकरण में जितने अव्यक्त मान हैं उनके एकादि घातों को योग १५६ वें प्रक्रम के संकेत से $स_1, स_2, स_3$ इत्यादि हैं और उनके वश से र के जो मान हैं उनके एकादि घातों के योग $सा_1, सा_2, सा_3$ इत्यादि हैं। (२) और (३) इनमें प्रत्येक समीकरण में य के प्रत्येक मान के उत्थापन से और अलग अलग सभों के योग से

$$\left.\begin{array}{l} सा_१ = नअ_० + अ_१स_१ + अ_२स_२ + \ldots + अ_{म-१}स_{म-१} + अ_मस_म \\ सा_२ = नक_० + क_१स_१ + क_२स_२ + \ldots\ldots + क_{न-१}स_{न-१} \\ सा_३ = नख_० + ख_१स_१ + ख_२स_२ + \ldots\ldots + ख_{न-१}स_{न-१} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ सा = नज_० + ज_१स_१ + ज_२स_२ + \ldots\ldots ज_{न-१}स_{न-१} \end{array}\right\} ४$$

इस प्रकार र के न विध मानों के एकादि घातों के योग के मान आ गए जिनसे १६०वें प्रक्रम की युक्ति से $र^न + वर^{न-१} + व_२ र^{न-२} + \ldots\ldots\ldots + व_{न-१}र + व_न = ०$ इस अभीष्ट समीकरण में $व_१$, $व_२$ इत्यादि गुणकों के मान व्यक्त हो जायंगे।

इस प्रकार र के रूप में अपना अभीष्ट समीकरण बन गया। अथवा (३) में यदि $य, य^२, \ldots\ldots य^{न-१}$ इत्यादि को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लो तो १६६ वें प्रक्रम से $र^२, र^३$ इत्यादि के रूप में $य, य^२$ इत्यादि आ जायँगे। फिर उनका उत्थापन (१) में देने से अभीष्ट समीकरण र के रूप में बन जायगा जिससे र के मान व्यक्त होने से य के मान भी व्यक्त हो जायेंगे। इस विधि का Tochirnhausen ने निकाला है।

२३२—अब $अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots अ_न$ जो अभी अविदित हैं इनको इस प्रकार ले सकते हैं जिनके वश से ऊपर र के रूपमें जो समीकरण बना है उसमें कई पद गुप्त हो जायँ। जैसे यदि इच्छा हो कि प्रथम पदके आगे दूसरा, तीसरा,......म संख्यक पद उड़ जायँ तो मान लेना चाहिए कि $सा_१ = ०$, $सा_२ = ०, \ldots\ldots\ldots, सा_न = ०$

परन्तु (४) से जब $सा_१, सा_२$ इत्यादि के मान शून्य मान कर $अ_०, अ_१, \ldots, अ_न$ के मान के लिये जब अभीष्ट समीकरण बनाओगे

तब देखोगे कि सा$_1$ में अ$_0$,अ$_2$ इत्यादि के एक घात हैं। सा$_2$ में दो घात, सा$_3$ में तीन घात,.........और सा$_म$ में म घात हैं। इसलिये सा$_1$ से अ$_0$ का मान अ$_1$,अ$_2$,......के रूप में आवेगा। इसका उत्थापन सा$_2$ में देने से अ$_1$ का मान द्विविध अ$_2$,अ$_3$, के रूप में आवेगा। सा$_3$ में इन दोनों मानों का उत्थापन देने से अ$_2$ का मान ६ विध आवेगा।

अ$_0$,अ$_1$,अ$_2$,......अ$_म$ में किसी एक अ$_म$ का मान व्यक्त मानें तो अ$_{म-1}$ का मान (म − १) ! इतना विध आवेगा।

२३२—$य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \ldots\ldots + प_न = 0$

इसमें मान लो कि

$$र = अ_0 + अ_1 य + अ_2 य^2 + अ_3 य^3 + अ_4 य^4$$

और पिछले प्रक्रमों की युक्ति से कल्पना करो कि र रूप में

$$र^न + व_1 र^{न-1} + व_2 र^{न-2} + \ldots\ldots + व_न = 0$$

ऐसा समीकरण बना जिसमें २३१ प्रक्रम से स्पष्ट है कि व$_1$,अ$_0$,अ$_1$,......,अ$_4$ का एक घात का, व$_2$ दो घात का, और व$_3$ तीन घात का अनुशक्तिक फल है। कल्पना करो कि अ$_0$, अ$_1$,......अ$_4$ ऐसे हैं जिनसे

$व_1 = 0, व_2 = 0, व_3 = 0$। अब मानो कि $व_1 = 0$ इससे अ$_0$ का मान अ$_1$,अ$_2$,अ$_3$,अ$_4$ इनके रूप में जो आया उसका उत्थापन व$_2$ और व$_3$ में देने से $व'_2 = 0, व'_3 = 0$ ऐसा हुआ। जहां व$'_2$, दो घात का और व$'_3$ तीन घात का अ$_1$,अ$_2$,......अ$_4$ के अनुशक्तिक फल हैं। इसलिये २२६ वें प्रक्रम से

$व'_2 = फ^2 + ग^2 + ह^2 + ज^2 = 0$ ऐसी कल्पना कर सकते हैं। जहाँ फ, ग ह, ज अलग अलग $अ_1, अ_2, अ_3, अ_4$ के एक घात सम्बन्धी फल हैं।

कल्पना करलो कि $फ = ग\sqrt{-1}, ह = ज\sqrt{-1}$

जहाँ दोनों समीकरणों में अलग अलग $अ_1, अ_2, \ldots अ_4$ के एक ही घात सम्बन्धी फल हैं। मानलो कि इन दोनों से $अ_1$ और $अ_2$ के मान जो $अ_3$ और $अ_4$ के रूप में आए उनके उत्थापन से $व'_3$ का रूप $व''_3 = 0$ ऐसा हुआ जो कि $अ_3$ और $अ_4$ का तीन घात का भुवशक्तिक फल है। इसमें $अ_3$ और $अ_4$ में से किसी एक का मान कोई इष्ट मान लें तो दूसरे का मान एक घन समीकरण से आ जायगा।

यदि दूसरा, तीसरा और पाँचवाँ पद उड़ाना हो तो ऊपर ही की ऐसी क्रिया करने से अन्त में एक चतुर्घात समीकरण बनेगा।

$र^न + व_1 र^{न-1} + व_2 र^{न-2} + \ldots\ldots व_न = 0$ इसमें यदि र के स्थान में $\frac{1}{र_1}$ रख दें तो $व_न र_1^न + व_{न-1} र_1^{न-1} + व_{न-2} र_1^{न-2} + \ldots\ldots\ldots + 1 = 0$ ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें ऊपर ही की युक्ति से अन्त पद से दूसरा, तीसरा और चौथा वा दूसरा, तीसरा और पांचवां पद उड़ा सकते हो।

२३४—२३३ वें प्रक्रम में जो न घात का समीकरण है जिस पर से र के न घात का समीकरण उत्पन्न हुआ है, उसमें यदि न=५ हो तो उसी प्रक्रम की युक्ति से दूसरे, तीसरे और चौथे वा पांचवे पद को उड़ाने से किसी पंचघात समीकरण का

$र^{५}+पार+बा=०$, $र^{५}+पार^{२}+बा=०$ ऐसे दो रूप बना सकते हैं। इसमें यदि $र=\frac{१}{र'}$ ऐसा माना जाय तो दो रूप और $र'^{५}+$ $पा'र'^{३}+बा'=०$,

$र'^{५}+पा'र'^{४}+बा'=०$ इस प्रकार के होंगे। इस प्रकार किसी पंचघात समीकरण का चार रूपान्तर कर सकते हो। यह मिस्टर सीरेट (Mı Serret) की कल्पना है। (See his cours d' Algebre Supeneure, *V*ol 1, Art 192)

२३५—यदि पंचघात समीकरण $(अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}, \ldots\ldots अ_{५})(य, र)^{५}$ ऐसा हो और इसे $क_{१}(य+इ_{१}र)^{५}+क_{२}(य+इ_{२}र)^{५}+$ $क_{३}(य+इ_{३}र)^{५}$ इसके तुल्य करें जहाँ $इ_{१}, इ_{२}$ और $इ_{३}$ $प_{३}य^{३}+$ $प_{२}य^{२}+प_{१}य+प_{०}=०$ इसमें के अव्यक्त मान हैं। तब तीनों पंच घातात्मक पदों को फैलाने से और दोनों पक्षों में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$अ_{०}=क_{१}+क_{२}+क_{३}$, $अ_{१}=क_{१}इ_{१}+क_{२}इ_{२}+क_{३}इ_{३}$, $अ_{२}=$ $क_{१}इ_{१}^{२}+क_{२}इ_{२}^{२}+क_{३}इ_{३}^{२}$,

$अ_{३}=क_{१}इ_{१}^{३}+क_{२}इ_{२}^{३}+क_{३}इ_{३}^{३}$, $अ_{४}=क_{१}इ_{१}^{४}+क_{२}इ_{२}^{४}+क_{३}इ_{३}^{४}$, $अ_{५}=क_{१}इ_{१}^{५}+क_{२}इ_{२}^{५}+क_{३}इ_{३}^{५}$ ।

इनपर से

$$प_{०}अ_{०}+प_{१}अ_{१}+प_{२}अ_{२}+प_{३}अ_{३}=०$$
$$प_{०}अ_{१}+प_{१}अ_{२}+प_{२}अ_{३}+प_{३}अ_{४}=०$$
$$प_{०}अ_{१}+प_{१}अ_{३}+प_{२}अ_{४}+प_{३}अ_{५}=०$$

इन तीनोंके साथ $प_{०}+प_{१}य+प_{२}य^{२}+प_{३}य^{३}=०$ इसको मिलाने से

$$\begin{vmatrix} 1 & य & य & य^3 \\ अ_0 & अ_1 & अ_2 & अ_3 \\ अ_1 & अ_2 & अ_3 & अ_4 \\ अ_2 & अ_3 & अ_4 & अ_5 \end{vmatrix}$$

यह कनिष्ठ फल के रूप में एक समीकरण हुआ जिससे य के मान विदित होने से $इ_1, इ_2$ और $इ_3$ व्यक्त होंगे तब

$$अ_0 = क_1 + क_2 + क_3$$

$$अ_1 = क_1 इ_1 + क_2 इ_2 + क_3 इ_3$$

$$अ_2 = क_1 इ_1^2 + क_2 इ_2^2 + क_3 इ_3^2$$

इनसे $क_1, क_2$ और $क_3$ भी व्यक्त हो जायँगे।

इस प्रकार दिया हुआ पंचघात समीकरण तीन अव्यक्त राशियों के पंचघात के योग के समान हो सकता है।

इसी प्रकार (य, र) के २न – १ घात का ध्रुव शक्तिक फल,

$$क_1(य + इ_1 र)^{2न-1} + क_2(य + इ_2 र)^{2न-1} + \cdots\cdots + क_न(य + इ_न र)^{2न-1}$$

इसके समान हो सकता जहाँ $इ_1, इ_2, इ_3, \ldots, इ_न$ ।

$प_न य^न + प_{न-1} य^{न-1} + प_{न-2} य^{न-2} + \cdots\cdots प_0 = 0$ इसमें अव्यक्त के मान हैं।

यह डाक्टर सिल्वेस्टर (Dr. Sylvester) की कल्पना है।

१३६—फ (य) $= प_0 य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \cdots\cdots + प_न = 0$ इस समीकरण के धन मूलों की प्रधान सीमा जाननी है।

कल्पना करो कि अ यह प्रथम पद का गुणक वा उससे अल्प संख्या है और उसके आगे लगातार जितने पदों के धन गुणक हैं उनमें सब से छोटे गुणक के तुल्य वा उससे भी अल्प क है। और आगे जितने ऋण और धन पद हैं उनमें सब से बड़े ऋण गुणक के तुल्य वा उस से बड़ा ग है तो स्पष्ट है कि **फ** (य) अवश्य धन ही रहेगा।

यदि $अय^{न} + क(य^{न-१} + \dots\dots + य^{न-ज}) - ग$

$य^{न-ज-१} + \dots\dots + १$

जहाँ सबसे पहिला ऋण पद $य^{न-ज-१}$ है। ऊपर का मान गुणोत्तर श्रेढीसे

$$अय^{न} + क\frac{य^{न} - य^{न-ज}}{य - १} - ग\frac{य^{न-ज} + \dots + १}{य - १} \text{ यह होगा।}$$

यदि य>१ तो इसका मान तब धन होगा यदि

$\{अ(य - १) + क\}य^{न} - (क)य^{न-ज} + ग$ यह अथवा

$\{अ(य - १) + क\}य^{ज} - (क + ग)$ यह शून्य वा धन हो

(१) इसमें यदि क=० और सब से बड़ा ऋण गुणक=ग तो **फ** (य) धन होगा

यदि $अ(य - १) य^{ज} - (क + ग)$ यह वा $अ(य - १) - ग$ धन हो अर्थात् यदि

$य = १ + \frac{ग}{अ}$ वा य, $१ + \frac{ग}{अ}$ इससे बड़ा हो। इससे ५८ वें प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(२) मान लो कि क=० और सब से बड़ा ऋण गुणक=ग तो फ (य) धन होगा।

यदि $अ(य-१)य^{न}-ग$ यह धन हो अर्थात् यदि $अ(य-१)^{न+१}-ग$ यह धन हो

अर्थात् यदि $य, १+\left(\frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{न+१}}$ इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। इससे ५८वें प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(३) मान लो कि $अ=०$ तो फ (य) धन होगा यदि $कय^{न}-(क+ग)$ यह धन हो अर्थात् $य, \left(१+\frac{ग}{क}\right)^{\frac{१}{न}}$ इसके तुल्य वा इससे अधिक हो। यह एक नई सीमा है जो (२) से अल्प होगी यदि अ अर्थात् प्रथम पद के गुणक $प_{०}$ से क बड़ा होगा।

(४) यदि क से अ बड़ा न हो तो क के स्थान में अ के उत्थापन से फ (य) धन होगा यदि $\{अ(य-१)+अ\}य^{न}-(अ+ग)$ यह धन वा शून्य हो अर्थात् यदि $य, \left(१+\frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{न+१}}$ इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। यदि अ से छोटा क हो तो (३) से जो सीमा होगी उससे यह अल्प आवेगी।

(५) यदि $अ>ग$ तो (२) से सीमा $१+(१)^{\frac{१}{न+१}}=२$ होगी।

(६) यदि $क>ग$ तो (३) से सीमा $२^{\frac{१}{न}}$ यह होगी।

(७) यदि $अ>ग$ और $क>ग$ तो (४) से सीमा $२^{\frac{१}{न+१}}$ यह होगी।

यह प्रोफेसर डिमार्गन की कल्पना है।

२३७—$अ+क\sqrt{-१}=इ\,(कोज्या\,अ_{१}+ज्या\,अ_{१}\sqrt{-१})$

जहां $इ = \sqrt{अ^2 + क^2}$ और स्पश, $= \frac{क}{अ}$ ।

इ को मध्यस्थ कहते हैं (१४वां प्रक्रम देखो) और ,
कोण को असम्भव संख्या का उपकरण कहते हैं।

कल्पना करो कि मू या और मू रा लम्ब रूप दो अक्ष हैं और अक्षों के धरातल में एक आ विन्दु ऐसा है कि आ मू या $=$ अ, और मू आ $=$ इ, तो मू आ रेखा को मान लो कि $अ + क\sqrt{-१}$ इसका द्योतक है। $\sqrt{-१}$ को लाघव से । इस चिन्ह से प्रकाश करते हैं।

और इ$=$मध्य.(अ$+$।क), अ, $=$ उप.(अ$+$।क) ऐसा समझ रखो।

२३८। ऊपर की परिभाषा से कल्पना करो कि मू. आ $=$ अ$+$।क और मू. ओ$=$मू आ $+$।क' तो मू. आ का मान इ के तुल्य और आ मू या$=$अ, होगा।

∴ मू मा = इ कोज्या अ, = अ = भुज ।

मू आ मा = इ ज्या अ, = क = कोटि ।

ऊपर ही की परिभाषा से अ′ + ι क′ का मध्यस्थ इ′ और उपकरण अ′ हो तो मू ओ का मान = इ′ और ओ मू या = अ′, ।

और अ + ι क + अ′ + ι क′ = अ + अ′ + ι (क + क′)

इसलिये कहेंगे कि दोनों असंभवों के योग रूप असंभव में भुज = अ + अ′ और कोटि = क + क′ होगी। जिस विन्दु के ये भुज, कोटि हैं उस विन्दु के जानने के लिये आ से आ का रेखा मूओ के समानान्तर और तुल्य बनाओ और का से मू या पर लम्ब काना और आ से काना पर लम्ब आपा करो तो आपा = अ′ और कापा = क′ । इसलिये का विन्दु दोनों असंभव संख्या के योग को प्रकाश करेगा और ऊपर की परिभाषा से

मू का = मध्य {अ + अ′ + ι (क + क′)}, यामूका = उप {अ + अ′ + ι(क + क′)} इसलिये दो असम्भव संख्याओं का योग जानने के लिये एक को पूर्व परिभाषा से मू आ से प्रकाश करो और इसके आ प्रान्त से दूसरी को आ का से प्रकाश करो जहाँ आ का दूसरी के मध्यस्थ के तुल्य है और मू या अक्ष से दूसरी के उपकरण के तुल्य कोण बनाता है तो मू का दोनों असंभवों के योग को प्रकाश करेगी। मू आ + आ का > मू का; इसलिये दोनों के मध्यस्थों का योग, योग रूप असंभव संख्या के मध्यस्थ से अधिक होता है।

इसी प्रकार यदि तीसरी असंभव संख्या अ″ + ιक″ को मू औ से प्रकाश करें और पहिली दो के योग मू का में मिलाना चाहो तो मू औ के समानान्तर और तुल्य का खा खींचो और मू से खा

तक रेखा कर दो। तो ऊपर ही की युक्ति से मू अ, मू ओ' और मू औ असंभवों का योग मू खा के समान होगा यहां भी योग का मध्यस्थ मू खा के समान होगा और रेखागणित से मू का+काखा, मू खा से अधिक होगा। इस प्रकार आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि असंभव संख्याओं के मध्यस्थ के योग से उन असंभव संख्याओं के योग का मध्यस्थ छोटा होता है।

इसी प्रकार यदि मू का में मू ओ को घटाना हो तो मू का को जान कर का से विपरीत दिशा मे मू ओ के समानान्तर और तुल्य का आ के बनाने से मू आ को कहेंगे कि दोनों का अन्तर है।

२४१। असम्भवों का गुणन और भजन—

कल्पना करो कि

$$\text{गुण्य} = \text{अ} + \iota\text{क} = \text{इ}\,(\text{कोज्या अ}_1 + \iota\text{ज्या अ}_1)$$

$$\text{गुणक} = \text{अ}' + \iota\text{क}' = \text{अ}\,(\text{कोज्या अ}'_1 + \iota\text{ज्या अ}'_1)$$

डे माइवर (De Moivre) के सिद्धान्त से

$$(\text{अ} + \iota\text{क})\,(\text{अ}' + \iota\text{क}') = \text{इइ}'\{\text{कोज्या}\,(\text{अ}_1 - \text{अ}'_1) + \iota\text{ज्या}(\text{अ}_1 + \text{अ}'_1)\}$$

इससे सिद्ध होता है कि दो असंभवों का गुणन फल एक असंभव संख्या है जिसमें मध्यस्थ गुण्य गुणकों के मध्यस्थ के गुणन फल तुल्य और उपकरण दोनों के उपकरणों के योग तुल्य होता है।

इसी प्रकार

$$\frac{\text{अ}+\text{।क}}{\text{अ}'+\text{।क}'}=\frac{\text{इ}}{\text{इ}'}\left\{\text{क ज्या}(\text{अ}_1-\text{अ}'_1)+\text{।ज्या}(\text{अ}_1-\text{अ}'_1)\right\}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि दो असंभवो के भजन में लब्धि एक असंभव संख्या होती है जिसमें मध्यस्थ भाज्य के मध्यस्थ में भाजक के मध्यस्थ का भाग देने से जो लब्ध हो, वह होता है और उपकरण, भाज्य के उपकरण में भाजक के उपकरण को घटा देने से जो शेष बचता है वह होता है।

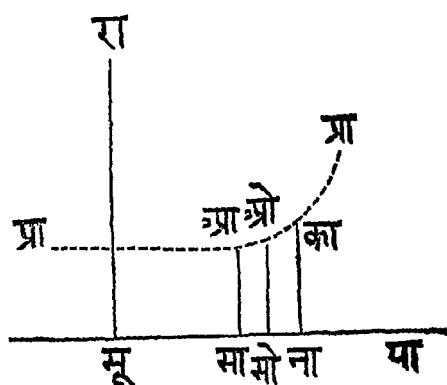
गुणन की क्रिया से स्पष्ट है कि $(\text{अ}+\text{।क})^{\text{न}}$ यह एक प्रकार की आ+।का ऐसी असंभव संख्या होगी जहाँ आ और का दोनों संभव संख्या हैं।

इसी प्रकार

$$\text{अ}_0\text{ल}^{\text{न}}+\text{अ}_1\text{ल}^{\text{न}-1}+\text{अ}_2\text{ल}^{\text{न}-2}+\ldots+\text{अ}_{\text{न}-1}\text{ल}+\text{अ}_{\text{न}}$$

इस बीजगणितीय बहुपदराशि में जहाँ ल के घातों के गुणक संभव वा असंभव संख्या है। ल के स्थान में अ+।क का उत्थापन दें तो योग और गुणन की युक्ति से स्पष्ट है कि बहु-पदराशि एक आ+।का ऐसी असंभव संख्या होगी। इसमें यदि आ और का दोनों शून्य हों तो वह बहुपदराशि भी शून्य के समान होगी।

(१५ वां प्रक्रम देखो)

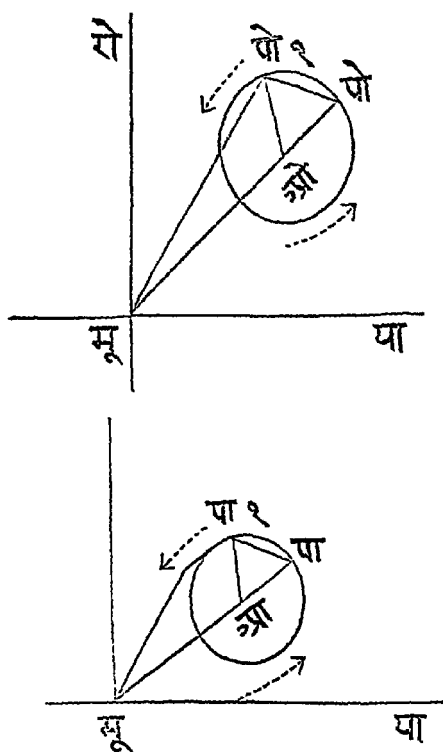
२४२—यदि श=फ(ल) ऐसा एक समीकरण हो और सू या, और सू रा परस्पर लम्बरूप अक्ष कल्पना कर सू से सू मा=अ बनावें और अ का उत्थापन फ (य) में (ल) के स्थान में देकर

फ (अ) को मा अ के तुल्य काट लें जो कि मू या पर लम्ब है तो कहेंगे कि जब ल=अ तो फ (ल)=आमा। इसी प्रकार जब ल=मू ना तो फ(ल)=ना का—इस प्रकार यदि ल की मू से या की ओर धन और इसके विरुद्ध दिशा की ओर ऋण गणना समझें और मू या के ऊपर रा की ओर धन गणना और इसके विरुद्ध ऋण गणना समझें तो ल के स्थान में—∞ और + ∞ के बीच सब सम्भव संख्याओं का उत्थापन देने से जो फ (ल)=श के भिन्न भिन्न धन वा ऋण मान होंगे ऊपर की युक्ति से या के अग्रों के ऊपर उन उन मानों के तुल्य लम्ब खड़ा करने से लम्बाग्रों में गत एक आ आ का गा वक्र रेखा होगी जिसे फ (ल) की वक्र रेखा कहते हैं। इसके बलसे किसी ल के मान में फ(ल) का मान जान सकते हो। जैसे जब ल=मू मो=ख तब फ(ल) का मान जानना हो तो मू से धन गणना या की ओर ख संख्या के तुल्य मूमो काट लेने से मो पर एक ओ मो लम्ब खड़ा करने से यह जहाँ वक्र के ओ विन्दु पर लगा वहां से मो तक

ओ मो का नापने से प्रमाण हो वहां ख तुल्य ल के मान में फ(ल) अर्थात् फ (ख) का मान होगा।

२४३। ऊपर के प्रक्रम से फ (ल) की वक्र रेखा तभी तयार हो सकती है जब ल $-\infty$ और $+\infty$ के बीच संभव संख्यात्मक हो और इससे अन्यथा स्थिति मे अर्थात् सर्वत्र चाहे ल संभव वा असंभव हो ऊपर की युक्ति से फ (ल) की वक्र रेखा नहीं बन सकती। इसलिये सर्व साधारण के लिये अब युक्ति लिखते हैं। कल्पना करो कि

$$फ(ल) = अ_0 ल^न + अ_1 ल^{न-1} + अ_2 ल^{न-2} + \ldots\ldots + अ_{न-1} ल + अ_न$$

जहाँ ल = य − ǃर जहाँ य और र दोनों के मान में जहाँ तक संभव है सब संभाव्य संख्या का उत्थापन दे सकते हैं। य + ǃर = ल ऐसे ल को जिसके मान में संभव और असंभव दोनों चल रहते है मिश्रचल कहते हैं। इसमें यदि र = ० और य के स्थान में $-\infty$ और $+\infty$ के बीच के मानों का उत्थापन दें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से ल के संभव मान में फ (ल की वक्र रेखा बनेगी; इसलिये मिश्रचल ल के फल की जो वक्र रेखा होगी उसी का एक विशेष अर्थात् संभव ल के मान मे जो ऊपर के प्रक्रम से वक्र रेखा होगी वह एक रूप है। इस लिये मिश्रचल के फल की जो वक्र रेखा होगी वह सर्व साधारण के लिये उपयोगी है।

कल्पना करो कि ल = य + ǃर इसका कोई एक मान २३६ प्रक्रम से मू पा अर्थात् पा बिन्दु पर है और ल के स्थान इस

मान का उत्थापन देने से जो फ (ल) का मान २४० प्रक्रम से आ + ′का होगा उसका मान साफ साफ समझने के लिये अलग २३६ प्रक्रम से पो विन्दु पर है अर्थात् मू′ पो है। इसी प्रकार ल के दूसरे मान में अर्थात् प + ′र के दूसरे मान में इसका प्रमाण प१ को समझो और उसके वश से फ (ल) का मान जो असंभव होगा वह पो१ है। इस प्रकार से प्रत्येक प + ′र के भिन्न

भिन्न मान में भिन्न भिन्न प, $प_1$ इत्यादि विन्दु से एक तीर के मुख दिशा की ओर घूमता हुआ वक्र बनेगा जिसे य + ᶦर का वक्र कहेंगे और इसके वश से एक फ (ल) का पो $पो_1$ वक्र बनेगा जिसका घुमाव भी यहां पर तीर के मुख की ओर मान लिया है।

कल्पना करो कि ल के य + ᶦर मान का द्योतक प और य' + ᶦर' मान का द्योतक $प_1$ विन्दु है तो

ल=य + ᶦर = अ (कोज्याष + ᶦज्याष) ल' = य' + ᶦर'

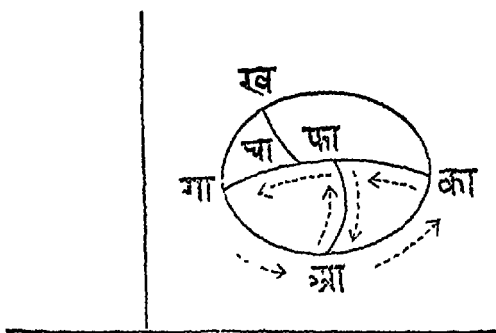
= अ'(कोज्याष' + ᶦज्याष') सू $प_1$, सू प और प $प_1$ का योग है (२३१ प्रक्रम से)।

इसलिये $पप_1$ को ल की असंभव गति कहेंगे और यदि ल' = ल + च' जहां च = $अ_1$ (कोज्या$ष_1$ + ᶦज्या$ष_1$) और च में $अ_1$ = $पप_1$ और $ष_1$ च का उपकरण है अर्थात् सू या अक्ष से $पप_1$ रेखा जो कोण बनाती है, उसका मान है।

सू $प_1$—सू प को ल के मध्यस्थ की गति कहते हैं जो कि अ'—अ के तुल्य है और ष'—ष या ल के उपकरण की गति कहते हैं। और च को जिसे $अ_1$ (कोज्या$प_1$ + ᶦज्या$ष_1$) इसके तुल्य ऊपर मान लिया है, ल की गति कहते हैं।

कल्पना करो कि य, र के भिन्न भिन्न मान से प एक सीमित वक्र बनाता है। यदि घूमते घूमते प फिर अपने स्थान पर पहुँचेगा तो प के मध्यस्थ का मान फिर उसी प्रथम मान के तुल्य होगा और उपकरण भी वही होगा जो कि प्रथम में था। यदि सू विन्दु वक्र के बाहर हो तो और यदि सू वक्र के

भीतर पड़ जायगा तो उपकरण का मान प्रथम मान से २π तुल्य बढ़ जायगा अर्थात् उपकरण की गति तब २π होगी।

यदि मिश्रबल दो विरुद्ध दिशाओं में चल कर एक ही रेखा को चाहे वह वक्र वा सरल हो उत्पन्न करे तो एक ओर चलने में जितनी उपकरण की गति धन होगी उतनी ही विरुद्ध दिशा में चलने से ऋण होगी; इसलिये समग्र गति शून्य होगी। इस पर से नीचे का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

कल्पना करो कि आ का ख गा क्षेत्र का का गा, आ फा, घा खे, इत्यादि रेखाओं से कई विभाग कर डाला तो आ स्थान से तीर की ओर से क्षेत्र की परिधि पर चलते हुए प बिन्दु की परिधि के पूरे भ्रमण से जो उपकरण की गति होगी वही सब क्षेत्र खण्डों की प्रत्येक सीमा पर उसी चाल से घूम आने पर भी उपकरण की गति होगी, क्योंकि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर क्षेत्र खण्डों की जितनी सीमायें हैं उन पर परस्पर विरुद्ध दिशा से दो बेर चलने से ऊपर की युक्ति से समग्र उपकरण की गति उतने

चलन में शून्य होगी। जैसे आ का फ क्षेत्र खण्ड की सीमा पर आ से तीरों की ओर चलने से जिस दिशा में प, फा विन्दु से चल कर आ पर आवेगा उससे विरुद्ध आ' से फा की ओर आ फा गा क्षेत्र खण्ड की सीमा पर घूमने के लिये चलना पड़ेगा। इस प्रकार भीतर जितनी सीमायें हैं उन पर विरुद्ध दिशा से दो वेर चलने मे तत्संवन्धी उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। केवल बाहर की सोमाओं पर एक वेर चलने से तत्संवन्धी समग्र गति वही होगी जो कि बड़े क्षेत्र की समग्र परिधि घूमने से उत्पन्न होती है। क्योंकि सब क्षेत्र खंडों की बाहरी सीमाओं का योग बड़े क्षेत्र की परिधि ही है।

२४४। कल्पना करो कि मिश्रचल ल, $ल_0$ मान से चलना आरम्भ किया और इसकी अल्पगति $च=अ्ु_1$(कोज्यप$_1$ + ज्याप$_1$) है तो

$$फ(ल)=फ(ल+च)=फ(ल)+फ'(ल_0)च+$$
$$फ''(ल_0)\frac{च^2}{1.2}+\dots$$

$$फ(ल) \text{ की गति}= फ(ल_0+च)-फ(ल_0)$$
$$=फ'(ल_0)च+फ''(ल_0)\frac{च^2}{1\cdot2}+फ'''(ल_0)\frac{च^3}{3!}+\cdots$$

इस में च के प्रत्येक घात के गुणक प्रसिद्ध असंभव संख्या हैं जिनके मध्यस्थ यदि अ, क, ग,…मान लिए जायँ तो २४१ प्रक्रम से, क्रम से पदों के मध्यस्थ अअ्ु$_1$, कअ्ु$_1^2$, गअ्ु$_1^3$, .. होंगे और इन मध्यस्थों के योग से २४० वें प्रक्रम से इनके योग फ($ल_0$+च) – फ($ल_0$) इसका अर्थात् फ(ल) के गति का मध्यस्थ छोटा होगा; इसलिये अ्ु$_1$ का ऐसा छोटा मान मान सकते

हैं जिससे उससे भी छोटा फ (ल) की गति का मध्यस्थ होने से फ (ल) की गति चाहे जिस निर्दिष्ट संख्या से छोटी हो सकती है। क्योंकि जैसा जैसा मध्यस्थ छोटा होता है असंभव संख्या का मान भी वैसा वैसा छोटा होता है (१५ वां प्रक्रम देखो) इस पर से कह सकते हो कि जैसा जैसा मिश्रचल, ल चलेगा वैसावैसा फ (ल) भी चलेगा अर्थात् मिश्रचल ल घटता चलेगा तो फ (ल) भी घटता जायगा और यदि ल घटता चलेगा तो फ (ल) भी घटता जायगा।

इसलिये यदि पा विन्दु घूम कर एक चक्र बनावेगा तो पो भी घूम कर उसी दिशा से एक चक्र बनावेगा और पा घूमते घूमते जब फिर अपने मूल स्थान पा पर पहुँचेगा तो उसी समय पो भी अपने चक्र में घूम कर फिर अपने मूल स्थान पो पर पहुँचेगा। (२४३ वां प्रक्रम का क्षेत्र देखो)। अब प्रकृत में इस बात का विचार करना है कि यदि पा चल कर एक छोटा चक्र बनावे तो उतने समय में पो चल कर जो अपने चक्र की परिधि पर घूम कर अपने मूल स्थान पर आवेगा उस समय फ (ल) के उपकरण की क्या गति होगी।

कल्पना करो कि आ एक विन्दु है जिसका भुज$=$ य$_0$ और कोटि र, है तो ल$=$य$_0+ i$र, (२४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) अब इस विचार में दो भेद हैं।

(१) जब य $+ i$र$_0$ यह फ (ल)$=0$ इसमें का कोई अव्यक्त-मान नहीं है अर्थात् ल के स्थान में य$_0 + i$र$_0=$ल$_0$ के उत्थापन से फ (ल$_0$) का मान जब शून्य से भिन्न मू' आ है।

(२) जब फ (ल)$=0$ इसका एक मूल य$_0+ i$र$_0$ है अर्थात् ल के स्थानमें य$_0+i$र$_0=$ल$_0$ इसके उत्थापन से जब फ (ल$_0$)$=0$।

(१) स्थिति में आ संबन्धी मान फ (ल$_0$) का ओ कल्पना करो (२४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) जहां मू' ओ शून्य नहीं है। मान लो कि ल=ल$_0$+च जहां च=श्रु$_1$ (कोज्याप$_1$ + ${}^{\iota}$ज्याप$_1$) और कल्पना करो कि पा जो कि ल का द्योतक है आ के चारो ओर एक बहुत ही छोटा वक्र बनाता है। पो जो कि फ (ल) का द्योतक है जब आ से चल कर पा विन्दु पा$_1$ पर पहुँचा अर्थात् जब ल की गति का मध्यस्थ आ पा=श्रु$_1$ हुआ उस समय ओ से चल कर पो$_1$ पर पहुँचा। इसलिये उस समय फ (ल) की गति ओ पो$_1$ से द्यातित होगी अर्थात् फ (ल) के गति का मध्यस्थ ओ पो$_1$ होगा जो कि इसी प्रक्रम के आदि में लिखी हुई युक्ति से श्रु$_1$ को बहुत छोटा मानने से एक निर्दिष्ट संख्या मू' ओ से सर्वदा छोटा होगा। इसलिये श्रु$_1$ को ऐसा छोटा मान सकते हैं कि प आ की चारो ओर एक बहुत छोटा वक्र बनावे जिसके वश फ (ल) का द्योतक पो जो ओ की चारो ओर घूम कर वक्र बनाता है उसके बाहर मू' विन्दु पड़े। इस पर से यह सिद्ध होता है कि पा जो ऐसे वक्र मे घूमा है जिसके अन्तर्गत कोई ऐसा ल का मान नहीं है जिसके उत्थापन से फ (ल)=०हो तो तत्सम्बन्धी फ(ल) का द्योतक पो जो वक्र बनावेगा उसके बाहर मू' के पड़ जानेसे उस समय फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी (२४३ प्रक्रम देखो)।

(२) स्थिति में मानो कि फ (ल)=०इसका एक मान जो इसमें म वार आया है वह य$_0$+${}^{\iota}$र$_0$=ल$_0$ यह है तो

$$\text{फ}(\text{ल})=(\text{ल}-\text{ल}_0)^{\text{म}}\ \text{फा}(\text{ल})=\text{च}^{\text{म}}\text{फा}(\text{ल})$$

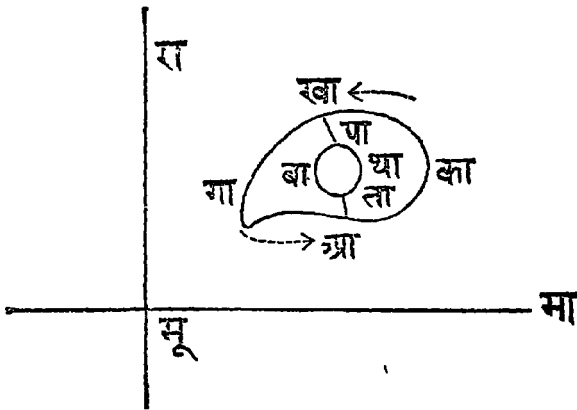
$$=\text{श्रु}_1^{\text{म}}(\text{कोज्यामप}_1+{}^{\iota}\text{ज्यामप}_1)\ \text{फा}(\text{ल})$$

इस स्थिति में म ओ=० इसलिये जब या एक सीमित वक्र आ की चारो ओर बनावेगा उतने ही में अपने मूल स्थान पर पहुँचेगा। इसलिये फ (ल) के उपकरण की गति सीमित वक्र के भीतर मू' के पड़ जाने से २ का अपवर्त्य होगी जो कि ऊपर के समीकरण से

व प. फ (ल) =(मस, + उप फा (ल) यह समीकरण २४१ प्रक्रम से बनता है इस पर से विदित हो सकती है। क्योंकि फ (ल) के उपकरण की गति,=गति (मव,) + फा (ल) के उपकरण की गति, परन्तु फा (ल)=० इसका कोई मान या के सीमित वक्र के अन्तगत है; इसलिये (१) स्थिति से फा (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी और पा के एक बेर आ के चारो ओर भ्रमण करने स ओर श्रु, की प्रवृत्ति आ मूल विन्दु ही के होने से ष, की गति २ होगी। इसलिये इसे म से गुण देने से फ (ल) के उपकरण की गति २ म हुई। इससे सिद्ध हुआ कि यदि पा बहुत छोटा एक सीमित वक्र बनावे जिसके अन्तर्गत फ (ल)=० इस एक अ मूल जो कि म वार है, प अ हो तो फ (ल) के उपकरण की वृद्धि २म होगी।

२४५। काशी का सिद्धान्त (Cauchy's Theorem)

जब ल दो विरुद्ध दिशा में चल कर एक ही रेखा को बनावेगा (२४२ वां प्रक्रम देखो); इसलिये फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। जैसा कि उसी प्रक्रम में एक क्षेत्र के भीतर कई क्षेत्र खण्डों को बनाकर दिखला आए हैं। इसलिये समग्र क्षेत्र खण्डों की सीमा पर ल के चलने से जो ल के उपकरण की गति होगी वह पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमा पर

ल के घूमने से जो ल के उपकरण की गति होगी उसके तुल्य होगी, इसलिए क्षेत्र खण्डों के वश से जो फ (ल) अपने क्षेत्र के भीतर अनेक क्षेत्र खण्ड बनावेगा उनकी सब सीमाओं के वश से वही फ (ल) के उपकरण की गति होगी जो फ (ल) के पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमाओं पर चलने से उत्पन्न होती है।

कल्पना करो कि या रा के धरातल में एक कोई सीमित वक्र है। और पहिले मानो कि इसके भीतर ल के जो अनेक मान हैं किसी के वश से फ (ल)=० यह ठीक नहीं होता तो २४२ प्रक्रम के (१) से कहेंगे कि चाहे वक्र के भीतर कितने ही क्षेत्रखण्ड किए जायँ और सभों की सब सीमाओं पर वा बड़े वक्र की परिधि पर ल चले परन्तु फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य ही होगी। दूसरी बार ऐसा मानो कि वक्र के भीतर एक ऐसा विन्दु है जिसके वश से जो ल होगा वह फ (ल)=० इसके एक मूल के, जो कि म वार आया है,

तुल्य है। वक्र के भीतर एक बहुत छोटे सीमित वक्र पा बा ता था को मान लो कि इस विन्दु को चारो ओर से घेरे हुए है अर्थात् इसके भीतर में वह विन्दु पड़ा है तो वक्र की आ का खा गा परिधि के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति होगी वह आ का खा गा था ता, खा गा आ ता बा पा, पा बा ता था के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की भिन्न भिन्न गति होंगी उनके योग के तुल्य होगी। परन्तु पहिले दो क्षेत्र खण्डों के बाहर उस विन्दु के पड़ जाने से तत्सम्बन्धी गति शून्य होगी और तीसरे के भीतर उस विन्दु के पड़ जाने से उसकी परिधि पर वा बड़े क्षेत्र की परिधि आ का खा गा पर ल के चलने से २४२ प्रक्रम के (२) स्थिति से फ (ल) के उपकरण की समग्र गति २ म ग होगी। इसी प्रकार यदि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर दूसरी तीसरी इत्यादि ऐसे विन्दु हों जिनके वश से जो ल के मान भिन्न भिन्न होंगे वे क्रम से फ (ल) = ० इसके उन मूलों के समान हों जो क्रम से समीकरण में म′ म″ इत्यादि वार आए हों तो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति = २ ग (म + म′ + म″ + इत्या) यह होगी। इस पर से काशी ने यह सिद्धान्त निकाला—

यदि मिश्रचल ल एक सीतिम वक्र के भीतर हो और उन ल के मानों के भीतर जानना हो कि फ (ल) = ० इसके कितने मूल पड़े हैं तो उस वक्र की परिधि पर ल के चलाने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति उत्पन्न हो उसमें २ ग के भाग देने से लब्धि निकालो। लब्धि की संख्या जो हो उतने ही कहेंगे कि क्षेत्र फल के भीतर के ल मानों के बीच फ(ल)=० इसके मूल है।

२४६। कल्पना करो कि मिश्रचल ल का अकरणी गत धन

$$फ(ल) = अ_0 ल^न + अ_1 ल^{न-1} + अ_2 ल^{न-2} + \cdots \cdots + अ_{न-1} ल + अ_न$$

यह एक फल न घात का है। इसमें यदि फ (ल)=० तो जानना है कि संभव और असंभव मिल कर ल के कितने मान होंगे। कल्पना करो कि ल एक ऐसे बड़े वृत्त को बनाता है जिसके अन्तर्गत ही सब ल के मान पड़े हैं। उसके बाहर कोई भी ल का मान नहीं पड़ा है। यदि

$$फ(ल) = ल^न (अ_0 + अ_1 ल' + अ_2 ल'^2 + \cdots + अ_न ल'^न)$$
$$= ल^न फा(ल'), \text{ जहां } ल' = \frac{1}{ल}$$

ऐसा लिखें तो ल', जिसका मध्यस्थ ल के मध्यस्थ के हरात्मक मान के तुल्य है वह, जब ल एक बड़ा वृत्त बनावेगा, तब एक छोटा वृत्त बनावेगा। बड़ा वृत्त बड़े से बड़ा ऐसा बना सकते हैं जिसके वश से ल का मध्यस्थ बहुत बड़ा और ल' का ऐसा छोटा हो सकता है कि जिसके वश से ल' जो छोटा वृत्त बनावेगा उसके अन्तर्गत फा (ल',=० इसका कोई मूल न हो तब फ (ल) = $ल^न$ फा (ल') इससे

फ (ल) के उपकरण की गति। परन्तु फा (ल')=० इसका कोई मू ल' के छोटे वृत्त के भीतर नहीं है; इसलिये फ (ल) के उपकरण की गति= $ल^न$ के उपकरण की गति + फा (ल) के उपकरण की गति = $ल^न$ के उपकरण की गति।

परन्तु यदि ल=भु (को ज्या प + ाज्या प) तो $ल^न = भ_{ु^न}$ (को ज्या न प + ाज्या न प) इसलिए प की वृद्धि परिधि पर एक बेर पूरा घूमने से २π होगी। इसलिए फ (ल) के उपकरण की

समग्र गति = न × २π, इसमें २π का भाग देने से फ (ल)=० इसमें ल मानों की संख्या न होगी। इस प्रकार काशी के सिद्धान्त से सिद्ध हुआ कि किसी न घात समीकरण में अव्यक्त का मान न विध होगा जो कि २४ वें प्रक्रम में अनुगम और अनुमान से सिद्ध किया है।

ध्यान देकर देखो तो यह सिद्धान्त समीकरण मीमांसा में सब सिद्धान्तों का मूल सिद्धान्त है। इसी पर से और और सिद्धान्तों की सृष्टि हुई है। और इसी पर से यह भी सिद्ध होता है कि प्रत्येक समीकरण में कुछ न कुछ अव्यक्त का मान रहता है जिसके उत्थापन से वह समीकरण, फ (ल)=० ऐसा होगा।

२४७। (१) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग ४ संख्या के तुल्य होता है ? इस प्रश्न को साधारण बीजगणित की युक्ति से ऐसे करते हैं। मान लो कि वह संख्या य है तो आलाप से $य^2 = ४ \therefore य^2 - ४ =$ तब गुण्य गुणक खण्ड वा वर्ग समीकरण की युक्ति से $य = \pm २$ अर्थात् कहोगे कि वह संख्या धन वा ऋण २ है। इस तरह से उत्तर द्विविध हुआ।

(२) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग मूल ± २ है।
(३) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल्य $+ २$ है।
(४) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल $- २$ है।

बीजगणित की साधारण युक्ति से ऊपर के तीनों प्रश्नों के उत्तर में लोग एक ही साधारण संख्या ४ कहते हैं। परन्तु ध्यान देकर यदि सोचो तो तीनों के उत्तर में परस्पर भ्रम न पड़े इसके लिये तीनों के लिये कुछ सङ्केत कल्पना करना चाहिए

अर्थात् जिस ४ के मूल से धन २ और ऋण २, दोनों का ग्रहण करते हैं उस ४ से भिन्न होने के लिये ४ में एक ऐसा सङ्केत करना चाहिये जिससे यह वोध हो कि ऋण मूल २ के वर्ग के समान यह है। जिसमें मूल लेने में ऋण २ ही का ग्रहण किया जाय। इसी प्रकार ४ में एक दूसरा सङ्केत भी ऐसा होना चाहिए जिससे समझा जाय कि यह +२ का वर्ग है और इस का मूल +२ ही अपेक्षित है। और जिस ४ में ये दोनों सङ्केत मिले हों उससे समझना चाहिए कि साधारण ४ प्रसिद्ध है। इसी प्रकार बीजगणित से वा इस ग्रंथ से प्रसिद्ध है कि ४ का घनमूल त्रिविध होगा; इसलिये अलग अलग इन तीनों के घन को समझने के लिये ४ में तीन सङ्केत कल्पना करनी चाहिए और जिस ४ में तीनों सङ्केत एकट्ठे देखे जांय उसे समझना चाहिए कि साधारण ४ है। इस प्रकार किसी साधारण संख्या आ का न घात मूल न विध होते हैं। उन न ओं के न घात को अलग अलग समझने के लिये आ में अलग अलग न सङ्केत करना चाहिए और जिस आ में न ओं सङ्केत एकट्ठा पाए जांय उससे समझना चाहिए कि साधारण प्रसिद्ध संख्या आ है।

२४८। आ साधारण संख्या के न घात मूल का एक मान जो पाटीगणित से आता है उसे अलग अलग १ के न घात मूलों से गुण देने से न गुणन फल आ के न विध न घात मूलों के मान होते हैं (८४ वां प्रक्रम देखो)।

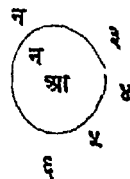
कल्पना करो कि डिमाइवर के सिद्धान्त से १ के न घात मूल का एक मान, $अ_1 =$ कोज्या $\frac{२\pi}{न} + \iota$ ज्या $\frac{२\pi}{न}$ है (६३ वां प्रक्रम देखो) तो ६३ वें प्रक्रम से सब मान $अ_1, अ_1^२, अ_1^३, \ldots\ldots अ_1^न$

होंगे। इन्हें पाटीगणित से जो एक मान, आ के न घात मूल का आया है उससे गुण देने से क्रम से जो आ के न घात मूलों के मान आवेंगे इन्हें क्रम से पहिला, दूसरा, तीसरा, इत्यादि कहो। संख्या में इन्हें १, २, ३,......न संज्ञक कहेंगे।

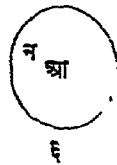
न १ २

न आ ३

६ ५ ४

इस सङ्केत से समझो कि वह आ है जिसके सब न घात मूल अपेक्षित हैं जो कि ऊपर की युक्ति से साधारण आ संख्या है। वृत्तमध्यगत आ के शिर से बाईं ओर झुका उपरिगत, वृत्तान्तर्गत न से समझो कि यह आ अपने न घात मूलों के न घातों से बना है। परिधि पर तुल्यान्तरित १, २, ३, न, से समझो कि आ के सब न घात मूल लिए गए हैं।

इससे समझो कि वह आ है जिसका पहिला, और दूसरा न घातमूल छोड़ और सब न घातमूल अपेक्षित हैं।

इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला, और दूसरा न घातमूल अपेक्षित है।

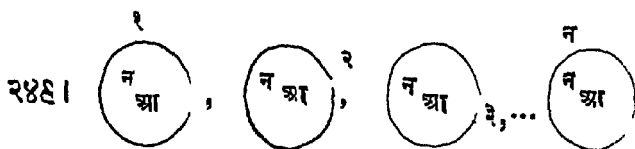
इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला और छठवां न घातमूल अपेक्षित है।

इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल छठवां न घातमूल अपेक्षित है।

इसी प्रकार संख्याओं के उत्थापन से

इससे समझना चाहिए चाहिए कि ८ का पहिला जो घनमूल है उसका घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल पहिला घनमूल अपेक्षित है।

इससे समझना चाहिए कि ८ का दूसरा घनमूल जो होगा उसका यह घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल दूसरा घनमूल अपेक्षित है।

इससे समझना चाहिए कि यह वह ८ है जिसका तीनों घनमूल अपेक्षित हैं, इसलिये इसे कहेंगे कि यह प्रसिद्ध संख्या ८ है।

२४९।

ये सब न घातमूल के बश साधारण आ संख्या के अङ्क हैं। क्योंकि पहिले के ऊपर यथा क्रम दूसरे, तीसरे,......न संख्यक अङ्कों को ऐसे रख दें जिसमें सब आ और परिधि के भीतर का न एकट्ठा हो जाय तो ऐसा हो जायगा जो कि साधारण आ संख्या के तुल्य है।

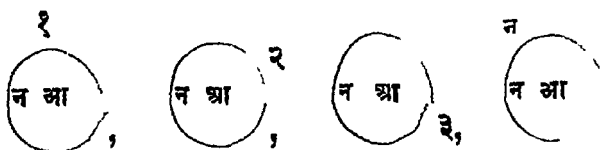
न के स्थान में १, २, ३,...के उत्थापन से कह सकते हो कि १ घातमूल के वश साधारण आ संख्या में १ अङ्क, २ घातमूल के वश २ अङ्क, ३ घातमूल के वश ३ अङ्क, ४ घातमूल के वश ४ अङ्क,...और न घातमूल के वश न अङ्क हैं। इसलिये

$$\text{साधारण आ संख्या} = \overset{1}{\left({}^{1}\text{आ}\right)} = \overset{1}{\underset{2}{\left({}^{2}\text{आ}\right)}}$$

$$= {}_{3}\overset{1}{\underset{2}{\left({}^{3}\text{आ}\right)}} = \cdots = \overset{न\ 1}{\left({}^{न}\text{आ}\right)}\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$$

इस पर से कह सकते हैं कि न को अनन्त मानने से साधारण आ संख्या में अनन्त अङ्क बना सकते हैं।

साधारण आ संख्या को १ मान कहें तो २ घात के मूल के वश इसमें दो अङ्क होंगे इस लिये $\overset{1}{\left({}^{2}\text{आ}\right)}$ इसमें वा $\underset{2}{\left({}^{2}\text{आ}\right)}$ इसमें एक ही अङ्क अर्थात् साधारण आ संख्या का आधा अङ्क रहने से कहेंगे कि ये दोनों $\frac{1}{2}$ मान है।

इसी प्रकार न घात मूल के वश साधारण आ संख्या में न अङ्क रहने से इसको यदि १ मान कहें तो

इन सब में केवल एक एक अङ्क रहने से सब को अलग अलग कहेंगे कि $\frac{१}{न}$ मान हैं यदि न=∞ तो $\frac{१}{न}$=० और यदि न=म तो $\frac{१}{न}=\frac{१}{न}$ होगा क्योंकि +म में जब आ को १ मान माना है तो म के विपरीत −म में १ मान से विपरीत −१ मान होगा।

इसी प्रकार (न आ)^{१} २ इसको कहेंगे कि

$\frac{२}{न}$ मान है। $_{न-१}$(न अ)$^{१\ २}$ २ इसे कहेंगे कि

$\frac{न-१}{न}$ मान है। इसी प्रकार सर्वत्र समझना चाहिए।

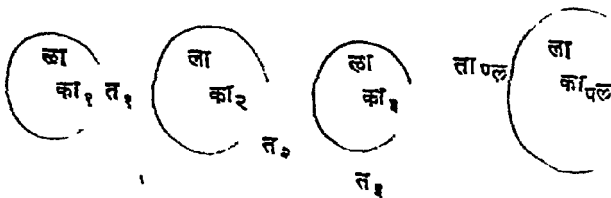
२५०। कल्पना करो कि $० = फ(य) = अ_० य^{\frac{प}{म}} + अ_१ य^{\frac{प_१}{म_१}} + अ_२ य^{\frac{प_२}{म_२}} + \cdots + अ_{न-१} य^{\frac{प_{न-१}}{म_{न-१}}} + अ_न$ यह एक समीकरण है जिसमें य के घाताङ्क सब धनात्मक भिन्न संख्या हैं जिनमें सबसे बड़ा $\frac{प}{म}$ है। $म, म_१, \ldots म_{न-१}$ का लघुतमापवर्त्य ल समझो। ल में $म, म_न, \cdots म_{न-१}$ के भाग देने से लब्धि क्रम से $ल, ल_१, ल_२, \cdots ल_{न-१}$ समझो तो

$$फ(य) = अ_0\, य^{\frac{प\, ल}{म\, ल}} + अ_1\, य^{\frac{प_1 ल_1}{म_1 ल_1}} + \cdots$$

$$+ अ_{न-1}\, य^{\frac{प_{न-1}\, ल_{-1न}}{म_{न-1}\, ल_{न-1}}} + अ_न = 0$$ इसमें यदि $य^{\frac{1}{मल}} = य^{\frac{1}{ला}} = र$ तो

$$फ(य) = फा(र) = अ_0\, र^{प\, ल} + अ_1 र^{प_1\, ल_1} + \cdots$$
$$अ_{न-1}\, र^{प_{न-1} ल_{न-1}} = 0$$

अब यह र के अकरणी गत अभिन्न फल के रूप में समीकरण हुआ। जिससे काशी के सिद्धान्त से र का मान प क विध आवेंगे। मान लो कि वे र के मान क्रम से $क_1, क_2, क_3, \cdots क_{ल}$ हैं।

अब साधारण गणित की रीति से $क_1^{मल} = क_1^{ला} = का_1$, $क_2^{ला} = का_2$, $क_3^{ला} = का_3$ ...... $क_{पल}^{ल} = का_{मल}$ कहें और साधारण $का_1$, $का_2$ ......इत्यादि संख्याओं के ला घात मूलों के मानों में $क_1, क_2$,...को $त_1$, $त_2$, $त_3$.. संख्या कहें तो ($य = र^{ला} = र^{पल}$, इसलिये २४६ प्रक्रम से

ये सब य के मान होंगे। $का_1$, $का_2$, $का_{पल}$ साधारण संख्याओं को एक एक मान कहो तो २४७ प्रक्रम से $\frac{1}{ला}=\frac{1}{मल}$ प्रत्येक मान होगा; इसलिये इनका योग$=\frac{पल}{मल}=\frac{प}{म}$ इतने मान य के होंगे। इस पर से सिद्ध होता है कि समीकरण में अव्यक्त का सबसे बड़ा धन घात जो होता है वह चाहे अभिन्न वा भिन्न हो अव्यक्त के मानों की संख्या उसी के तुल्य होगी।

२५१। कल्पना करो कि $न_1$, $न_2$, $न_त$ ये उत्तरोत्तर अधिक धनात्मक भिन्न वा अभिन्न संख्या हैं तो बीजगणित से $-न_1, -न_2, -न_3 \ldots\ldots -न_त$ ये ऋण संख्या में उत्तरोत्तर अल्प होंगी जिनमें सबसे बड़ा $-न_1$ है।

मानो कि $फ(य)=अ_1 य^{-न_1}+अ_2 य^{-न_2}+अ_3 य^{-न_3}+\ldots+अ_त य^{-न_त}=0$ इसमें जानना है कि य के कितने मान हैं।

मान लो कि य के र विध मान हैं तो फ (य) को $य^{न_त}$ इस से गुण देने से जो $य^{न_त} फ(य)=0$ यह समीकरण नया होगा उसमें अब र+न इतने मान य के होंगे परन्तु

$$य^{न_त} फ(य)=अ_1 य^{न_त-न_1}+अ_2 य^{न_त-न_2}+\ldots+अ_त=0$$

जहाँ धनात्मक भिन्न वा अभिन्न य का सब से बड़ा घात $न_त-न_1$ यह होगा इसलिये २४८ प्रक्रम से इसमें $न_त-न_1$ इतने य के मान होंगे; इसलिये

$र + न_त = न_त - न_१, \therefore र = -न_१$

इसलिये $फ(य) = अ_१ य^{-न_१} + अ_२ य^{-न_२} + अ_३ य^{-न_३} + \cdots + अ\, य^{-न_त} = ०$ इसमें य के सब से बड़े घात की संख्या जो $-न_१$ है उतने य के मान होंगे यह सिद्ध हुआ। इसलिये अब साधारणतः यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि किसी समीकरण में अव्यक्त की सब से बड़ी जो घात संख्या होती है उतने ही विध उस समीकरण में अव्यक्त के मान आवेंगे चाहे वह घात संख्या अभिन्न वा भिन्न धनात्मक वा ऋणात्मक हो। जैसे

$$फ(य) = अ_० य^न + अ_१ य^{न-१} + अ_२ य^{न-२} + \ldots\ldots + अ_{न-१} य + अ_त = ०$$

इस समीकरण में जहां न अभिन्न और धन है यदि $य = \frac{१}{र}$

तो नया समीकरण $\frac{अ_०}{र^न} + \frac{अ_१}{र^{न-१}} + \frac{अ_२}{र^{न-२}} + \ldots\ldots + \frac{अ_{न-१}}{र} + अ_न$

$$= अ_० र^{-न} + अ_१ र^{-(न-१)} + अ_२ र^{-(न-२)} + \ldots\ldots + अ_{न-१} र^{-१} + अ_न र^० = ०$$

ऐसा हुआ, जहां बीजगणित की युक्ति से र का सब से बड़ा घात ० है। इसमें जितने र के मान आवेंगे उनकी संख्या ल कहें तो इस समीकरण को $र^न$ से गुण देने से जो दूसरा समीकरण बनेगा उसमें र के मान $ल + न$ विध होंगे परन्तु समीकरण को $र^न$ से गुण देने से जो दूसरा समीकरण $अ_० + अ_१ र + अ_२ र^२ + \cdots + अ_न र^न = ०$

ऐसा बनेगा इसमें र के मान न विध आवेंगे इसलिये

$$ल + न = न \therefore ल = ०$$

इससे सिद्ध होता है कि किसी हरात्मक समीकरण में यदि छेद, समीकरण को $र^न$ से गुण कर न उडाए जायँ तो उसमें शून्य विध अव्यक्त का मान होगा। यह सब अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों को विशेष ध्यान देना उचित है। मेरा लिखना इस विषय पर कैसा है इसे भी ध्यान देकर विचारें।

२५१। यह दिखलाना है कि

$$\frac{आ^2}{य-अ}+\frac{का^2}{य-क}+\frac{खा^2}{य-ख}+\cdots+\frac{आ^2}{य-अ}-ट=0$$

इसमें य का मान कोई असंभव संख्या नहीं है।

सम्भव हो तो मानो कि $य=प+व\sqrt{-१}$ तो दूसरा मान भी य का एक $प-व\sqrt{-१}$ होगा। इन दोनों मानों का समीकरण में उत्थापन देने से जो समीकरण के दो मूल होंगे उनमें प्रथम में दूसरे को घटा देने से

$$व\left\{\frac{आ^2}{(प-अ)^2+व^2}+\frac{का^2}{(प-क)^2+व^2}+\frac{खा^2}{(प-ख)^2+व^2}+\cdots+\frac{ञ^2}{(प-ञ)^2+व^2}\right\}=0$$

अब जब तक $व=0$ न मानोगे तब तक यह समीकरण असंभव होगा। क्योंकि कोष्टकान्तर्गत सब पद धन हैं। वे मिल कर शून्य नहीं हो सकते। इसलिये समीकरण की सत्यता में शून्य के समान व का मान होने से सिद्ध हुआ कि इसमें अव्यक्त का कोई मान असम्भव संख्या नहीं है।

२५१। $य_1, य_2, य_3, \cdots\cdots य_न$ ये न अव्यक्त हैं। इनके वश से नीचे जो न समीकरण लिखे हैं उनसे इनका मूल जानना है

$$य_1 + य_2 + य_3 + \ldots\ldots + य_न = 0$$
$$अ_1 य_1 + अ_2 य_2 + अ_3 य_3 + \ldots\ldots + अ_न य_न = 0$$
$$अ_1^2 य_1 + अ_2^2 य_2 + अ_3^2 य_3 + \ldots\ldots + अ_न^2 य_न = 0$$
$$अ_1^3 य_1 + अ_2^3 य_2 + अ_3^3 य_3 + \ldots\ldots + अ_न^3 य_न = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$अ_1^{न-2} + अ_2^{न-2} य_2 + अ_3^{न-2} य_3 + \ldots\ldots + अ_न^{न-2} य_न = 0$$
$$अ_1^{न-1} य_1 + अ_2^{न-1} + अ_3^{न-1} य_3 + \ldots\ldots + अ_न^{न-1} य_न = क$$

इन समीकरणों को क्रम से $स_{न-1}, स_{न-2}, स_{न-3}, \ldots\ldots$ $स_2, स_1$, १ से गुणा कर जोड देने से और ऐसी कल्पना करने से कि $स_{न-1}, स_{न-2}$, इत्यादि जो कि अभी अविदित हैं ऐसे हैं कि इनके वश से जोड़ने में $य_2, य_3, \ldots\ldots य_न$ इनके अलग अलग गुणक सब शून्य हो जाते हैं तो

$$य_1 (अ_1^{न-1} + स_1 अ_1^{न-2} + स_2 अ_1^{न-3} + \ldots\ldots$$
$$+ स_{-2} अ_1 + स_{न-1}) = 0$$

$स_{न-1}, स_{न-2} \ldots\ldots$ इत्यादि में ऐसा धर्म मानने से सिद्ध होता है कि

$$फ (ल) = ल^{न-1} + स_1 ल^{न-2} + स_2 ल^{न-3} + \ldots\ldots +$$
$$स_{न-2} ल + स_{न-1} = 0$$

इस समीकरण के $अ_2, अ_3, \ldots\ldots अ_न$ ये सब अव्यक्तमान हैं इसलिये $फ (ल) = (ल - अ_2) (ल - अ_3) \ldots\ldots (ल - अ_न)$ इसमें ल के स्थान में $अ_1$ का उत्थापन देने से $य_1$ का गुणक

$(अ_1 - अ_2) (अ_1 - अ_3) \ldots\ldots (अ_1 - अ_न)$ यह आवेगा; इसलिये

$$य_1 = \frac{क}{(अ_1 - अ_2)\cdot(अ_1 - अ_3)\cdots(अ_1 - अ_न)}$$

इसी प्रकार साजात्य धर्म रहने से $य_2$, $य_3$, इत्यादि के मान आ जायंगे।

२५२। य, र, ल इत्यादि न अव्यक्त हैं। उनके मान नीचे लिखे हुए न समीकरणों से निकालने हैं।

$$\frac{य}{अ_1 - अ} + \frac{र}{अ_1 - क} + \frac{ल}{अ_1 - ख} + \ldots\ldots = 1$$

$$\frac{य}{अ_2 - अ} + \frac{र}{अ_2 - क} + \frac{ल}{अ_2 - ख} + \ldots\ldots = 1$$

....

$$\frac{य}{अ_न - अ} + \frac{र}{अ_न - क} + \frac{ल}{अ_न - ख} + \ldots\ldots = 1$$

समीकरणों के रूप से कह सकते हैं कि $अ_1, अ_2, अ_3, \ldots\ldots अ_न$ ये $\frac{य}{अ - अ} + \frac{र}{अ - क} + \frac{ल}{अ - ख} + \ldots\ldots = 1$ इस न घात समीकरण में अ के मान हैं। मान लो कि अ = अ — ट तो इसके उत्थापन से और पक्षान्तरानयन से

$$1 + \frac{य}{ट} + \frac{र}{ट + क - अ} + \frac{ल}{ट + ख - अ} + \ldots\ldots = 0$$

छेदगम करने से इसका रूप

$$ट^न + आ_1 ट^{न-1} + आ_2 ट^{न-2} + \ldots\ldots + आ_न = 0$$ ऐसा होगा जहां $आ_न = य(क - अ)(ख - अ)$

परन्तु जब ज=अ—ट ∵ ट=अ—ज; इसलिये ट के मान सब अ—$ज_1$, अ—$ज_2$, अ—$ज_3$,........अ—$ज_न$ ये होंगे इसलिये २५ वें प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से

$$आ_न = (अ - ज_1)(अ - ज_2)(अ - ज_3)\ldots\ldots = (-1)^न य (क - अ)(ख - अ)\ldots\ldots$$

$$\therefore य = \frac{(अ - ज_1)(अ - ज_2)(अ - ज_3)\ldots}{(अ - क)(अ - ख)\ldots\ldots\ldots}$$

इसी प्रकार ज=क—ट, ज=ख—ट, इत्यादि मानने से, ल इत्यादि के मान आ जायंगे।

२५५। सिद्ध करना है कि ख, $ख^2$, $ख^3$,..... $ख^न$ ये न संख्यायें हैं।

इनमें से म, म संख्यायें ले लेकर उनके गुणनफल निकालें तो सब गुणनफलों के योग को सिद्ध करना है कि

$$\frac{(ख^न - 1)(ख^{न-1} - 1)\ldots(ख^{न-म+1} - 1)}{(ख - 1)(ख^2 - 1)\ldots(ख^म - 1)} ख^{\frac{म(म+1)}{2}}$$

मान लो कि

फ $(य) = (य + ख)(य + ख^2)\ldots(य + ख^न) = य^न + प_1 य^{न-1} + \cdots + प_म य^{न-म} + \cdots + प_न$,...(१) तो $प_म$ का मान जानने के लिये २५ प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से (१) य के स्थान में $\frac{य}{ख}$ का उत्थापन देने से और $ख^न$ से गुणन देने से

$$(य+ख^{२})(य+ख^{३})\ldots(य+ख^{न+१}) = य^{न} + प^{१} ख य^{न-१} + \cdots + प_{न-१} ख^{न-१} य + प_{न} ख^{न} \ldots(२)$$

(१) और (२) से

$$(य+ख^{न+१})(य^{न} + प_{१} य^{न-१} + \cdots + प_{न-१} य + य_{न})$$
$$=(य+ख)(य^{न} + प_{१} ख य^{न-१} + \cdots + प_{न-१} ख^{न-१} य + प_{न} ख^{न})$$

दोनों पक्षों के $य^{न-म+१}$ के गुणकों को समान करने से

$$प_{म} + ख^{न+१} प_{म-१} = प_{म} ख^{म} + प_{म-१} ख^{म}$$

$$\therefore प_{म} = \frac{ख^{म}(ख^{न-म+१} - १)}{ख^{म} - १} प_{म-१} \ldots\ldots\ldots\ldots(३)$$

$$और\ प_{१} = ख + ख^{२} + \cdots + ख^{न} = \frac{ख(ख^{न} - १)}{ख - १}$$

(३) में म के स्थान में १, २, ३, इत्यादि के उत्थापन से $प_{म}$ का मान वही होगा जो कि ऊपर लिख आए हैं।

२५६। फ (य) = ० इसमें मान लो कि अव्यक्त का एक मान अ है तो फ (य) = (य − अ) फा (य)

$$\therefore \frac{फ(य)}{य} = \left(१ - \frac{अ}{य}\right) फा(य)$$

$$और\ ला \frac{फ(य)}{य} = -\left(\frac{अ}{य} + \frac{१}{२}\frac{अ^{२}}{य^{२}} + \cdots\right) + ला\ फा(य)$$

इसलिये यदि ला $\frac{फ(य)}{य}$ इसका मान य के ऋण और धन घात रूप पदों की श्रेढी में निकले तो $\frac{१}{य}$ का जो गुणक होगा

वह दूसरे पक्ष के $\frac{१}{य}$ के गुणक – अ के समान अवश्य होगा यदि ला फा (य) के मान में य के सब धन ही घात हों तो।

इस पर से फ (य)= ० इसका सब से छोटा मूल निकलेगा तैसे मान लो कि फ (य)= ० में एक से एक बड़े य के अ, क, ख, ग इत्यादि मान हैं तो

$$फ (य) = अ_० (य - अ) (य - क) (य - ख)$$

$$\frac{फ (य)}{य} = अ_० \left(१ - \frac{अ}{य}\right) (य - ख) (य - ख) \ldots$$

$$= का \left(१ - \frac{अ}{य}\right) \left(१ - \frac{य}{क}\right) \left(१ - \frac{य}{ख}\right) \ldots$$

जहाँ $का = अ_० \times - क \times - ख \times - \ldots\ldots\ldots$

तो $ला \frac{फ (य)}{य} = ला\, क + ला \left(१ - \frac{अ}{य}\right) + ला \left(१ - \frac{य}{क}\right)$

$+ ला \left(१ - \frac{य}{ख}\right) + \ldots$ अब यदि य, अ और क के बीच में हो तो

$$ला \left(१ - \frac{अ}{य}\right), ला \left(१ - \frac{य}{क}\right), ला \left(१ - \frac{य}{ख}\right),$$

इनसे जो श्रेढी होगी उसमें ऐसे पद होंगे जिनमें बहुतों में य के ऋण घात और बहुतों में य के धन घात रहेंगे।

जैसे यदि $फ (य) = य^न + ख\, य - क = ०$

तो $\frac{फ (य)}{य} = ख - \frac{क}{य} + य^{न-१} = ख \left(१ - \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख}\right)$

इसलिये $ला \frac{फ(य)}{य} = ला\ ख + ला \left(१ - \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख}\right)$

$$= ला\ ख - ल - \frac{१}{२}ल^{२} - \frac{१}{३}ल^{३} \ldots$$

यदि $ल = \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख} = \frac{क}{खय}\left(१ - \frac{य^{न}}{क}\right)$

अब जिन जिन $ल, ल^{न+१}, ल^{२न+१}$ इत्यादि पदों में $\frac{१}{य}$ के गुणक हैं उनको अलगाने से लघुतम अव्यक्त मान $= \frac{क}{ख} - \frac{क^{न}}{ख^{न+१}}$

$$+ \frac{२ न क^{२न-१}}{२. ख^{२न+१}}$$

$$- \frac{३ न (३ न - १)}{२.३} \frac{क^{३न-२}}{ख^{३न+१}} + \ldots\ldots$$

२५७। इसी प्रकार $फ(य) = ०$ इसमें $अ_{१}, अ_{२}, \ldots अ_{म}$ ये अव्यक्त मान एक से एक बड़े और अवशिष्ट मानों से अल्प हैं तो

$$फ(य) = (य - अ_{१})(य - अ_{२})(य - अ_{३})\ldots\ldots(य - अ_{म}) \times फा(य)$$

इसलिये $\frac{फ(य)}{य^{म}} = \left(१ - \frac{अ_{१}}{य}\right)\left(१ - \frac{अ_{२}}{य}\right)\cdots\left(१ - \frac{अ}{य}\right) \times फा(य)$

यहां भी दोनों पक्षों का लघुरिकथ लेने से $ला \frac{फ(य)}{य^{न}}$ इसके $\frac{१}{य}$ के गुणक को कहेंगे कि $-(अ + अ_{२} + अ_{३} + \cdots + अ_{म})$ यही है।

यह ऊपर के दोनों सिद्धान्त मर्फी के समीकरण मीमांसा में लिखे हैं (See Murphy's Theory of Equations, pages 77-83)

२५८। यदि फा (य), न − १ घात का वा उससे अल्प घात का फल हो और फ (य) न घात का तो कल्पना करो कि

$$\frac{\text{फा}(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{आ}}{\text{य}-\text{अ}} + \frac{\text{का}}{\text{य}-\text{क}} + \frac{\text{खा}}{\text{य}-\text{ख}} + \cdots + \frac{\text{ञा}}{\text{य}-\text{ञ}} \text{।}$$

जहाँ फ (य) = ० इसके मूल अ, क, ख,......ञ, हैं जो कोई आपस में समान नहीं है।

दोनों पक्षों को फ (य) से गुण देने से

$$\text{फा}(\text{य}) = \text{आ}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{अ}} + \text{का}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{क}} + \text{खा}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{ख}} + \cdots + \text{ञा}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{ञ}}$$

इसमें यदि य = अ तो दहिने पक्ष मे प्रथम पद छोड़ और सब पद उड़ जायँगे और प्रथम पद ५२ वें प्रक्रम से

फा (अ) = आ फ′ (अ) ऐसा होगा; इसलिये $\text{आ} = \frac{\text{फा}(\text{अ})}{\text{फ}'(\text{अ})}$

इसी प्रकार $\text{का} = \frac{\text{फा}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})}$, इत्यादि आ जायंगे।

यदि फा (य), न घात से बड़े घात का फल हो तो फ (य) के भाग से लब्धि फि (य) और शेष फी (य) जो न घात से

अल्प घात का होगा बनालो फिर ऊपर की युक्ति से $\frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})}$ का मान खण्ड भिन्नों में बना लो।

यदि $\text{फ}(\text{य}) = \text{प}_0 (\text{य} - \text{अ})^{\text{त}} (\text{य} - \text{क})^{\text{थ}} (\text{य} - \text{ख})^{\text{द}} \ldots (\text{य} - \text{ञ})$

$$\text{तो } \frac{\text{फा}(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{आ}}{(\text{य} - \text{अ})^{\text{त}}} + \frac{\text{का}}{(\text{य} - \text{क})^{\text{थ}}} + \frac{\text{खा}}{(\text{य} - \text{क})^{\text{द}}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ञा}}{\text{य} - \text{ञ}}$$

ऐसा रूप बनाकर ऊपर की युक्ति से आ, का, खा,......के प्रमाण जान सकते हैं। इस विषय में और विशेष जानना हो तो चलनकलन और चलराशिकलन देखो। ऊपर के प्रकारों की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) सिद्ध करो कि

$$\frac{\lfloor \text{न}}{(\text{य}+१)(\text{य}+२)\cdots(\text{य}+\text{न}+१)} = \frac{१}{\text{य}+१} - \frac{\text{न}}{१}\frac{१}{\text{य}+२} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१\cdot२}\frac{१}{\text{य}+३} - \cdots + \frac{(-१)^{\text{न}}}{\text{य}+\text{न}+१}$$

मान लो कि बायां पक्ष $\frac{\text{आ}_१}{\text{य}+१} + \frac{\text{आ}_२}{\text{य}+२} + \frac{\text{आ}_३}{\text{य}+३} + \cdots + \frac{\text{आ}_{\text{न}+१}}{\text{य}+\text{न}+१}$

$$\lfloor \text{न} = \text{आ}_१(\text{य}+२)(\text{य}+३)\cdots + \text{आ}_२(\text{य}+१)(\text{य}+३)\cdots + \text{आ}_३(\text{य}+१)(\text{य}+२)(\text{य}+४)\ldots\ldots$$

य के स्थान में क्रम से $-१, -२, -३, \ldots$ के उत्थापन से

$\lfloor न = आ_१ \, न \quad \therefore आ_१ = १$

$\lfloor न = -आ_२ \lfloor न-१ \quad \therefore आ_२ = -न$

$न = आ_३ \lfloor २ \lfloor न-२ \quad \therefore आ_३ = \frac{न(न-१)}{१ . २}$

इस पर से ऊपर की सरूपता उतपन्न हुई।

२। सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{य+१} - \frac{न}{(य+१)(य+२)} + \frac{न(न-१)}{(य+१)(य+२)(य+३)} \cdots$$

$$+ \frac{(-१)^{न} \lfloor न}{(य+१) \cdots\cdots (य+न+१)} = \frac{१}{य+न+१} \text{।}$$

मान लो कि बायां पक्ष $\frac{आ_१}{य+१} + \frac{आ_२}{य+२} + \frac{आ_३}{य+३}$

$$+ \cdots + \frac{आ_{न+१}}{य+न+१}$$

तो छेदगम करने से और य के स्थान में $-१, -२$, इत्यादि के उत्थापन से

$अ_१ = (१-१)^{न} = ०, अ_२ = न(१-न)^{न-१} = ०$

$अ_३ = \frac{न(न-१)}{१ \; २}(१-१)^{न-२} = ०$

इस प्रकार से सब के मान शून्य होंगे केवल $आ_{न+१} = १$ ऐसा होगा; इसलिये ऊपर की सरूपता सिद्ध हुई।

इस प्रकार अनेक चमत्कृत सरूपता उत्पन्न होती हैं।

२५९। य और र ऐसी दो राशि हैं कि

य + र + क = एक पूरा वर्ग, य — र + क = एक पूरा वर्ग,

$\frac{र(य+१)}{२}$ = एक पूरा घन, $य^२ + र^२ +$ ख = एक पूरा वर्ग,

$य^२ — र^२ +$ ग एक पूरा वर्ग,

और इन पांचों के मूलों का योग = निर्दिष्ट संख्या तो उन दोनों राशिओं के कैसे मान कल्पित किए जायं जिसमें ऊपर के पांच आलाप आप से आप घटें केवल अन्त के आलाप के लिये समीकरण किया जाय।

भास्कराचार्य से भी पहिले भारतवर्षीय किसी प्राचीन गणितज्ञ का निकाला यह प्रश्न है क्योंकि भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित में स्पष्ट लिखा है कि "कस्याप्युदाहरणम्" अर्थात् किसी का प्रश्न यह है। यहां क, ख और ग ये व्यक्त संख्या हैं।

यहां यदि य + र + क = $यो^२$ तो य + र = $यो^२$ — क

और यदि य — र + क = $वि^२$ तो य — र = $वि^२$ — क

इस पर से $य = \frac{यो^२ + वि^२ — २क}{२}, र = \frac{यो^२ — वि^२}{२}$

अब वर्गान्तर का आलाप मिलाने के लिये

$$य^२ = \frac{यो^४ + २\, यो^२ वि^२ — ४\, क\, यो^२ + वि^४ — ४\, क\, वि^२ + ४\, क^२}{४}$$

$$र^२ = \frac{यो^४ — २\, यो^२ वि^२ + वि^४}{४}$$

और $य^2 - र^2 + ग =$

$$\frac{४\ यो^2\ वि^2 - ४\ क\ यो^2 - ४\ क\ वि^2 + ४\ क^2 + ४\ ग}{४}$$

$$= यो^2\ वि^2 - क\ यो^2 - क\ वि^2 + क^2 + ग$$

$$= यो^2\ वि^2 - २\ यो\ वि\ क + क^2$$

$$- (क\ यो^2 - २\ यो\ वि\ क + क\ वि^2) + ग$$

$$= (यो\ वि - क)^2 + ग - क(यो - वि)^2$$

इस लिये यदि $ग = क\ (यो - वि)^2$ तो

$य^2 - र^2 + ग =$ एक पूरा वर्ग $= (यो\ वि - क)^2$

परन्तु जब $ग = क\ (यो - वि)^2$ तब

$$(यो - वि)^2 = \frac{ग}{क}\ \therefore यो - वि = \sqrt{\frac{ग}{क}}\ \text{और}\ यो = वि\ \sqrt{\frac{ग}{क}}$$

अर्थात् वर्गान्तर के क्षेप में राशियों के योग वियोग क्षेप से भाग देकर वर्गमूल जो हो उसे कल्पित वियोग मूल में जोड़ देने से योग मूल का प्रमाण होता है। फिर इनके उत्थापन से यो और वि के फल रूप में य और र आ जायँगे जिन से फिर आगे क्रिया करनी चाहिए।

इस प्रकार से राशिकल्पना करने के लिये अपने बीजगणित में भास्कर ने यह सूत्र बनाया है।

सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियोगमूलं प्रथमं प्रकल्प्य।
योगान्तरक्षेपकभाजिताद्यद्वर्गान्तरक्षेपकतः पदं स्यात्॥
तेनाधिकं तत्तु वियोगमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ।
स्वक्षेपकोनौ हि वियोगयोगौ स्यातां ततः संक्रमणेन राशी॥

ऊपर जो इसकी उपपत्ति लिखी है वह कृष्णदैवज्ञ की बनाई है। (बीजगणित की टीका बीजाङ्कुरा देखो)

भास्कर के प्रकार में यदि $\frac{ग}{क} = \frac{०}{०}$ ऐसा हो अर्थात् जिस प्रश्न में क $= ० =$ ग ऐसा हो वहां पर लुप्तमान होने से यह पता न लगेगा कि $\sqrt{\frac{ग}{क}}$ इसका ठीक ठीक क्या मान है; इसलिये ऐसे स्थानों में भास्कर के प्रकार का व्यभिचार होगा। इसके लिये मेरी ऐसी कल्पना है।

कल्पना करो कि $प = \sqrt{\frac{ग}{क}}$ तो ऊपर लिखी हुई क्रिया से

$$यो = वि + प,\quad य = \frac{यो^{२} + वि^{२} - २\,क}{२} = \frac{२\,वि^{२} + २\,विप + प^{२} - २क}{२}$$

$$र = \frac{यो^{२} - वि^{२}}{२} = \frac{२\,वि\,प + प^{२}}{२}$$

$$य^{२} = \frac{४\,वि^{४} + ८\,वि^{३}प + ४\,वि^{१}\,प^{२} - ८\,क\,वि^{२} + ४\,वि^{२}\,प^{२}}{४}$$

$$+ \frac{४\,वि\,प^{३} - ८\,क\,प\,वि + प^{४} - ४\,क\,प^{२} + ४\,क^{२}}{४}$$

$$र^{२} = \frac{४\,वि^{२}प^{२} + ४\,वि\,प^{३} + प^{४}}{४}$$

$$और\; य^{२} + र^{२} + ख = \frac{४\,वि^{४} + ८\,प^{४}वि^{३} + १२प^{२}वि^{२} - ८\,कवि^{२}}{४}$$

$$+ \frac{८\,प^{३}\,वि - ८\,क\,प\,वि + २\,प^{४} - ४\,क\,प^{२} + ४\,क^{२} + ४\,ख}{४}$$

$$= वि^४ + २ प वि^३ + ३ प^२ वि^२ + २ प^३ वि + \frac{प^४}{२}$$

$$- २ क वि^२ - २ क प वि - क प^२ + क^२ + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ वि^२ (प^२ - क) + वि (२ प^३$$

$$- २ क प) + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ वि^२ (प^२ - क) + २ प वि (प^२ - क)$$

$$+ \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ (प^२ - क) (वि^२ + प वि)$$

$$+ \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= (वि^२ + प वि)^२ + २ (प^२ - क) (वि^२ + प वि)$$

$$+ (प^२ - क)^२ - (प^२ - क)^२ + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

$$= \{ (वि^२ + प वि) + (प^२ - क) \}^२ - (प^२ - क)^२$$

$$+ \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख$$

बड़े कोष्ठ के बाहर के सब पद मिल कर यदि शून्य हो जायँ तो यह पूरा वर्ग हो जायगा इस लिये

$$० = \frac{प^४}{२} + क^२ - ग - (प^२ - क)^२ + ख = \frac{प^४}{२} + क^२ - ग$$

$$- प^२ + २ क प^२ - क^२ + ख$$

$$= \text{२ क प}^{२} - \frac{\text{प}^{४}}{\text{२}} - \text{ग} + \text{ख} = \text{२ ग} - \frac{\text{प}^{४}}{\text{२}} - \text{ग} + \text{ख} = \text{ग} + \text{ख} - \frac{\text{प}^{४}}{\text{२}}$$

$$\therefore \frac{\text{प}^{४}}{\text{२}} = \text{ग} + \text{ख} \text{ और } \text{प} = \left\{ \text{२(ग + ख)} \right\}^{\frac{१}{४}}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि वर्गान्तर और वर्गयोग क्षेपों के दूने योग के मूल का मूल जो हो वही $\sqrt{\frac{\text{ग}}{\text{क}}}$ इसका मान होता है। अब चाहे ग, और क शून्य हों वा संख्यात्मक हों मेरे प्रकार का कहीं भी व्यभिचार न होगा।

इसपर मेरा बनाया यह सूत्र है।

वर्गान्तरक्षेपकसंमितिर्युता क्षेपेण कृत्योर्युतिजेन वै ततः।
द्विघ्नात् पदं तत्पदयुग्वियोगजं मूलं युतेर्मूलमतस्तयोर्मिती॥
अब पाँचवां आलाप मिलाने के लिये यदि

$$\sqrt{\text{य} - \text{र} + \text{क}} = \text{वि} \quad \text{तो}$$

$$\sqrt{\text{य} + \text{र} + \text{क}} = \text{यो} = \text{वि} + \text{प}$$

$$\sqrt{\text{य}^{२} - \text{र}^{२} + \text{ख}} = \text{यो त्रि} - \text{क} = \text{वि}^{२} + \text{प वि} - \text{क}$$

$$\sqrt{\text{य}^{२} + \text{र}^{२} + \text{ख}} = \text{वि}^{२} + \text{प वि} - \text{क} + \text{प}^{२}$$

$$\left\{ \frac{\text{र (य + १)}}{\text{१}} \right\}^{\frac{१}{३}} = \text{त्रि} + \tfrac{१}{२} \left(\text{ख} + \text{ग}^{\frac{१}{३}} \right)$$

$$\text{क्योंकि} \quad \text{य} + \text{१} = \frac{\text{२ वि}^{२} + \text{२ वि प} + \text{प}^{२} - \text{२ क} + \text{२}}{\text{२}}$$

$$र = \frac{२ वि प + प^३}{२}$$

---

४ प त्रि^{३} + ४ प^२ त्रि^{२} + ५ प^३ वि − ४ क प वि + ४ प वि
२ प^{२}वि^{२} + २ प^{३}वि + प^४ − २ प^{२}क + २ प^२

प { ४ वि^{३} + ६ प वि^{२} + (४ प^२ − ४ क + ४) वि } + प^४
− २ प^{२}क + २ प^२

= प { ४ वि^{३} + ६ प वि^{२} + (४ प^२ − ४ क + ४) वि }
+ २ ग + २ ख − २ ग + २ प^२

इसलिये

$$\frac{र (य + १)}{२}$$

$$= प \frac{\{ ४वि^३ + ६पवि^२ + (४प^२ − ४क + ४) वि \} + २ ख + २ प^२}{८}$$

अब यदि यह पूरा घन होगा तो

३ $(४प)^{\frac{२}{३}}$ इससे ६ प^२ यह अवश्य निःशेष होगा और लब्धि का घन = २ ख + २ प^२ ऐसा होगा। कल्पना करो कि लब्धि = ल तो १ ल $(४प)^{\frac{२}{३}}$ = ६ प^२ ∴ ल^३ $(४प)^२$ = ८प^६ अर्थात् १६ प^२ ल^३ = ८प^६ ∴ ल^३ = $\frac{प^४}{२}$। परन्तु पहिले सिद्ध कर आए हैं कि $\frac{प^४}{२}$ = ख + ग, इसलिये

$ल^{१} = \frac{प^{४}}{२} = ख + ग = २ख + २प^{२}$ $\therefore$ $\frac{ग - ख}{२} = प^{२}$; इसलिये यदि $\frac{ग - ख}{२} = प^{२} = \frac{ग}{क}$ तो पांचो आलाप भास्कर की युक्ति से मिल सकते हैं।

जब $\frac{ग - ख}{२} = \frac{ग}{क}$ तो छेदगम से

$क\,ग - क\,ख = २\,ग$, वा $क\,(ग - ख) = २\,ग$

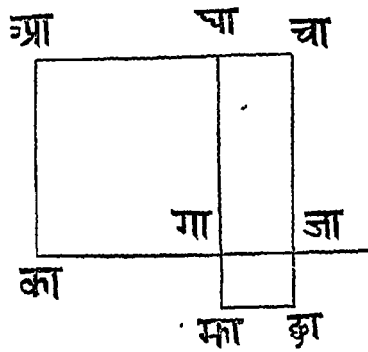
इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि वर्गान्तर क्षेप में वर्गयोग क्षेप को घटाने से जो शेष बचे उससे योगान्तर क्षेप को गुण दें, गुणनफल दूने वर्गान्तर क्षेप के तुल्य हो तो भास्कर की क्रिया से कहेंगे कि प्रश्न ठीक है, उत्तर निकल सकता है।

इसी प्रकार पांचवा आलाप ऐसा हो कि $\frac{यर}{२} + र$ यह एक पूरा घन है तो यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से सब बातों का परामर्श कर सकते हो।

(प्रश्न के उत्तर के लिये भास्कर का बीजगणित देखो।)

२६०। $य\,र = अ\,य + क\,र + ख$ इसमें चाहते हैं कि य और र के अभिन्न धनात्मक मान निकालें।

इसके लिये भास्कर चार्य ने ऐसी कल्पना की है कि मान लो कि जिस आयत का एक भुज य और दूसरा र है उसका क्षेत्रफल $य\,र$ है जो कि $अ\,य + क\,र + ख$ के समान है।

र भुज के समानान्तर भुज आ घा में यदि एक खण्ड आ च=अ का र लें तो य, अ भुजों से नये आयत च का का क्षेत्रफल=अ य होगा। और य भुज के समानान्तर घा मा में घा झा=क काट लें तो च झा का क्षेत्रफल=क (र−अ)=क र −अ क, इन दोनों को समग्र क्षेत्रफल य र में घटा देने से छा मा आयत का फल=य र—अ य−क र+अ क=अ य+क र+ख −अ य−क र+अ क=अ क+ख, इसलिए छा जा=झा मा का कोई अभिन्न मान मान उसका भाग अ क+ख व्यक्त संख्या में देनेसे छा झा=जा मा का मान होगा। इन दोनों में क्रम से छा च=क और का गा=अ जोड़ देने से य और र के मान अभिन्न आ जायँगे।

यदि अ और क ऋण होंगे तो छा जा − छा चा=छा जा − क =य, छा झा − अ=र होंगे जहां झ=अ, का=क, यदि अ>र और क>य से तो

क − छा जा=य

अ − छा झा=र

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि

य र=अ य+क र+ ख इस समीकरण में दोनों अव्यक्तों के गुणन फल में व्यक्ताङ्क ख जोड़ कर इसमें ऐसे एक इष्ट=इ का भाग दो जिसमें लब्धि=ल अभिन्न हो। फिर इ+अ=र वा इ − अ=र और ल+क=य वा ल−क=य।

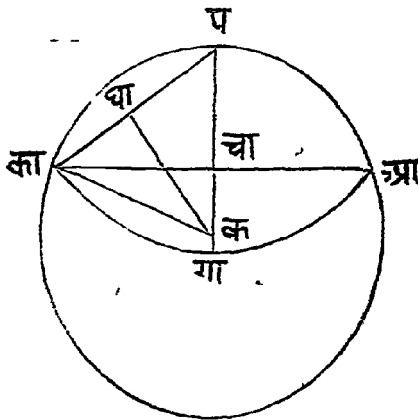
जैसे यदि य र= ४ य+३र+२ तो यहां ४=अ, ३=क और ख=२ इस लिये अ क+ख=४ × ३+२=१४। इसमें इष्ट=इ=२ का भाग देने से ल=७। इन पर से य=ल+क=७+३=१० और र=इ+अ=२+४=६।

इष्ट के वश अनेक उत्तर होंगे।

इस पर भास्कर ने यह सूत्र बनाया है :—

भावितं पक्षतोऽभीष्टात् त्यक्त्वा वर्णौ सरूपकौ ।
अन्यतो भाविताङ्केन ततः पक्षौ विभज्य च ॥
वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्तेष्टेनेष्टतत्फले ।
एताभ्यां संयुतावूनौ कर्त्तव्यौ स्वेच्छया च तौ ॥
वर्णाङ्कौ वर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात् ।

२६१ । निर्दिष्ट वृत्त के परिधि पर प एक विन्दु है उसको केन्द्र मान एक ऐसा वृत्त बनाना है जिससे निर्दिष्ट वृत्त का दो समान भाग हो जाय ।

कल्पना करो कि निर्दिष्ट वृत्त आप गा है जिसका केन्द्र क और व्यासार्द्ध क प=अ । और मान लो कि प केन्द्र से प का

$=$ अ$_1$ व्यासार्द्ध से ऐसा का गा आ वृत्त बना जिससे दिए हुए वृत्त का समान दो भाग हो गया। का क प कोण का चापीय मान ष मान लो तो

का प आ चाप$=$२ अ ष$=$ध, का आ पूर्ण ज्या$=$२ अ ज्याष$=$जी प चा$=$श, चा गा$=$श$_1$, का गा आ चाप$=$ध$_1$, का प आ चाप क्षेत्र का फल

$$=\frac{\text{अ}(\text{ध}-\text{जी})+\text{श जी}}{२}$$

का गा आ चाप क्षेत्र का फल$=\frac{\text{अ}_1(\text{ध}_1-\text{जी})+\text{श}_1\text{जी}}{२}$

दोनों चाप क्षेत्रों का फल$=$आधा दिया हुआ वृत्त फल

$$=\frac{\pi\ \text{अ}^2}{२}$$

$$=\frac{\text{अ}(\text{ध}-\text{जी})+\text{श जी}+\text{श}_1\text{ जी}+\text{अ}_1(\text{ध}_1-\text{जी})}{२}$$

$$=\frac{\text{अ}(\text{ध}-\text{जी})+\text{अ}_1\text{ जी}+\text{अ}_1(\text{ध}_1-\text{जी})}{२}$$

$$=\frac{\text{अ}(\text{ध}-\text{जी})+\text{अ}_1\text{ ध}_1}{२}$$

$$=\frac{\text{अ}(२\text{ अ ष}-२\text{ अज्याष})+२\text{ अ ज्या}\tfrac{1}{2}\text{ष ध}_1}{२}$$

$$=\text{अ}(\text{अ ष}-\text{अ ज्याष})+\text{अ ज्याष}\tfrac{1}{2}\text{ष }२\text{ अज्या}\tfrac{1}{2}\text{ष}(\pi-\text{ष})$$

$$=\text{अ}^2\{\text{ष}-\text{ज्याष}+२\text{ ज्या}^2\tfrac{1}{2}\text{ष}(\pi-\text{ष})\}$$

$$=अ^{2}\{ष - ज्याष + (१ - कोज्याष)(\pi - ष)\}$$

$$=अ^{2}(ष - ज्याष + \pi - \pi \, कोज्याष - ष + ष \, कोज्याष)$$

$$=अ^{2}(\pi + ष \, कोज्याष - \pi \, कोज्याष - ज्याष)$$

$$=अ^{2}\{\pi - कोज्याष \, (\pi - ष) - ज्याष\}$$

$अ^{2}$ से दोनों पक्षों में भाग देने से और $\frac{\pi}{२}$ को घटा देने से

$$\frac{\pi}{२} - \{कोज्याष(\pi - ष) + ज्याष\} = फ(ष) = ०$$

१० वें प्रक्रम से ज्याष $(\pi - ष)$ + कोज्याष − कोज्याष $= ज्याष(\pi - ष) = फ'(ष)$ पहिले स्थूल मान मान लो कि $ष_{१} = \frac{\pi}{२}$ तो

$$फ(ष_{१}) = \frac{\pi}{२} - १ = १\cdot५७०७९६३२६८ - १ = \cdot५७०७९६३२६८$$

$$फ'(ष_{१}) = \pi - \frac{\pi}{२} = \frac{\pi}{२} = १\cdot५७०७९६३२६८$$

१४४ प्रक्रमस्थ न्यूटन की रीति से

$$\frac{फ(ष_{१})}{फ'(ष_{१})} = \frac{\frac{\pi}{२} - १}{\frac{\pi}{२}} = १ - \frac{२}{\pi} = च = \cdot३६३२४६५$$

$$\frac{\pi}{२} - च = ष_{२} = १\cdot२०७४४६८ = ६९^{\circ}, ११', १५''$$

कोज्या$ष_2$ = ·३५५३१०९
$\pi - ष_2$ = १·९३४०८२९

५८०२१३०
९६७०२१
९६७०२
८०२
१९३
१७

कोज्या$ष_2(\pi - ष_2)$ = ·६८७१८६५
ज्या$ष_2$ = ·९३४७४८१

योग = १·६२१९३४६
$\frac{\pi}{2}$ = १·५७०७९६३

फ$(ष_2)$ = −०·०५११३८३

ज्या$ष_2$ = ·९३४७४८१
= १·९३४०४२९०

१७४०६२८६१
५८०२१२८
७७३६१७
१३५३८३
७७३६
१५४७
१९

फ$'(ष_2)$ = १·८०७८४२९१

$\frac{फ(ष_2)}{फ'(ष_2)}$ = −०·०२४२४७० = च

$ष_2$ − च = $ष_1$ = १·२३५८३६८ = ७०°, ४८′, २९″, ३९‴

कोज्या$ष_1$ = ·३२८७३०९
$\pi - ष_1$ = १·९०५७५५९
९०३७८२३

५७ ७ ६७७
३८११५१२
१५२४६०४
१३३४०३
५७१७
१७१

कोज्या$ष_1(\pi - ष_1)$ = ·६२६४८०८४

ज्या$ष_1$ = ·९४४५२३६
= १·९०५७५५९
६३२४४४९

१७१५१८०३१
७६२३०२४
७६२३०२
७६२३०
३८१२
५७२
११४

१·७९९८४०८५ = फ$'(ष_1)$

ज्याष$_{३}$ = ·९४४४४२३६

यो = १·५७०९०४४४ $\quad \frac{\text{फ}(\text{ष}_{३})}{\text{फ}'(\text{ष}_{३})}$ = −०·००००६०१ = च

$\frac{\pi}{२}$ = १·५७०७९६३

फ(ष$_{३}$) = −०·०००१०८१४

ष$_{३}$ − च = ष$_{४}$ = १·२३५८९६९ = ७०°, ४८′, ४२″, २‴,

कोज्याष$_{४}$ = ·३२८६७४१ $\qquad$ ज्याष$_{४}$ = ·९४४४४३४

π − ष$_{४}$ = १·९०५६९५८

२४७६८२१

५७१७०८७४

३८११३९२

१५२४५५६

११४३४१

१३३३९

७६२

३८

कोज्याष$_{४}$(π − ष$_{४}$) = ·६२६३५३०२

ज्य ष$_{४}$ = ·९४४४४३४

यो = १·५७०७९६४२

$\frac{\pi}{२}$ = १·५७०७९६३

फ(ष$_{४}$) = − ०·०००००००१ = ० स्वल्पान्तर से

इस पर से

अ$_{१}$ = २अअज्या $\frac{\text{ष}}{२}$ = २अ ज्या(३५, २४′, २१″, १‴)

= २अ × ·५७९३६४२५

$$= \frac{२अ \times ५७६३६४२५}{१००००००००} = \frac{२अ \times ११५८७२८५}{२००००००००} = \frac{२अ \times २३१७४५२}{४००००००}$$

$$= \frac{२३१७४५.७अ}{२०००००००}$$

यही मान टेलर के सिद्धान्त से भी आवेगा। चलनकलन का २५ प्र० देखो।

इसके लिये यह मेरा सूत्र है :—

नगशरवेदनगक्ष्मारामकरैराहता त्रिभज्यास्वा।
अयुतद्वयेन भक्ता व्यासदलं स्यात् स्ववृत्तस्य ॥

२६२। ऊपर के प्रश्न में यदि प विन्दु के का गा आ चाप से दिए हुए का प आ वृत्त का न भाग हो तो ऊपर ही की क्रिया से

$$\frac{\pi(न-१)}{न} - \left\{ कोज्याष\,(\pi - ष) + ज्याष \right\} = फ\,(ष) = 0$$

ऐसा समीकरण होगा। इसमें पहिला ष का स्थूल मान $\frac{\pi}{न}$ इतना मान कर तब न्यूटन की रीति से असकृत् कर्म करना चाहिए।

यहां यदि त्रिकोणमिति से

$$कोज्याप = १ - \frac{प^२}{२!} + \frac{प^४}{४!} - \frac{प^६}{६!} + \dots\dots\dots \quad तो$$

$$कोज्याप\,(\pi - प) = \pi - \frac{\pi प^२}{२!} + \frac{\pi प^४}{४!} - \frac{\pi प^६}{६!} + \dots\dots\dots$$

$$-\text{ष}+\frac{\text{ष}^3}{2!}-\frac{\text{ष}^5}{4!}+\frac{\text{ष}^7}{6!}-\cdots\cdots$$

$$\text{ज्याष}=\text{ष}-\frac{\text{ष}^3}{3!}+\frac{\text{ष}^5}{5!}-\frac{\text{ष}^7}{7!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{कोज्याष}\ (\pi-\text{ष})+\text{ज्याष}=\pi-\frac{\pi\text{ष}^2}{2!}+\frac{\pi\text{ष}^4}{4!}-\frac{\pi\text{ष}^6}{6!}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\text{ष}^3}{3}-\frac{\text{ष}^5}{5\cdot3!}+\frac{\text{ष}^7}{7\cdot|3}-\frac{\text{ष}^9}{9\cdot3!}+\cdots\cdots$$

$$=\pi-\frac{\pi\text{ष}^2}{2!}+\frac{\text{ष}^3}{3!}+\frac{\pi\text{ष}^4}{4!}-\frac{\text{ष}^5}{5\cdot3!}-\frac{\pi\text{ष}^6}{6!}+\frac{\text{ष}^7}{7\cdot5!}$$

$$+\frac{\pi\text{ष}^8}{8!}-\frac{\text{ष}^9}{9\cdot7!}+\cdots\cdots\cdots$$

इस पर से

$$\frac{(\text{न}-1)\pi}{\text{न}}\left\{\text{कोज्याष}\ (\pi-\text{ष})+\text{ज्याष}\right\}=\text{फ}(\text{ष},=0$$

$$=-\frac{\pi}{\text{न}}+\frac{\pi\text{ष}^2}{2!}-\frac{\text{ष}^3}{3}-\frac{\pi\text{ष}^4}{4!}+\frac{\text{ष}^5}{5\cdot3!}+\frac{\pi\text{ष}^6}{6!}-\frac{\text{ष}^7}{7\cdot5!}$$

$$-\frac{\pi\text{ष}^8}{8!}+\frac{\text{ष}^9}{9\cdot7!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{\text{न}}+\frac{\text{ष}^2}{2!}-\frac{\text{ष}^4}{4!}+\frac{\text{ष}^6}{6!}-\frac{\text{ष}^8}{8!}+\cdots\right)$$

$$-\left(\frac{\text{ष}^3}{3}-\frac{\text{ष}^5}{5\cdot3!}+\frac{\text{ष}^7}{7\cdot5!}-\frac{\text{ष}^9}{9\cdot7!}+\cdots\cdots\right)$$

ऐसा समीकरण को फैला सकते हो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। २२१ प्रक्रम की परिभाषा से सिद्ध करो कि स $(\text{य}\text{र}' - \text{य}'\text{र})$ इसके सब अचलस्पर्द्धी स के चलस्पर्द्धी होंगे यदि चल अर्थात् अव्यक्त संख्या $\frac{\text{य}'}{\text{र}'}$ मानी जाय।

२। यदि $\text{आ}_1, \text{आ}_2, \text{आ}_3 \ldots\ldots \text{आ}_\text{न}$ एक ही तद्रूप और ध्रुवशक्तिक फल सम्बन्धी $\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{इ}_1}, \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{इ}_2}, \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{इ}_3}, \ldots\ldots$ $\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}-\text{इ}_\text{न}}$ इनके अचलस्पर्द्धी हों जहां सोपान सो है और इ_1, $\text{इ}_2, \text{इ}_3, \ldots\ldots \text{इ}_\text{न}$

फ (य) = ० इसके मूल हैं तो सिद्ध करो कि

$\sum_{\text{त}=1}^{\text{त}=\text{न}} \text{आ}_\text{त}(\text{य} - \text{इ}_\text{त})$ सो यह फ (य) = ० इसका चलस्पर्द्धी होगा। सङ्केत के लिये १६७ प्रक्रम का (२) उदाहरण देखो।

३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें $१ + ५\sqrt{-१}$, $५ - \sqrt{-१}$ ये अव्यक्त के मान हों और समीकरण अकरणीगत संभाव्य गुणक का हो।

उ० $\text{य}^४ - १२\text{य}^३ + ७२\text{य}^२ - ११२\text{य} + ६७६ = ०$

४। $\text{य}^४ + २\text{य}^३ - ५\text{य}^२ + ६\text{य} + २ = ०$ इसमें अव्यक्त के मान बताओ। इतना जानते हैं कि एक मान $-२ + \sqrt{३}$ है।

५ । $य^४ + २पय^३ + ३प^२य^२ + २प^३य - प_१^४ = 0$ इसमें य के मान बताओ । उ० समीकरण का रूपान्तर $(य^२ + पय + प^२)^२ - प^४ - प_१^४ = 0$ ऐसा कर लो ।

६ । $य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = 0$ इसमें यदि य मान $अ_१$, $अ_२$ और $अ_३$ हों तो $(अ_२ + अ_३ - अ_१)^३ + (इ_३ + इ_१ - इ_२)^३ + (इ_१ + इ_२ - इ_३)^३$ इसका मान बताओ ।

उ० $२०प_३ - प_१^३$

७ । $य^३ - \frac{५}{२} य^२ - \frac{७}{१८} य + \frac{१}{१०८} = ०$ इसको ऐसा बदलो जिसमें भिन्न न रहे । मान लो कि $मय = र$ ∴ $य = \frac{र}{म}$ इसके उत्थापन से

$$\frac{र^३}{म^३} - \frac{५ र^२}{२ म^२} - \frac{५}{३^२ २} \frac{र}{म} + \frac{१}{३^३ २^२} = ०$$

$म^३$ से गुण देने से

$$र^३ - \frac{५}{२} म र^२ - \frac{७}{३^२ २} म^२ र + \frac{म^३}{३^३ २^२} = ०$$

इससे स्पष्ट है कि यदि म=६ तो अभिन्न समीकरण

$र^३ - १५र^२ - १४र + २ = ०$ ऐसा होगा ।

८ । एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान $य^४ - ३य^३ + ७य^२ + ५ य - २ = ०$ इसके अव्यक्त मान के हरात्मक मान के तुल्य हों ।

उ $२र^४ - ५र^३ - ७ र^२ + ३ र - १ = ०$

९। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$य^४ - ५य^३ + ७ य^२ - १७ य + ११ = ०$ इसके अव्यक्त मान से संख्या में ४ अल्प हों।

उ. $र^४ + ११र^३ + ४१ र^२ + ५५र - ९ = ०$

१०। $य^४ - ४य^३ - १८ य^२ - ३ \quad य + २ = ०$ इस पर से एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें तीसरा पद उड जाय।

$य=र-३$, और $य=र+१$ ऐसा मानने से तीसरा पद उड जायगा।

११। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान $य^३ - य^२ + ८ य - ६ = ०$ इसके अव्यक्तमान के वर्ग के समान हों।

उ. $र^३ + १५ र^२ + ५२ र - ३६ = ०$

१२। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान $य^न + प_१य^{न-१} + प_२य^{न-२} + \dots\dots + प_{न-१}य + प_न = ०$ इसके अव्यक्त मान के घन के तुल्य हों।

ऊपर के समीकरण को

$(प_न + प_{न-३}य^३ + प_{न-६}य^६ + \cdots) + य\,(प_{न-१} + प_{न-४}य^३ + \cdots) + य^२\,(प_{न-२} + प_{न-५}य^३ + प_{न-८}य^६ + \cdots)$

$= पा + बा\, य + ता\, य^२$, जहां पा, बा और ता $य^३$ के फल हैं। अब समीकरण में अव्यक्त के मान यदि $अ_१, अ_२, \dots\dots अ_न$ हों तो $पा + बा\, य + ता\, य^२ = (य - अ_१)(य - अ_२) \dots\dots$

$(य - अ_न), \dots\dots (१)$

य के स्थान में घा य, घा^{२} य के उत्थापन देने से जहां घा, घा^{२} एक के घन मूल हैं

$$पा + वा\, घा\, य + घा^{२}\, ता\, य^{२} \equiv (घा\, य - अ_{१})\, (घा\, य - अ_{२}) \ldots (घा\, य - अ_{न}) \ldots (२)$$

$$पा + घा^{२} बा\, य + घा\, ता\, य^{२} \equiv (घा^{२} य - अ_{१})\, (घा^{२} य - अ_{२}) \ldots (घा^{२} य - अ_{न}) \ldots (३)$$

(१), (२) और (३) को परस्पर गुण देने से और $१ + घा + घा^{२} = ०$ करने से

$$पा^{३} + बा^{३} य^{३} + ता^{३} य^{६} - ३\; पा\; बा\; ता\; य^{३} \equiv (य^{३} - अ_{१}^{३})\, (य^{३} - अ_{२}^{३}) \ldots (य^{३} - अ_{न}^{३})$$ इसमें यदि $य^{३} = र$ तो

$$पा^{३} + बा^{३} र + ता^{३} र^{२} - ३\; पा\; बा\; ता\; र^{३} \equiv (र - अ_{१})\, (र - अ_{२}^{३}) \ldots\ldots (र - अ_{न}^{३})$$

अब पा^{३}, बा^{३} और पा बा ता के मान में भी य^{३} के स्थान में र के उत्थापन से अभीष्ट समीकरण बन जायगा।

१३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान $य^{४} - य^{३} + २य^{२} + ३\, य + १ = ०$ इसके अव्यक्त मान के घन के समान हों। उ. $र^{४} + १४\, र^{३} + ५०र^{२} + ६\, र + १ = ०$

१४। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान $अ\, य^{३} + क\, य^{२} + ख\, य + ग = ०$ इसके अव्यक्त मान के घन के समान हों।

$$उ.\; अ^{३} र^{३} + ३\, (अ^{२} ग + ६\, क^{३} - ६\, अ\, क\, ख)\, र^{२} + ३ (अ\, ग^{२} + ६ख^{३} - ६\, क\, ख\, ग)\, र + ग^{३} = ०$$

१५। एक ऐसा समीकरण बनाओ, जिसके अव्यक्त मान $\text{य}^{३} + ६\text{य}^{२} + ९\text{य} + ४ = ०$ इसके दो दो अव्यक्तमानों के अन्तरों के वर्ग के समान हों।

उ. $\text{य}^{३} - १८\text{य}^{२} + ८१\text{य} = ०$

१६। यदि $\text{अय}^{३} + ३\,\text{अ}_{१}\text{य}^{२} + ३\text{अ}_{२}\text{य} + \text{अ}_{३} = ०$ इसके अव्यक्त मान $\text{इ}_{१}$, $\text{इ}_{२}$ और $\text{इ}_{३}$ हों तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$(\text{इ}_{१} - \text{इ}_{२})(\text{इ}_{१} - \text{इ}_{३})$, $(\text{इ}_{२} - \text{इ}_{३})(\text{इ}_{२} - \text{इ}_{१})$, $(\text{इ}_{३} - \text{इ}_{१})(\text{इ}_{३} - \text{इ}_{२})$

ये हों। उ० $\text{र}^{३} + \frac{९\,\text{हा}}{\text{अ}_{०}^{२}}\text{र}^{२} - \frac{२७(\text{गा}^{२} + ४\,\text{हा}^{३})}{\text{अ}_{०}^{४}} = ०$

हा और गा के लिये २२३ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो।

१७। $\text{य}^{४} + \text{म}\,\text{प}\,\text{य}^{३} + \text{म}^{२}\text{प}_{१}\text{य}^{२} + \text{म}^{३}\,\text{प}\,\text{य} + \text{म}^{४} = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों को बनाओ। उ० $\text{म}^{२}\text{य}^{२}$ इससे भाग दे देने से

$\left(\frac{\text{य}^{२}}{\text{म}^{२}} + \frac{\text{म}^{२}}{\text{य}^{२}}\right) + \text{प}\left(\frac{\text{य}}{\text{म}} + \frac{\text{म}}{\text{य}}\right) + \text{प}_{१} = ०$ ऐसा एक हरात्मक समीकरण बन जायगा।

१८। यदि $२\,\text{य}^{२} + \text{य} - ६ = \text{फ}(\text{य})$ तो बताओ फ(य) कब महत्तम वा न्यूनतम होगा।

उ. जब $\text{य} = -\frac{४९}{८}$ तब फ (य) न्यूनतम।

१९। यदि $\text{फ}(\text{य}) = ३\text{य}^{४} - १६\,\text{य}^{३} + ६\,\text{य}_{२} - ४८\,\text{य} + ७$ तो कब इस फल का मान महत्तम वा न्यूननम होगा।

उ $\text{य} = ५$ तो फ (य) न्यूनतम।

२० । $य^{५} + २० य^{४} + ३० य^{३} + १५ य^{२} - ७य + ६ = ०$ इसमें धन मान की प्रधान सीमा क्या होगी । उ. $२^{\frac{१}{२}}$

२१ । $य^{५} + य^{४} - ४ य^{३} - ३य^{२} + ३ य + १ = ०$ इसमें एक अव्यक्तमान -१ और ० के बीच का आसन्नमाना नयन से ले आओ ।

उ —·२८४६३

२२ । $अ य^{३} + ३ क य^{२} + ३ ख य + ग = ०$ इसका रूप $र^{३} - खा = ०$ ऐसा बनाना है । उ. मान लो कि $र = अ_{०} + अ_{१} य + य^{२}$ फिर २३४ प्रक्रम की क्रिया करो ।

२३ । असंभवों का गुणन, भजन कैसे करते हो ।

२४ । सिद्ध करो कि यदि $न = \infty$ तो $^{न}\left(\frac{न}{आ}\right)^{१}_{१}{}^{२}$ इसका कोई अङ्क $_{१}\infty$ यह होगा । २४७ प्रक्रम देखो ।

२५ । $य^{-५} - २ य^{-४} + ३ य^{-३} + ४ य^{-२} + ७य^{-१} + ५ = ०$ बताओ इसमें य के कितने विध मान आवेंगे उ. ० विध ।

२६ । यदि अ, क, ख, ग,......इत्यादि न संख्यायें हों तो सिद्ध करो कि $\frac{(य - क)(य - ख)}{(अ - क)(अ - ख)}$ इस तरह के जो न फल होंगे उनका योग एक के समान होगा ।

यहां $फ(य) = (य - अ)(य - क)(य - ख)\ldots\ldots$ मान लो और

$\frac{१}{फ(य)}$ इसका रूप खण्ड भिन्नों में लाकर फ (य) से गुण दो।

२७। एक समीकरण का जिसमें सर और व्यत्यास दोनों हैं कैसे ऐसा रूपान्तर करें जिसमें सब सर ही हो और दूसरा कैसा रूपान्तर करें जिसमें सब व्यत्यास ही हो।

(१) उ. धन प्रधान सीमा जान लो कि सी है तो फिर य=र+सी फिर ऐसा कल्पना कर समीकरण में उत्थापन दो तो र के फल स्वरुप में ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें र का कोई धन मान न आवेगा; इसलिये अब इसमें सर ही होंगे।

(२) इसी प्रकार सब से छोटी धन प्रधान सीमा सी, हो तो य=र+सी, ऐसा मानने से र के रूप में जो समीकरण होगा उसमें र का कोई ऋण मान न होगा; इसलिये सब व्यत्यास ही होगा।

२८। यदि न घात समीकरण का अन्त पद व्यक्ताङ्क $प_न$ हो और न विषम संख्या और अव्यक्त मान सब गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त का एक मान $\sqrt[न]{प_न}$ यह होगा

२९। सिद्ध करो कि $य^{२न} - पय^{२त} + ब = ०$ इसमें चार भिन्न-भिन्न संभाव्य अव्यक्त मान होंगे यदि $\left(\frac{पत}{न}\right)^{न} > \left(\frac{तब}{न-त}\right)^{न-त}$

और यदि $\left(\frac{तप}{न}\right)^{न} = \left(\frac{तब}{न-त}\right)^{न-त}$ तो उन चारो में दो दो तुल्य

होंगे और यदि $\left(\frac{त प}{न}\right)^{न} < \left(\frac{त-ब}{न-त}\right)^{न-त}$ तो कोई संभव मान न होगा। प और ब संभाव्य धन संख्या हैं। उ. समीकरण को फ (य) कहो तो फ$'$ (य)= २ न य$^{२न-१}$ — त प य$^{२न-१}$ इसमे यदि फ$'$ (य)=० तो य=०, वा $+\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{१}{२(न-त)}}$ =अ$_२$ वा

$$-\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{१}{२(न-त)}} = अ_१$$

अब ७२ वें प्रक्रम से फ (य) में $-\infty$, —अ$_१$, ०, अ$_१$, $+\infty$ के उत्थापन से

$$फ(-\infty)+,\ फ(०)=+,\ फ(+\infty)=+$$

$$फ(अ_१)=फ(अ_२)=\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} - प\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{त}{न-त}} + ब$$

$$=\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} - \frac{न प}{त प}\left(\frac{न प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} + ब$$

$$=\left(\frac{त-न}{त}\right)\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} + ब = ब - \left(\frac{न-त}{त}\right)\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}}$$

इसलिये यदि

$$ब < \left(\frac{न-त}{त}\right)\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}}$$

वा $\left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{न-त} < \left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{त-न}}$ तो

$फ(अ_१) = फ(अ_२) = -तब$

$फ(-\infty),\quad फ(अ_१),\quad फ(०),\quad फ(अ_२),\quad फ(\infty)$
$\quad\; +\qquad\quad -\qquad\quad +\qquad\quad -\qquad\quad +$

इसलिये चार व्यत्यास होने से चार भिन्न भिन्न संभाव्य मान $-\infty$ और $अ_१$, $अ_१$ और ०, ० और $अ_२$, और $अ_२$ और ∞ के बीच में होंगे। और बातें प्रसिद्ध हैं।

३० । $फ(य) = य^४ + प_२ य^२ + प_३ य + प_४ = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान अ, $\frac{म}{अ}$, क, $\frac{म}{क}$ इस चाल के हों।

३१ । वर्गमूल निकालने की युक्ति से दिखलाओ कि $य^४ + प_१ य^३ + प_२ य^२ + प_३ य + प_४ = ०$ इसको एक वर्गसमीकरण के रूप में ला सकते हैं यदि $प_१^३ - ५ प_१ प_२ + ८ प_३ = ०$ वा $(प_१^२ - ४ प_२) प_४ + प^२ = ०$

३२ । सिद्ध करो कि $य^३ + ३ अ य^२ + क य + ख = ०$ इसमें सब संभाव्य मान कभी नहीं होंगे यदि $अ^३ + क^२$ यह धन संख्या हो तो। (स्टर्म का सिद्धान्त लगाओ)

३३ । $य^३ + प_१ य^२ + प_२ य + प_३ = ०$ इसमें यदि अव्यक्त मान अ, क, ख हों तो $अ^२ क + क^२ ख + ख^२ अ$ इस अर्धतद्रूप फल का मान बताओ।

उ. यदि $अ^2क+क^2अ+ख^2अ=सा$ तो

$\frac{सा}{(अकख)^2}=\frac{सा}{प_3^2}=\frac{1}{ख^2क}+\frac{1}{क^2अ}+\frac{1}{अ^2ख}$ और १६२—१६३ वें प्रक्रम से

$$\frac{3प_3-प_1प_2}{प_3^2}=\frac{1}{अ^2क}+\frac{1}{क^2अ}+\frac{1}{क^2ख}$$

$$\frac{1}{ख^2क}+\frac{1}{ख^2अ}+\frac{1}{अ^2ख}$$

दोनों के अन्तर से

$$\frac{(3प_3-प_1प_2)-सा}{प_3^2}=\frac{1}{अ^2क}+\frac{1}{क^2ख}+\frac{1}{ख^2अ}$$

और $सा=अ^2क+क^2ख+ख^2अ$

दोनों के गुणन से

$$\frac{(3प_3-प_1प_2)सा-सा^2}{प_3^2}=3-\frac{अ^3+क^3+ख^3}{प_3}$$

$$-प_3\left(\frac{1}{अ^3}+\frac{1}{क^3}+\frac{1}{ख^3}\right)$$

$$=\frac{9प_3^2+प_1^3प_3+प_2^3-6प_1प_2प_3}{प_3^2}$$ छेद को उड़ा देने से

और पक्षान्तरानयन से

$सा^2-सा(3प_3-प_1प_2)=6प_1प_2प_3-(9प_3^2+प_1^3प_3+प_2^3)$ यह वर्गसमीकरण हो जायगा।

३४। $य^3 - ६ य^2 + ११ य - ६ = ०$ इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क और ख हों तो $अ^2 क + क^2 ख + ख^2 अ$ इस का मान बनाओ। उ० २३ वा २५।

३५। ऊपर के समीकरण में सिद्ध करो कि यों $अ^2 क = ४८$

३६। सिद्ध करो कि फ (य) यह यदि य का अकरणीगत घन फल हो तो फ (य) = ०, और फ′ (य) = ० इन दोनों में से एक समीकरण में अवश्य एक अव्यक्त मान संभाव्य संख्या होगा।

उ० मान लो कि फ $(य) = य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \cdots + प_न$ तो यदि न विषम होगा तो २३ वें प्रक्रम से कम से कम फ (य) = ० इस में एक संभाव्य मान होगा और यदि फ (य) में न विषम न हो तो फ′ (य) मे न − १ यह विषम होगा; इसलिये तब फ′ (य) = ० में २३ वें प्रक्रम से एक संभाव्य मान होगा।

३७। यदि फ $(य) = य^न - १$ और फ(य) = ० इसमें अव्यक्त मान अ, क, ख, ⋯ हों तो दिखलाओ कि

$$\frac{न य^{न-१}}{य^न - १} = \frac{१}{य - अ} + \frac{१}{य - क} + \frac{१}{य - ख} + \cdots$$

३८। उन दो राशियों को बनाओ जिनके घात में छोटी राशि को जोड़ कर आधा करने से उसका पूरा पूरा घन मूल मिल जाता है। दोनों राशियों के योग और अन्तर मे दो दो जोड़ दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल मिल जाता है। राशियों के वर्गान्तर में आठ जोड़ दें तो इस का भी पूरा वर्गमूल

मिलता है, राशियों के वर्गयेाग का भी पूरा वर्गमूल मिलता है और इन पांचों मूलों का येाग २५ होता है।

उ० ६ और ८

३९। उन दोनों राशियों को बताओ जिनके येाग और वियेाग में तीन मिला दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल निकल आता है। दोनों के वर्ग योग मे चार घटा दें तो उसका पूरा वर्गमूल मिल जाता है। दोनों के वर्गान्तर मे बारह जोड़ दें तो उसका भी पूरा वर्गमूल मिलता है। दोनों के घात के आधे में छोटी राशि को मिला दें तो उसका पूरा घनमूल मिलता है और पांचो मूलो का येाग २३ होता है।

उ० ६ और ७

४०। उन दोनों राशियों को बताओ जिनके येाग और अन्तर का पूरा पूरा वर्गमूल निकले, वर्गान्तर का भी पूरा वर्गमूल मिले, वर्ग योग का आठ मिलाने से पूरा वर्गमूल मिले, दोनों के घात में छोटी राशि को घटा कर आधा करें तो इसका घनमूल मिले और पांचों मूलों का येाग १६ हो।

उ० ४ और ५

४१। वे दोनों अभिन्न राशि कौन हैं जिनके येाग में उनके घात और वर्गयेाग को मिला कर वर्गमूल लें उस में उन्हीं दोनों राशियों को मिला दें तो २३ हो।

उ० ७ और ५

४२। दश हाथ व्यासार्ध के वृत्तक्षेत्र की परिधि पर एक खूँटे में एक रस्सी से एक घोड़ा बँधा है और ठीक आधे खेत

की घास को चरता है। बताओ जिस रस्सी में घोड़ा बँधा है उसकी लम्बाई कितना हाथ है।

उ० ११·५८७·८५।

४३। ऊपर के प्रश्न में जिस खूँटे में घोड़ा बँधा है उस से छ राशि के अन्तर पर परिधि ही के ऊपर एक दूसरा खूँटा है जिसमें एक गाय रस्सी से बँधी है वह भी ठीक आधे खेत की घास चरती है। बताओ दोनों के चरने से कितना खेत बाकी बचा।

उ. २५-४५५ वर्ग हस्त।

यह बीज बीज विचारि जो उर धारि है धरि धीरता।
वर वासना विधि वारि डारि निकारि अङ्कुर धीलता॥
निज सुमन सों वहु सुमन पाय सो धीर यश धन धी लहै।
राखत नरेश सुचाहि तेहि भाखत सुधाकर धीर है॥
उनइस सै अरु चौवन संवत मास।
सित शुचि दूइज गुरु दिन भयेउ प्रकास॥
तेहि संवत सित कातिक दशमी गुरु दिन।
पूरन कियेउ सुमिरि सिय-पति-पद छिन छिन॥

इति श्रीकृपालुदत्तात्मजसुधाकरद्विवेदिकृता
समीकरण-मीमांसा सम्पूर्णा।

विषयानुक्रमणिका

प्रथम भाग

अध्याय १

अध्याय २

अध्याय ३

अध्याय ४

अध्याय ५

अध्याय ६

अध्याय ७

अध्याय ८

अध्याय ९

अध्याय १४

अध्याय १५

दूसरा भाग

अध्याय १६

अध्याय १७

शब्द-सूची

अ

अव्यक्तराशि, Unknown quantity
अकरणीगत, Rational
अभिन्न, Integral
अकरणीगत अभिन्नफल, Rational integral function.
अपचय घात, Descending power
अंश, Numerator.
असंभव संख्या, Imposible or imaginary number
अन्तिमपद, Last term
असंभव मूल, Imaginary root
अनन्त, Infinity
अधूरा समीकरण, Incomplete equation
असकृत्कर्म, Repeated process
असमान, Unequal
अटकल से, By trial
अपवर्त्तित-घन-समीकरण, Cubic equation by reduction
अनुमान, Corollary
अव्यवहित, Contiguous or adjacent
अव्यवहितोत्तर, Contiguous, different
अव्यवहित पूर्व और उत्तर य के मान, Former and later adjacent values of x.
अपवर्त्तन, Reduction
अङ्कपाश, Permutation

अनुगम, Deduction
अचल स्पर्धी Invariant
अक्ष, Axis
अपवर्त्य, Multiple

आ

आसन्नमान, Aproximate value
आनयन, Solution
आयताकृति, Rectangular form
आयताकार, Rectangular
आयत, Rectangle

इ

इष्टाङ्क, Arbitrary number

उ

उत्पन्नफल, Derived function
उपचय, Ascending
उभयनिष्ठ, Common
उन्मिति, value
उपपत्ति, Proof
उत्थापन, substitution
ऊर्ध्वाधर, vertical
उपान्तिम, Last but one
ऊर्ध्वाधर पंक्ति, vertical line, column
उत्क्रम, Reciprocal

ऋ

ऋण, Negative

ए

एकवर्ण समीकरण, Equation with one variable
एकापचित, Decreasing by one
एकान्तर, alternate

क

करणी, Surds
करणीगत मूल, Irrational root
क्रमिक पदयूथ, group of terms in order
कनिष्ठ सीमा, Inferior limit
कोष्ठक, Bracket
कोटिज्या वा कोज्य, cosine
कर्ण, Hypotenuse
कोटि, altitude
कनिष्ठफल, Determinants
कर्णगत, situated diagonally
केन्द्र, center

ख

खिल, Wrong

ग

गुणक, Multiplier, coefficient
गुण्य, Multiplicand

गुणन फल, Product
गुणयगुणक रूप अवव्यव वा खण्ड, Factors
गुणोत्तर श्रेढी, Geometrical progression
ग्राह्यमान, admissible value

घ

घन, Cube
घन-समीकरण, Cubic equation
घात, Power

च

चिन्ह, Sign
चिन्ह रीति, Rules of signs
चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation
चलनकलन, Differential Calculus
चलराशिकलन, Integral Calculus
चलन समीकरण, Differential equation
चक्रवाल, Cyclical
चलस्पर्द्धी, Covariant
चापीय, Spherical
चाप, Arc

छ

छेदगम से, By multiplying both sides of an equatoin by the greatest denominator.

ज

ज्या, sine

त

तृतीयोत्पन्नफल, Third derived function
तुल्य मूल, Equal roots
तुल्यान्तरित, Equidistant
तद्रूपफल, Symmetrical function
तष्ट करना, To divide numerator by a denominator and take the remainder only
तात्कालिक संबन्ध, Differential co-efficient
तिर्यक् पंक्ति, Rows, Horizontal line
तद्रूप, Symmetrical
तुल्यघात, Homogenous
त्रिकोणमिति, Trigonometry

द

द्वितीयोत्पन्न फल, Second derived function
द्वियुक्पदसिद्धान्त, Binominal Theorem
द्वियुक्पद समीकरण Binominal equation
दृढ़, Prime
दशमलव, Decimal
द्वितीयपदरहित चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation deprived of its second term
दीर्घवृत्तलक्षण, Ellipse

ध

धन, Positive
धनर्ण, Positive and negative

ध्रुवशक्तिक, Having the sum of the exponents of each term equal

ध्रुवशक्ति, Sum of the exponents

ध्रुवा, Constituents of the determinants

ध्रुवाङ्क, Constituent

ध्रुव, Constituents

ध्रुवक, Constituent

धरातल, Plane

न

निर्दिष्ट, Given

न्यून, Less

निरवयव, Without remainder, perfect

निष्पत्ति, Ratio

निरत्न, non-contituent

न्यूनतम, Minimum

प

प्रक्रम, Article

पूर्ण-फल, Complete function

पूर्ण-समीकरण, Complete equation

प्रथमोत्पन्नफल, First derived function

पक्ष, side

पद, term

प्रधान सीमा, Superior limit

परिच्छिन्न मूल, Commensurable root

पाटीगणित, Arithmetic

पद उड़ाना, Removal of a term

प्रसिद्धार्थ, Postulate

पंक्ति, Line

प्रधान पद, First element

पूरक, Complementary

परम्परा, Continuous arrangement, regular series

प्रत्युत्पन्न, Derivative

परिमिति, Limit

प्रधान समीकरण, Final equation

प्रकीर्णक, Miscellaneous Theorem

परिधि, Circumference

पूर्णज्या, Chord

फ

फल. Function, result

ब

बीजगणित, Algebra

भ

भाज्य, Dividend

भाजक, Divisor

भिन्न, fraction

भुज, Side or base if a triangle

म

मूल, Root

महत्तमापवर्त्तन, G C. M.

मूलचिन्हान्तर्गत, Under radical sign
मुख्य समीकरण, Original equation
मध्यस्थ, Medium
मिश्र-चल, Complex variable
महत्तम, Maximum

य

योगान्तर श्रेढी, Arithmetical progression
यूथ, Group

र

रूप, Unity

ल

लब्धि, Quotient
लघुत्तमापवर्त्य, L. C. M.
लघूकरण, Reduction
लघुरिक्थ, Logarithm
लघुकनिष्ठफल, Partial or minor determinant
लुप्तीकरण, Elimination
लम्ब, Perpendicular

व

विषम, Odd
व्यत्यास, Change
बहुयुक्पद, Polynominal term
वर्गसमीकरण, Quadratic equation
वितत रूप, continued form
विततभिन्न, Continued fraction

व्यतिरेक, Converse
व्याप्ति, Inherence
व्यत्यय, Reverse
विरुद्ध, Opposite
वास्तवमान, Real value
वज्राभ्यास, Cross multiplication
वक्र, Curve
वृत्त, Circle

श

शेष, Remainder
श्रेणी, Series
श्रेढी, Progression

स

समीकरण मीमांसा Theory of Equations
सरूप समीकरण, Linear equation
संख्यात्मक गुणक, Numerical co-efficient
सिद्धान्त, Theorem
सम्भाव्य संख्या, Real number
सम्भव संख्या, Real quantity
समीकरण, Equation
स्वतन्त्र, Independent
सम घात Even power
सर, Continuation
संशयात्मक, Ambiguous
सीमा, Limit

समच्छेद, Equal denominators
समकोण, Right angle
स्वल्पान्तरसे, Roughly
समीकरण के मूलों का पृथक्करण, Separation of the roots of an equation
सम, Even, equal
संख्यात्मक मान, Numerical value
समशोधन से, By equal subtraction
सोपान, The highest exponent
सङ्कलन, Addition
सजातीय, similar, Homogenous
सम्बद्ध, conjugate
समानान्तर, Parallel
सीमा, Boundary

ह

हर, denominator
हरात्मक समीकरण, Harmonical equation

क्ष

क्षेत्रफल, Area of a figure
क्षेत्र, Figure
क्षेत्र, Additive

त्र

त्रिघात समीकरण, Cubic equation
त्रिकोणमिति, Trigo-nometry